

# MODELOS UNIFACTORIALES DE TIPOS DE INTERÉS: APLICACIÓN AL MERCADO COLOMBIANO\*

*Diego Alexander Restrepo Tobón\*\**

*Juan Carlos Botero Ramírez\*\*\**

---

\* Este artículo es producto del proyecto de investigación “Modelos unifactoriales de tipos de interés”, presentado para optar al título de Magister en Finanzas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia. El proyecto inició el 20 de octubre de 2006 y finalizó el 31 de julio de 2007. Fue financiado por la Universidad EAFIT, Medellín, Colombia. El artículo se recibió el 03-10-2007 y se aprobó el 18-03-2008.

\*\* Magister en Finanzas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia (2007); Especialista en Finanzas, Universidad EAFIT (2004); Administrador de Empresas, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia (2003); Integrante del grupo de investigación Finanzas y Banca (GIFyB). Profesor tiempo completo del Departamento de Finanzas, Universidad EAFIT.

Correo electrónico: drestr16@eafit.edu.co

\*\*\* Magister en Finanzas, Massachusetts Institute of Technology, Boston, USA (2001); Magister en Economía, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia (1994); Ingeniero Civil, Escuela de Ingeniería de Antioquia en Colombia, Medellín, Colombia (1990). Presidente de la Bolsa Nacional Agropecuaria de Colombia.

Correo electrónico: juanc.botero@bna.com.co

***Modelos unifactoriales de tipos de interés: aplicación al mercado colombiano***

RESUMEN

Este artículo presenta una primera aproximación a la implementación en el mercado colombiano de los modelos unifactoriales de tasas de interés de Hull and White (1990) y Black and Karasinski (1991) con parámetros de volatilidad y velocidad de reversión constantes. Los principales hallazgos de la investigación son: 1) Se encuentra que la implementación de ambos modelos mediante árboles trinomiales permite replicar con exactitud la estructura a plazos de tasas de interés del mercado; 2) los movimientos paralelos de la estructura a plazos de tasas de interés en Colombia explican la mayor parte de su variabilidad, por tanto, la utilización de modelos unifactoriales como los propuestos resulta adecuada; 3) los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión a la media de la tasa de interés de corto plazo se deben estimar mediante modelos econométricos de series de tiempo; 4) en futuros trabajos se deben abordar los problemas relacionados con la cobertura con este tipo de modelos, la estimación de estructuras y superficies de volatilidades y la calibración de modelos multifactoriales.

**Palabras clave:** tasas de interés, modelos de tipos de interés, calibración, Hull y White, Black y Karasinski.

***Unifactorial Interest Rate Models: Colombian Market Application***

ABSTRACT

This article is a first approach to implementing in the Colombian market the unifactorial interest rate models developed by Hull and White (1990) and by Black and Karasinski (1991) with constant volatility and reversion velocity parameters. The main findings from this research are 1) implementing both models using trinomial trees enables accurately replicating the forward structure of market interest rates; 2) the parallel movements of the installment structure of interest rates in Colombia explains most of their variability, thus, using unifactorial models such as the ones proponed herein is appropriate; 3) the volatility and reversion velocity mean parameters on the mean short-term interest rate must be estimated using time series econometric models; 4) future articles must broach the problems related to coverage using such types of models, to estimating volatility structures and surfaces, and to multifactorial model calibration.

**Key Words:** interest rates, interest rate models, calibration, Hull and White, Black and Karasinski

## Introducción

A pesar del avance del mercado de capitales colombiano en la década de los noventa y principios de la actual,<sup>1</sup> aún se concentra en instrumentos de deuda pública. Aunque las dificultades que se deben enfrentar para lograr resolver esta situación son múltiples, un avance importante será el desarrollo del nuevo mercado de derivados colombiano, en el cual será imprescindible la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés, como futuros, opciones, bonos con opciones incorporadas, *swaps*, *swaptions*, *caps* y *floors*.<sup>2</sup>

Así, es necesario avanzar en la implementación de modelos para la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés. En etapas incipientes de desarrollo de los mercados de derivados los modelos unifactoriales aparecen como una elección natural debido a su sencillez y parsimonia. Para este artículo se seleccionaron los modelos de Hull y White (1990) y Black y Karasinski (1991). Estos dos modelos son ampliamente utilizados en otros mercados y apropiados cuando se pretende valorar instrumentos derivados de tasas de interés de primera generación, es decir, aquellos cuyos flujos de caja al vencimiento dependen principalmente del nivel de las tasas de interés. Este tipo de instrumentos aparecen de forma natural en las primeras fa-

ses de desarrollo de un mercado de derivados de tasas de interés.

Debido a la imposibilidad de aplicar las metodologías estándar de calibración de dichos modelos de la manera como se realiza en mercados más desarrollados, es necesario abordar formas alternativas para lograrlo. Este es precisamente el problema abordado aquí. En una primera etapa se aborda el problema de hacer que los modelos repliquen la estructura a plazos de tasas de interés estimada por la Bolsa de Valores de Colombia. En la segunda, se afronta la estimación de los parámetros de volatilidad<sup>3</sup> y velocidad de reversión de los modelos objeto de estudio.

Respecto a la primera etapa de la investigación los resultados permiten concluir que los modelos de Hull & White y Black & Karasinski replican con exactitud la estructura a plazos de tasas de interés del mercado colombiano. El modelo de Black & Karasinski resulta ser más adecuado debido, principalmente, a que no permite la existencia de tasas de interés negativas y a que la volatilidad de las tasas de interés depende del nivel de las mismas.

En relación con la segunda etapa del estudio, se encontró que la calibración implícita de los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión a la media de ambos modelos no se puede realizar debido a la inexistencia de instrumentos derivados de tasas de interés en el mercado colombiano. Por esto, se recurre a otros métodos de estimación a partir de

<sup>1</sup> Para una ampliación de este aspecto véase Arbeláez *et al.*, 2002.

<sup>2</sup> Este artículo sólo aborda el problema de la implementación de modelos unifactoriales para la valoración de derivados de tasas de interés. No obstante, un problema conexo es la cobertura del riesgo asociado a estos instrumentos. Este, por su extensión, no puede ser abordado aquí.

<sup>3</sup> La volatilidad a la que se refiere la calibración es la volatilidad condicional.

información histórica utilizando como tasa de interés de corto plazo la Tasa Interbancaria (TIB). La estimación de la volatilidad se realizó a partir de modelos GARCH (Engle, 1982; Bollerslev, 1986 y Nelson, 1991). El modelo de mejor ajuste fue un modelo EGARCH.<sup>4</sup> En cuanto a la velocidad de reversión a la media, no se encontraron resultados satisfactorios. Debido a lo anterior, se optó por fijar el valor de este parámetro en un nivel de 24% con el propósito de avanzar en otros frentes de la investigación.<sup>5</sup>

El artículo está estructurado de la siguiente forma: primero se presenta la teoría asociada a los modelos de tasas de interés y los modelos de Hull & White (1990) y Black & Karasinski (1991). Luego se presentan las metodologías de calibración de estos modelos y se muestra la metodología utilizada en este estudio. Posteriormente, se expone una revisión de la literatura sobre la aplicación de estos modelos en mercados emergentes y, especialmente, en Latinoamérica. A continuación se describen los datos utilizados y se presentan los resultados del trabajo. Finalmente, se exponen las principales conclusiones.

<sup>4</sup> La utilización de modelos GARCH en la estimación de la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo está ampliamente difundida. Al respecto, pueden consultarse los trabajos de Bali & Wu (2005); Brenner, Harjes & Kroner (1996) y Zúñiga (1999).

<sup>5</sup> Puede demostrarse que en los modelos de reversión a la media la distancia entre el valor actual de la variable y su nivel de reversión decae exponencialmente a la tasa de velocidad de reversión (Tuckman, 2002, p. 239). Un nivel de reversión de 24% implica que la tasa de interés de corto plazo demora alrededor de 35 meses para recorrer la mitad de la distancia entre su valor actual y su valor de reversión de largo plazo.

## 1. Modelos de tasas de interés

En la literatura se pueden distinguir entre modelos de tasas de interés de *equilibrio* y de *no arbitraje*. Los primeros realizan una serie de supuestos respecto a la economía en la cual operan y derivan un proceso para la tasa de interés de corto plazo. En estos modelos las estructuras a plazos de tasas de interés y de volatilidades se determinan de forma endógena. En cambio, los modelos de no arbitraje toman dichas estructuras como exógenas para hacer que los precios de los títulos dados por el modelo coincidan con los observados en el mercado.

Otra clasificación diferencia los modelos de tasas de interés por el número de factores aleatorios que se contemplan en ellos. Los modelos unifactoriales asumen que la estructura a plazos de tasas de interés se desprende por completo de un único factor, generalmente, la tasa de interés de corto plazo. En cambio, los modelos multifactoriales modelan la estructura a plazos de tasas de interés asumiendo que más de un factor, por ejemplo la tasa de corto plazo y su tendencia, siguen cierto proceso estocástico, y a partir de estos se determina la estructura a plazos por completo.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Una discusión exhaustiva sobre estos modelos está por fuera del alcance de este artículo. Para el lector interesado se recomienda consultar a Rebonato (1996) y Brigo & Mercurio (2006).

## 2. Modelos de Hull & White (1990) y Black & Karasinski (1991)

El modelo de Hull & White (1990) –en adelante HW– tiene la siguiente especificación:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (1)$$

La dinámica de la tasa de interés dada en (1) implica que los cambios de la tasa de interés de corto plazo se componen de una tendencia  $[\theta(t) - ar(t)] dt$  y de un componente estocástico  $\sigma dW(t)$ . El parámetro  $a$  mide la velocidad de reversión a la media, es decir, la rapidez con que la tasa de interés de corto plazo tiende a regresar a su valor de largo plazo,  $\theta(t)/a$ , una vez que se ha desviado de este. El parámetro  $\sigma$  es la volatilidad de los cambios de la tasa de interés de corto plazo, la cual puede asumirse constante o como una función determinística del tiempo,  $dt$  es un intervalo de tiempo que tiende a 0 y  $dW(t)$  es un proceso browniano. El hecho de que  $\theta(t)$  sea una función del tiempo permite ajustar el modelo a cualquier estructura a plazos de tasas de interés.

En el modelo de HW la varianza de la tasa de interés de corto plazo no depende del nivel de la misma. Es decir, la volatilidad tomará valores en función del tiempo, pero no en función de qué tan altas o bajas sean las tasas de interés.<sup>7</sup> Además, la tasa de interés en cualquier momento del tiempo sigue una distribución normal, esto implica que existe

la probabilidad de que se tornen negativas. Estas dos características son las mayores debilidades del modelo. No obstante, el modelo permite la construcción de fórmulas analíticas para el precio de instrumentos derivados básicos de tipos de interés, como *caps*, *floors*, *swaption*, opciones europeas sobre bonos cero cupón y sobre bonos con cupones.

De forma análoga, se especifica el modelo de Black & Karasinski –en lo sucesivo BK– de la siguiente forma:

$$d \ln r = (\ln \gamma(t) - a \ln r)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (2)$$

La interpretación es análoga a la del modelo HW, la diferencia radica en que BK modela los cambios logarítmicos de la tasa de interés de corto plazo y no los cambios simples. En este modelo  $a$  representa la velocidad de reversión a la media del logaritmo de la tasa de interés de corto plazo,  $\ln \gamma(t)/a$  es el nivel de reversión a la media y  $\sigma(t)$  es la volatilidad de los cambios en  $\ln r$ , es decir, la volatilidad de los cambios proporcionales de  $r$ .

BK supera las dos características no deseadas de HW. Como se observa, la distribución de la tasa de interés en cualquier momento del tiempo es lognormal, lo cual implica que estas no se tornan negativas. Además, la varianza de la tasa de interés de corto plazo depende del nivel de las mismas. Sin embargo, contrario a HW, BK no dispone de fórmulas analíticas para la determinación de los precios de derivados de tipos de interés básicos.

Ambos modelos comparten la característica de que las tasas de interés presentan reversión a la media y pueden ser implementados

<sup>7</sup> Es un hecho empírico que cuando las tasas de interés son bajas (altas) presentan una baja (alta) volatilidad; véase por ejemplo Chan *et al.* (1992).

utilizando árboles trinomiales.<sup>8</sup> Lo anterior permite la valoración de opciones de tipos de interés de estilo americana y otros derivados más exóticos.

### 3. Calibración de los modelos

La calibración de HW y BK se hace en dos etapas. En la primera se replica la estructura a plazos de tasas de interés de tal forma que los precios de los bonos cero cupón a todos los plazos dados por el modelo sean los mismos observados en el mercado o los estimados por alguna metodología disponible.<sup>9</sup> La segunda implica encontrar los valores de los parámetros  $\sigma$  y  $a$  que hacen que las tasas de interés arrojadas por los modelos permitan replicar los precios de *caps*, *floors* o *swaptions* suficientemente líquidos en el mercado.

En el mercado colombiano se transan bonos cero cupón a diferentes plazos, pero los volúmenes negociados son bajos y no gozan de liquidez suficiente para ser considerados como instrumentos que reflejen las condiciones generales del mercado. Por esta razón, se deben utilizar como instrumentos de calibración los precios de bonos cero cupón estimados por alguna metodología econométrica como la de Nelson & Siegel (1987).

En cuanto a los instrumentos derivados necesarios para la calibración de  $\sigma$  y  $a$ , ninguno de ellos se transa activamente en el mercado

colombiano.<sup>10</sup> Por tal motivo, la estimación de dichos parámetros también se debe realizar por alguna metodología econométrica.<sup>11</sup> En este artículo se ha elegido calibrar la volatilidad por medio de modelos GARCH, pues como lo indican Nelson & Foster (1995), este tipo de modelos son óptimos para estimar y pronosticar la volatilidad, incluso ante la presencia de una mala especificación del modelo.<sup>12</sup> Además, Ramírez & Botero (2007) hicieron una aplicación de este tipo de modelos bajo varias especificaciones sobre la TIB y encontraron que el modelo EGARCH presentaba los mejores ajustes.<sup>13</sup>

<sup>10</sup> Aunque es ventajoso contar con instrumentos a partir de los cuales se pueda llevar a cabo una calibración implícita, esto no es del todo deseable. Como lo indican Campbell, Lo & MacKinlay (1997), la calibración implícita está íntimamente condicionada con la especificación paramétrica del modelo de valoración seleccionado y con la dinámica del activo subyacente. Si este modelo no es consistente con las regularidades empíricas, entonces la calibración implícita es inconsistente. La aproximación correcta sería usar un estimador de los parámetros desconocidos a partir de información histórica, tal como se realiza aquí.

<sup>11</sup> Brigo & Mercurio (2006) anotan que la estimación de la volatilidad de esta manera es adecuada debido a que por el teorema de Girsanov el parámetro de difusión es el mismo en la medida real y neutral al riesgo. Sin embargo, los parámetros asociados a la tendencia no son los mismos en las dos medidas y por esto la estimación econométrica no sería adecuada. Se realizó la calibración implícita de dichos parámetros utilizando las fórmulas analíticas de HW para los bonos cero cupón. Sin embargo, no se encontraron valores satisfactorios.

<sup>12</sup> Estos dos autores encuentran que en particular un modelo AR(1) EGARCH estima con consistencia la volatilidad instantánea y genera pronósticos apropiados de los precios de acciones y del proceso de la volatilidad cuando los datos empleados son de alta frecuencia.

<sup>13</sup> Algunos autores han investigado la posibilidad de estimar la volatilidad de las tasas de interés a partir de secciones cruzadas de series de tiempo del rendimiento al vencimiento de bonos. Sin embargo, Dufresne *et al.* (2004) encuentran que la volatilidad de las tasas de interés no puede estimarse de esta manera.

<sup>8</sup> Para este trabajo se utiliza la metodología de implementación mediante árboles trinomiales propuesta por Hull & White (1994a).

<sup>9</sup> En el caso colombiano, los estimados por la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) con la metodología de Nelson & Siegel (1987).

#### 4. Modelos de tipos de interés en Latinoamérica

Para el caso latinoamericano, la literatura sobre la aplicación de modelos de tipos de interés es escasa. Los principales estudios, afines con los objetivos de este artículo, se han aplicado al mercado de Brasil. En cuanto a los modelos estudiados en esos trabajos se destacan los modelos unifactoriales de Black, Derman & Toy (1990), Hull & White (1990) y Black & Karasinski (1991).

Los trabajos más sobresalientes para el mercado brasileño son los de Vieira & Valls (2000); Gluckstern (2002); Almeida, Yoshino & Schirmer (2003); Silva (2003); Bessada, Nunes & Neves (2003) y Ferreira (2006). Específicamente, Gluckstern (2002) investiga la aplicación de los modelos de Hull & White (1990) y Black & Karasinski (1991), mientras que Almeida *et al.* (2003) utiliza exclusivamente el modelo de Hull & White (1990). Una conclusión común a estos dos trabajos es que, dado que no existen opciones de tasas de interés con suficiente liquidez en el mercado, la calibración implícita de los modelos es inviable. En ambos estudios se acude a la estimación econométrica de los parámetros de volatilidad utilizando modelos de series de tiempo EWMA (*Exponentially Weighted Moving Averages*) como alternativa a la calibración implícita de los parámetros de estos modelos. Además, sugieren que la utilización de dichos modelos podría ser de utilidad una vez el mercado adquiera una mayor dinámica y aumente la liquidez de los instrumentos necesarios para el proceso de calibración.

En el mercado colombiano Ramírez & Botero (2007) realizan una estimación econométrica de los modelos de tasas de interés en tiempo continuo más importantes de la literatura. Aunque esos modelos no son el objeto de este artículo, algunas de sus conclusiones permiten soportar el hecho de que las estimaciones econométricas pueden ser útiles en la estimación de la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo. Por último, cabe destacar los estudios de Venegas (2005) para el mercado mexicano y el de Ochoa (2006) para el mercado chileno. En el primero se utilizan los modelos de Vasicek (1977) y Cox *et al.* (1985) mientras que en este último se utiliza un modelo multifactorial.

#### 5. Datos

Para la implementación de HW y BK se utilizó la curva TES en pesos (CECPESOS) estimada y publicada a diario por BVC entre el 2 de enero de 2006 y el 28 de diciembre de 2006. Para la estimación del parámetro de volatilidad y velocidad de reversión se utilizó la tasa interbancaria –en adelante TIB– desde el 1 de enero de 2001 hasta el 29 de diciembre de 2006. Para contrastar la eficiencia con la cual los modelos replican los precios de mercado de algunos instrumentos de referencia se eligió el TES TFIT15240720<sup>14</sup> por ser el título más líquido y de mayor volumen en el mercado.

<sup>14</sup> Este título es emitido por el Gobierno Nacional, tiene vencimiento el 24 de julio de 2020 y paga un cupón fijo anual de 11%.



## 6. Resultados empíricos

### 6.1 *Análisis de componentes principales*

Para investigar qué tan eficientes pueden ser los modelos unifactoriales para representar la dinámica de la estructura a plazos de tasas de interés del mercado colombiano se realizó un análisis de componentes principales a la curva de rendimientos CECPESES desde el 2 de enero de 2003 hasta el 28 de diciembre de 2006 con una frecuencia diaria. Este análisis se realizó en dos etapas. La primera incluye el cálculo para el período completo desde el 2 de enero de 2003 hasta el 28 de diciembre de 2006 para un total de 977 observaciones; la segunda etapa consistió en estimar los componentes principales por subperíodos de un año. El gráfico 1 ilustra el comportamiento de los tres componentes principales más importantes.<sup>15</sup>

De acuerdo con los resultados obtenidos, el primer componente principal corresponde a movimientos casi paralelos de la curva de rendimientos. Esto se aprecia en la línea horizontal del gráfico 1. Para el período completo este componente explica cerca del 72% de la variabilidad de dicha curva. Los otros dos componentes, asociados a la pendiente y curvatura de la estructura a plazos de tasas de interés, explican el 26% y el 2%, respectiva-

mente.<sup>16</sup> Cuando se realiza el mismo análisis por subperíodos de un año se evidencia que para los años 2005 y 2006 el primer componente explica cerca del 87% de la variabilidad de las tasas de interés a lo largo de toda la estructura a plazos. Los resultados detallados del análisis de componentes principales se pueden apreciar en cuadros A1 y A2 al final del artículo.

En un modelo unifactorial sin reversión a la media los choques a la tasa de interés de corto plazo producen movimientos paralelos y de igual magnitud para todas las tasas en la estructura a plazos de tasas de interés. Esto es cercano a lo que ocurre con los choques al primer componente principal de la curva de rendimientos en Colombia. Si el modelo unifactorial incluye reversión a la media, un choque a la tasa de interés de corto plazo impactará en mayor magnitud a las tasas de corto plazo que a las de largo plazo. La magnitud de dicho movimiento depende del valor del parámetro de velocidad de reversión. Así, para valores altos de este parámetro los choques tienen un impacto casi igual en las tasas de interés a todos los vencimientos. Cuando el valor de este parámetro es pequeño, las tasas de interés de más corto plazo sufren un impacto mayor que las tasas de largo plazo.<sup>17</sup>

El comportamiento descrito en el párrafo anterior es parecido al que muestra el primer componente principal en el gráfico 1.

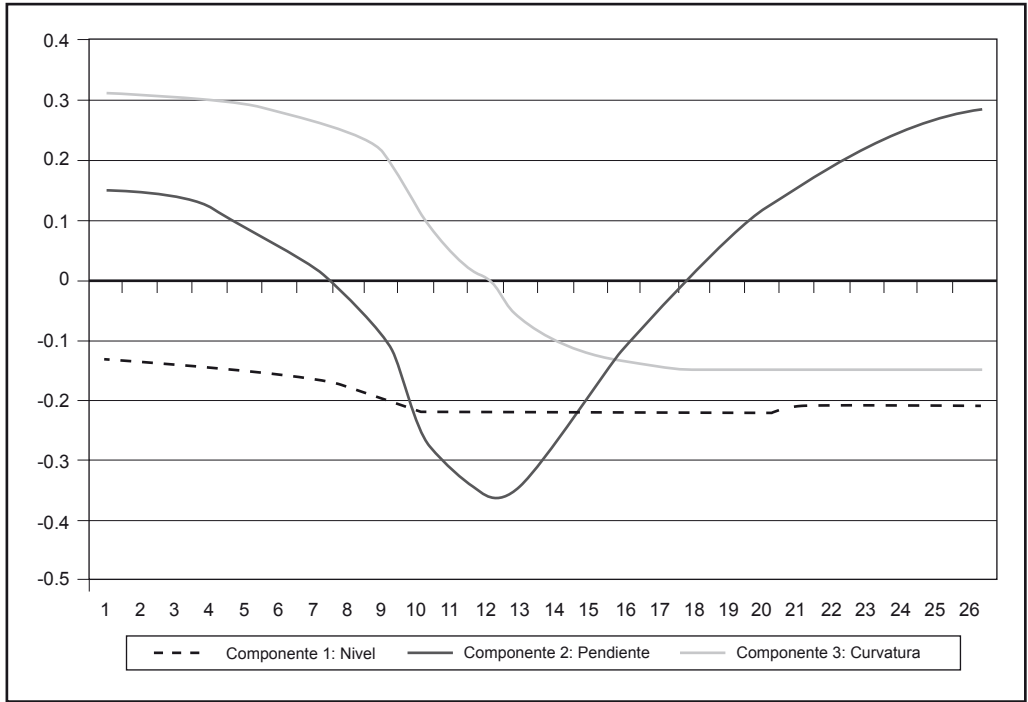
<sup>15</sup> La metodología de componentes principales exige que las variables estén altamente correlacionadas. El análisis de correlación arroja que, en efecto, este es el caso para las tasas de interés a diferentes plazos en el mercado de deuda pública colombiana, lo cual se corrobora en los resultados presentados en el cuadro A1.

<sup>16</sup> Este tipo de relaciones se hacen por ejemplo en Jhonson (2004) y en Loretan (1997), quienes hacen una buena revisión teórica del análisis de componentes principales para la estructura a plazos de tasas de interés.

<sup>17</sup> Una ampliación de este análisis puede consultarse en Tuckman (2002).



Gráfico 1  
Componentes principales (2003-2006)



Fuente: elaboración propia.

Esto sugiere que la utilización de un modelo unifactorial, aunque no alcance a capturar el cien por ciento de la variabilidad de los movimientos de la estructura a plazos de tasas de interés, podría capturar un gran porcentaje cuyo valor estará cercano al explicado por el primer componente principal. Además, si dicho modelo incluye reversión a la media, puede capturar el hecho de que las tasas de más corto plazo, comparadas con las tasas de más largo plazo, responden en mayor magnitud a los choques en la tasa de interés de corto plazo.

Dado que el primer componente principal captura más del 80% de la dinámica de la

curva cero cupón y que este se relaciona directamente con el nivel de la misma, el análisis anterior apoya la elección de los modelos unifactoriales como primera aproximación para la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés en Colombia.

### 6.2 Primera etapa de la calibración de los modelos: ajuste de los modelos a la estructura a plazos de tasas de interés inicial

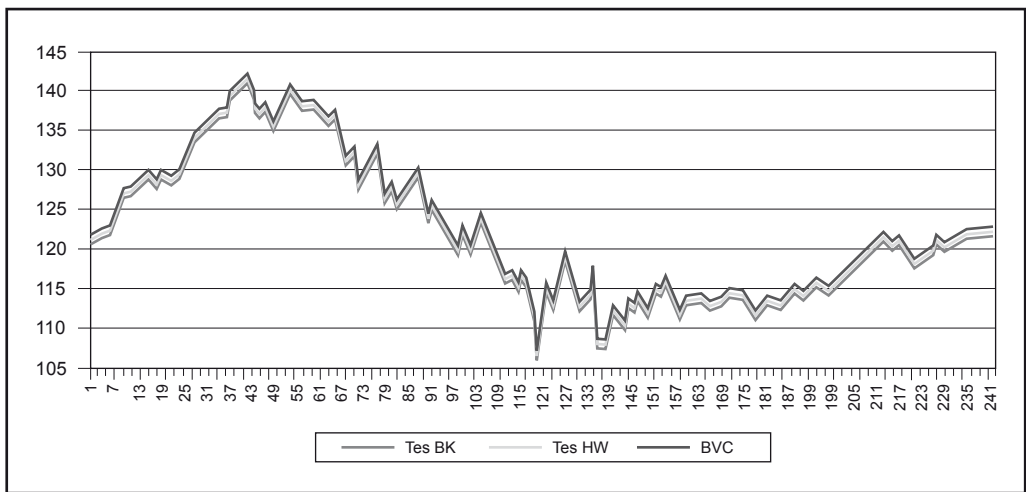
El primer paso en la implementación de estos modelos es hacer que repliquen la estructura a plazos de tasas de interés inicial. Para este trabajo se parte de la curva de rendimientos

estimada por la BVC entre el 2 de enero y el 28 de diciembre de 2006. El procedimiento consiste en construir árboles trinomiales de tal manera que los precios de los bonos cero cupón dados por el modelo sean iguales a los estimados según la curva inicial de tasas de interés (Hull & White, 1993, 1994a, 1994b). El ejercicio permite concluir que HW y BK son capaces de replicar con exactitud los precios de los bonos cero cupón estimados con la metodología de Nelson & Siegel (1987). En esta etapa los parámetros de volatilidad

co del mismo mediante la metodología de Nelson & Siegel, después se hace con el HW y BK. El modelo de HW es capaz de replicar los precios de Nelson & Siegel con una exactitud de seis decimales. BK los replica con una precisión de tres decimales. Las diferencias en exactitud entre los modelos de HW y BK radican en que este último implica la estimación del árbol de tasas de interés por métodos numéricos.<sup>18</sup> Estos resultados se aprecian en el gráfico 2.

Gráfico 2

**Precios modelo de HW y BK frente a precios promedio de la BVC (02/01/2006-28/12/2006)**



Fuente: Elaboración propia

y reversión a la media no intervienen en la calibración debido a que los precios de los títulos cero cupón son independientes de estos parámetros.

Para ilustrar lo expuesto se procedió a estimar el precio del título TES TIFT15240720 para todos los días durante el año 2006. En primera instancia, se calcula el precio teóri-

Posteriormente, se procedió a comparar estos precios con los precios promedios publicados por la Bolsa de Valores de Colombia, los cuales son utilizados en la estimación de la curva de rendimientos con la metodología de Nelson & Siegel –NS.

<sup>18</sup> Se utiliza el algoritmo de Newton Raphson.

Los errores entre los precios estimados por HW, BK y NS y los publicados por la Bolsa de Valores de Colombia se presentan en los cuadros 1 y 2.

Cuadro 1

**Estadísticos para medir el error de precios en puntos básicos de los modelos de HW y BK vs BVC**

Estadístico	HW	BK
ME	-15,530	-15,393
MAD	18,070	18,143
RMSE	24,898	24,935
MAPE	0,1454%	0,1460%
MPE	-0,1231%	-0,1219%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 2

**Estadísticos para medir el error de precios en pesos de los modelos de HW y BK vs BVC Promedios**

Estadístico	HW	BK
ME	\$ -155.304.958	\$ -153.928.612
MAD	\$ 180.701.608	\$ 181.428.908
RMSE	\$ 248.981.067	\$ 249.346.071
MAPE	\$ 145.352.764	\$ 145.978.924
MPE	\$ -123.079.557	\$ -121.882.695

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el cuadro 1, al valorar con HW el error promedio (ME) en que se incurre es de -15,53 puntos básicos. Así, en un portafolio de cien mil millones de pesos el modelo estimaría en promedio un precio que estaría 155,30 millones de pesos por debajo del precio publicado por la BVC, con un error estándar de 248,9 millones de pesos. El error

medio absoluto (MAD) sería de 180,7 millones de pesos. Al medir los errores en términos porcentuales (MPE) se obtiene que por cada cien mil millones de pesos el error sería en promedio de -123 millones de pesos y en términos absolutos (MAPE) sería de 145,3 millones de pesos. El MPE nos dice que, en promedio, el modelo HW tiende a subestimar el precio promedio del mercado en ciento veintitrés millones de pesos por cada cien mil millones de pesos.

Los resultados anteriores parecen no ser satisfactorios desde el punto de vista del error que se comete al valorar los precios de los bonos en el mercado con estos modelos.<sup>19</sup> No obstante, es importante recordar que los modelos están replicando la estructura a plazos de tasas de interés inicial, no los precios a partir de los cuales esta se construyó. Así, para evaluar con cuánta eficiencia los modelos de HW y BK replican la estructura a plazos es necesario comparar los precios

<sup>19</sup> Arango, Melo & Vásquez (2002) argumentan que el RMSE al estimar los precios con el modelo de NS respecto a los precios de mercado es bajo. No obstante, en dicho artículo no se hace explícito en qué unidades está medido el error cuadrático medio. Así, es muy difícil decidir si la aproximación es buena o es mala. El RMSE y las demás medidas de bondad del ajuste están medidas en este artículo con base en precios para los títulos con valor facial de cien. Con esto se calcula el error en la valoración de un instrumento con un valor facial de cien mil millones de pesos y se concluye que dicho error es considerable en términos monetarios. Además, es necesario recordar que los estadísticos de bondad del ajuste presentados se refieren a una serie de un único título, no de todos los títulos a partir de los cuales se construyó la estructura a plazos de tasas de interés. Sin embargo, como lo que se pretende es que los modelos de HW y BK repliquen la curva cero cupón inicial calculada con la metodología de NS, la metodología de calibración es bastante exacta a juzgar por los estadísticos de prueba.

de los bonos obtenidos con estos modelos con aquellos dados por la metodología de NS utilizada por la BVC. Los resultados de esta comparación se muestran en los cuadros 3 y 4.

Cuadro 3

**Estadísticos para medir el error de precios en puntos básicos de los modelos de HW y BK vs. NS**

Estadístico	HW	BK
ME	-0,011	0,126
MAD	0,011	0,128
RMSE	0,176	1,962
MAPE	0,0001%	0,0011%
MPE	-0,0001%	0,0011%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 4

**Estadísticos para medir el error de precios en pesos de los modelos de HW y BK vs. NS**

Estadístico	HW	BK
ME	\$ -113.196	\$ 1.263.149
MAD	\$ 113.207	\$ 1.275.754
RMSE	\$ 1.761.006	\$ 19.619.734
MAPE	\$ 102.387	\$ 1.105.619
MPE	\$ -102.378	\$ 1.095.146

Fuente: elaboración propia.

Como puede observarse, HW tiende a subestimar el precio, mientras que BK tiene a sobreestimarlos. No obstante, como se muestra en el cuadro 4, los errores en pesos para un portafolio de cien mil millones de pesos son bajos y no ameritan una gran preocupación.

**6.3 Segunda etapa de la calibración de los modelos: calibración de los parámetros de los modelos HW y BK**

Los modelos unifactoriales de HW y BK en sus formas más simples requieren como valores iniciales la velocidad de reversion a la media y la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo. Usualmente, estos parámetros se calibran a partir de instrumentos como *caps*, *floors* y *swaptions* suficientemente líquidos; sin embargo, estos instrumentos no existen en el mercado colombiano. Por esta razón, la calibración se debe realizar por otros métodos.

Una primera alternativa podría ser inferir la estructura de volatilidades de las tasas de interés *forwards* a partir de la estructura a plazos de tasas de interés calculada por la BVC. Sin embargo, esta manera de estimar dichas tasas presenta problemas. Por un lado, al calcular la volatilidad de dichas tasas para diferentes vencimientos, se obtienen estructuras de volatilidades decrecientes en el corto plazo y crecientes en el mediano y largo plazo (véase anexo 2). Lo anterior es contrario a las características de las curvas de volatilidades de los mercados más desarrollados, las cuales se caracterizan por ser crecientes en el corto y mediano plazo, y decrecientes en el largo plazo (Brigo & Mercurio, 2006, p. 134). Por otro lado, la metodología de Nelson & Siegel (1987) no captura de manera adecuada la dinámica de las tasas de interés de más corto plazo (Svensson, 1994, p. 3). En consecuencia, se estarían infiriendo volatilidades a partir de tasas de interés que no representan la realidad del mercado.

La segunda alternativa consiste en seleccionar una variable *proxy* de la tasa de interés de corto plazo y realizar la estimación de los parámetros por métodos econométricos utilizando datos históricos (Brigo & Mercurio, 2006, pp. 61-62). Esta es la alternativa utilizada por Hull & White (1990) en su investigación original y la que se empleará en este trabajo por las razones ya expuestas. A continuación se presenta la estimación utilizando herramientas econométricas.

#### 6.4 Estimación econométrica

Para la estimación econométrica se eligió como variable *proxy* de la tasa de corto plazo la Tasa Interbancaria<sup>20</sup> (TIB). Lo anterior se soporta en su frecuencia de publicación y a que el riesgo de contraparte de la misma puede corresponderse más exactamente con el riesgo del Gobierno Nacional que otras tasas del mercado.<sup>21</sup>

Para HW es necesario modelar los cambios diarios de la TIB, mientras que para BK se utilizan los cambios porcentuales. La mode-

lación consiste en discretizar los procesos de ambos modelos y estimar las series de volatilidades para cada uno. El procedimiento de discretización y estimación de la volatilidad mediante modelos GARCH se presentan en el anexo 3. Las pruebas de estacionariedad para ambas variables se presentan en el cuadro 4A del mismo anexo. Los modelos que mejor se ajustaron fueron los modelos EGARCH de Nelson (1991). Para los cambios de la TIB no se evidenciaron efectos de asimetría para la ecuación de la varianza; sin embargo, para los cambios proporcionales de dicha variable el modelo estimado presenta efectos asimétricos significativos.

Las series de la volatilidad estimadas para HW y BK con los modelos EGARCH durante 2006 se utilizaron como estimadores de la volatilidad de la TIB. De esta manera se incorporan en la implementación de los modelos mediante árboles trinomiales siguiendo la aproximación de Hull & White (1994a).

La volatilidad promedio de los cambios en la TIB estimada por medio de los modelos EGARCH es de 1,40% para HW y 20,61% para BK. El nivel de reversión estimado de la TIB en la discretización del modelo de HW es de 7,01% con una velocidad de reversión de 1,84%. El nivel de reversión estimado para BK es de 6,99% con una velocidad de reversión de 1,38%.

Aunque los niveles de reversión son aceptables para esta variable, la velocidad con la cual revierten a su media es muy baja. Por ejemplo, implicarían que una vez la variable se aleja de su nivel de largo plazo tardarían aproximadamente entre treinta y siete y cin-

<sup>20</sup> Es necesario tomar la tasa de interés de más corto plazo de la economía. Por el teorema de Girsavov el coeficiente de difusión es el mismo bajo la medida real y neutral al riesgo. Además, en estudios anteriores como el de Arango, Melo & Vásquez (2002), sobre la estimación de la estructura a plazos de tasas de interés, la TIB también fue utilizada como *proxy* de la tasa de interés de corto plazo.

<sup>21</sup> Otras tasas de interés de corto plazo consideradas fueron la CDT a noventa días, la tasa de rendimiento de los bonos cero cupón a noventa días y tasas de interés extraídas de la curva cero cupón. No obstante, la primera no representa el riesgo emisor del Gobierno Nacional, la segunda tiene pocos datos y no se publica diariamente y la tercera tiene problemas de modelo, debido a que la metodología de NS no es apropiada para capturar la dinámica de las tasas de interés en el corto plazo.

cuenta años para recorrer la mitad de la brecha que las separa de su nivel de reversión.<sup>22</sup> Así, la calibración de la velocidad de reversión con esta metodología no es satisfactoria y, por tanto, no se considerarán dichos resultados para la implementación de los modelos. En vez de esto se decidió trabajar con una velocidad de reversión constante de 24%, lo cual implica que la tasa de interés una vez se aleja de su nivel de equilibrio de largo plazo, tarda aproximadamente tres años para recorrer la mitad de la brecha que la separa de su nivel de largo plazo.

### **6.5 Valoración de opciones con los modelos de HW y BK en el mercado colombiano**

Dado que los modelos de HW y BK son capaces de replicar la estructura a plazos inicial, se procederá a utilizar los árboles trinomiales para la valoración de algunos instrumentos hipotéticos en el mercado colombiano. Debido a que no existen instrumentos en el mercado para comparar los resultados de este ejercicio, el objetivo del mismo es tener una primera aproximación comparativa de los precios que arrojan los dos modelos en el mercado colombiano.

La valoración de todos los instrumentos derivados de tipos de interés se realizó tomando una velocidad de reversión igual al 24%. De-

<sup>22</sup> Como apunta Tuckman (2002), es posible mostrar que la distancia entre el valor actual de una variable y su nivel de reversión de largo plazo decae exponencialmente a una tasa igual a la velocidad de reversión. Un factor útil para calcular cuánto tarda una variable en recorrer la mitad de la distancia que la separa de su nivel de largo plazo es llamado *half-life*,  $HL = \ln(2)/a$ , donde “a” es la velocidad de reversión.

be recordarse que este parámetro no pudo ser establecido mediante los métodos de calibración empleados, así que este valor es arbitrario. Seleccionar un valor diferente y justificar su elección requiere de estudios precisos que escapen al alcance de esta investigación y se deja para investigaciones posteriores. La volatilidad utilizada corresponde a la serie de desviaciones estándar estimada con los modelos EGARCH. En el anexo 4 se presenta un análisis de la sensibilidad del valor de una opción sobre un bono ante cambios en el parámetro de velocidad de reversión y de volatilidad. Como puede observarse, el valor de la opción es sensible a movimientos de este parámetro, lo cual deberá tenerse en cuenta a la hora de utilizar este tipo de modelos.

### **6.6 Valoración de bonos con opciones del tipo Bermuda**

En el mercado colombiano existen bonos con opciones de este tipo;<sup>23</sup> No obstante, la metodología de valoración de la BVC no contempla la opción implícita en los mismos. En este sentido, resulta interesante ver cuál es el valor de la prima de este tipo de opciones en el mercado colombiano. Para el efecto, se supone la existencia de un TES con opciones Bermuda del tipo Call (Bermudean Callable Bond) –en adelante TFIBCALL15240720– emitido por el Gobierno Nacional de Colombia, cupón fijo de 11%, emisión 24 de julio de 2005, vencimiento 24 de julio de 2020, las opciones se pueden ejercer cada año empezando el 24 de julio de 2016 a un

<sup>23</sup> Por ejemplo, los bonos con vencimiento en 2019 y 2026 emitidos por la empresa de Interconexión Eléctrica S.A. (ISA).

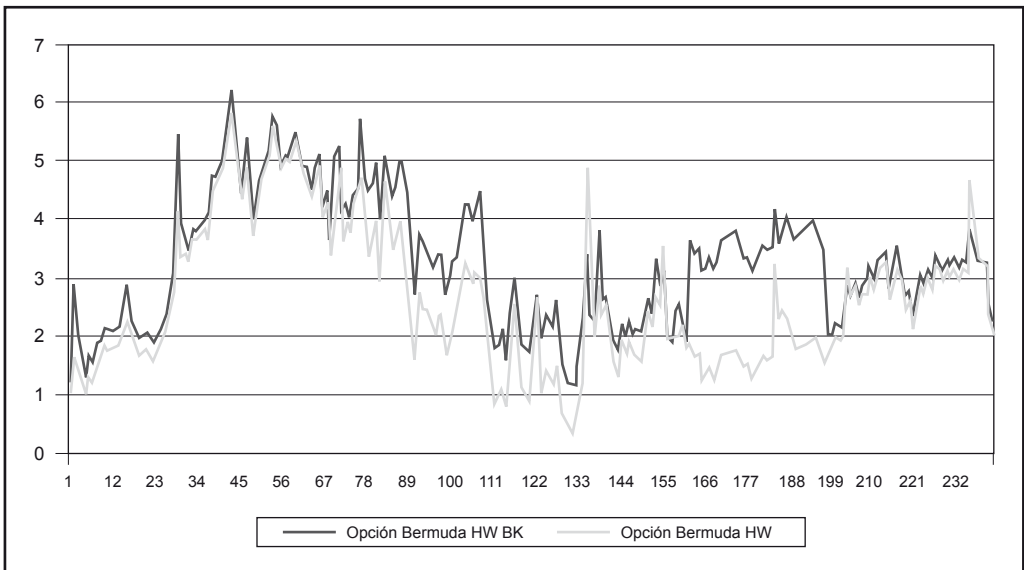
precio de 105 y reduciendo 100 puntos básicos por año hasta llegar a su valor facial de 100 al vencimiento del título. Este título es similar en sus características faciales al TES TFIT15240720 del Gobierno Nacional, el cual fue el más transado durante el período de análisis.

El gráfico 3 presenta los precios de las opciones Bermudas dadas por los modelos de HW y BK.<sup>24</sup> El cuadro 5 presenta las estadísticas descriptivas de los valores del TES TFIBCALL15240720 y de las opciones Bermudas sobre el mismo, calculados diariamente

desde el 2 de enero de 2006 hasta el 28 de diciembre de 2006.

El precio promedio de las opciones Bermuda incorporadas en el TES TFIBCALL15240720 es de 2,649 con el modelo de HW y de 3,317 con el modelo de BK por cada 100 de valor nominal. Esto corresponde aproximadamente a 2,2% con HW y 2,8% con BK del precio sucio promedio del título. Sin embargo, es importante anotar que durante la estimación el parámetro de velocidad de reversión a la media permaneció constante en 24%.

Gráfico 3  
**Valor de las opciones Bermuda**



Fuente: elaboración propia.

<sup>24</sup> El gráfico 6A muestra cómo los bonos con opciones tienen una convexidad negativa.



Cuadro 5

**Estadísticas descriptivas valor de las opciones bermuda**

Modelo	NS	HW	BK	HW	BK
Instrumento	TIFT15240720	TFIBCALL15240720	TFIBCALL15240720	Opción Bermuda	Opción Bermuda
Media	121,606	118,955	118,289	2,649	3,317
Desviación estándar	8,774	7,885	8,144	1,236	1,086
Mínimo	105,916	103,442	104,133	0,355	1,189
Máximo	140,808	135,297	135,195	5,837	6,234

Fuente: elaboración propia.

**6.7 Valoración de opciones Call sobre el TES TIFT15240720**

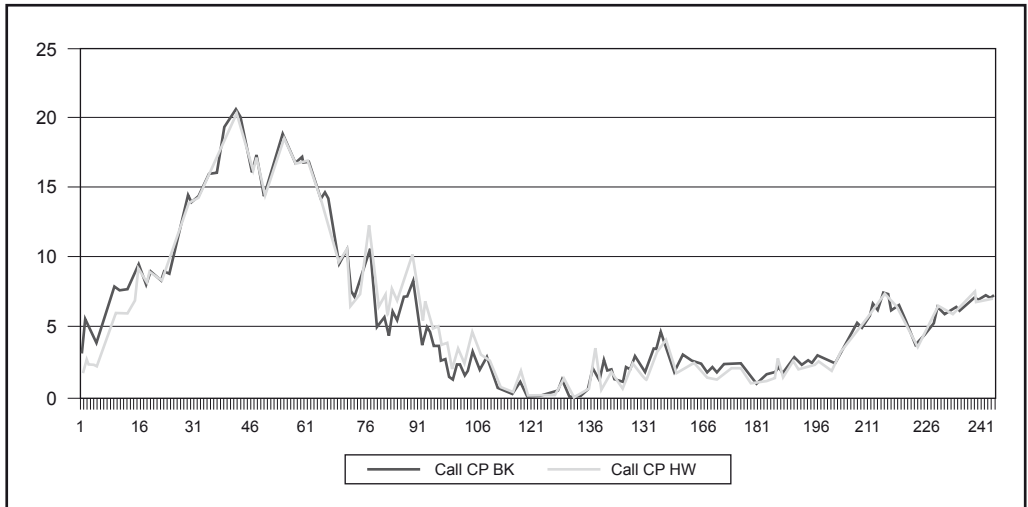
Se estimaron diariamente los precios de una opción Call europea de corto plazo y otra de largo plazo sobre el TES TIFT15240720. El vencimiento de estas opciones se fijó para el 24 de enero de 2007 y para el 24 de julio de 2015, respectivamente. Ambas opciones tienen un precio de ejercicio de 115. Los precios de estas opciones se muestran en los gráficos 4 y 5. El cuadro 6 presenta las principales estadísticas descriptivas sobre los mismos.

Es importante notar que el valor de las opciones de corto plazo con ambos modelos es muy similar durante períodos prolongados de tiempo, mientras que el valor de las opciones de largo plazo difieren durante todo el período de análisis. En el cuadro 6 se aprecia que, en promedio, el valor de la opción de largo plazo con HW es de 0,481 y con BK es de 0,390. Es decir, es más alto para HW. Lo anterior se puede explicar debido a que HW se presentan tasas de interés negativas, sobre todo en el largo plazo, lo cual hace que

el valor esperado de los bonos en esos plazos sean, en promedio, más altos que BK, donde no se presentan tasas de interés negativas. Esto no ocurre para opciones de muy corto plazo, donde el modelo de HW no presenta tasas de interés negativas y, por tanto, en ese caso el valor de las opciones tiende a ser muy similar.

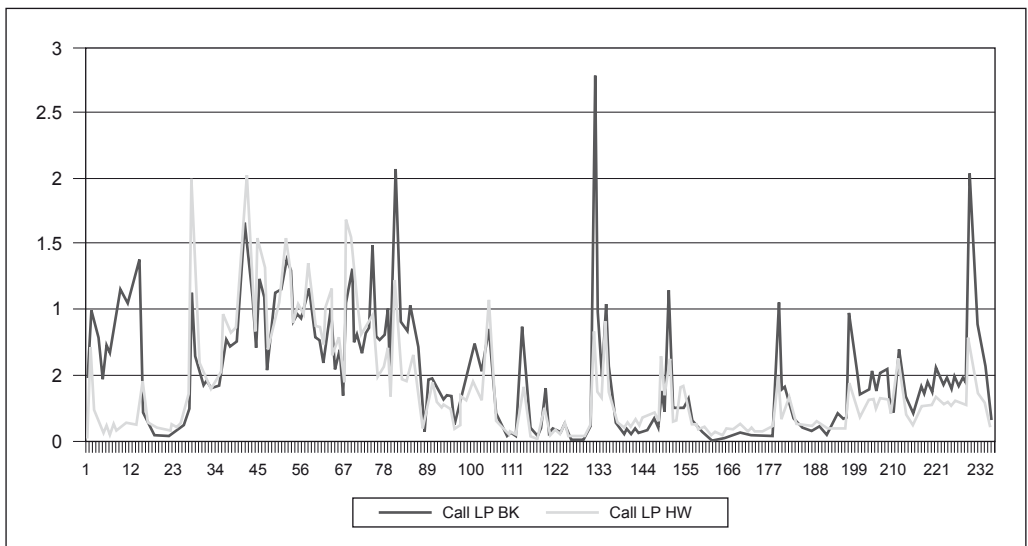
De los ejercicios de valoración y calibración de ambos modelos se desprende que en el mercado colombiano no existe información suficiente para realizar una calibración estándar, tal como se lleva a cabo en otros mercados. La alternativa propuesta implica que con los modelos de BK y HW los precios de derivados de tipos de interés difieren de acuerdo con el plazo de vencimiento de los mismos. El modelo de BK presenta ventajas respecto al de HW debido a que no permite la existencia de tasas de interés negativas. Por esta razón, ante la inexistencia de otros modelos en el mercado, podría ser útil en la valoración de instrumentos derivados de tipos de interés en una etapa inicial de desarrollo del mercado.

Gráfico 4  
**Valor de las opciones Call europeas de corto plazo**



Fuente: elaboración propia.

Gráfico 5  
**Valor de las opciones Call europeas de largo plazo**



Fuente: elaboración propia.

Cuadro 6

**Estadísticas descriptivas del valor de las opciones Call Europeas**

Modelo	HW	BK	HW	BK
Instrumento	Opción Corto Plazo	Opción Corto Plazo	Opción Largo Plazo	Opción Largo Plazo
Media	6,058	6,075	0,481	0,390
Desviación estándar	5,406	5,364	0,441	0,391
Mínimo	0,000	0,000	0,004	0,005
Máximo	20,641	20,641	2,784	1,994

Fuente: elaboración propia.

**Conclusiones**

El objetivo de este artículo fue implementar los modelos unifactoriales de Hull & White (1990) y Black & Karasinski (1991) en el mercado colombiano. Respecto a la calibración de la estructura a plazos de tasas de interés, se encuentra que ambos modelos replican con exactitud la estructura a plazos inicial calculada por la BVC. El análisis de componentes principales permite soportar la elección de los modelos unifactoriales para ser utilizados en la valoración de instrumentos derivados de tasas de interés cuyos flujos dependan principalmente del nivel de las mismas. Mediante este análisis se logró establecer que el primer componente principal, asociado al nivel de la estructura a plazos de tasas de interés, captura más del 80% de la variabilidad de la curva cero cupón. Esto es especialmente significativo para el año 2006, en el cual la variabilidad explicada por el primer componente principal asciende al 87,35%.

Respecto al tipo de modelos que se pueden implementar en el mercado colombiano, se encuentra que incluso los modelos de especi-

ficaciones más simples, es decir, con parámetros constantes para la velocidad de reversión a la media y para la volatilidad de las tasas de interés, no pueden calibrarse de manera inequívoca. Lo anterior se debe a que la calibración de los mismos con especificaciones más complejas requiere de información sobre estructuras de volatilidades y comportamiento de las tasas de interés no disponibles en el mercado colombiano.

La estimación econométrica de los parámetros utilizando una variable *proxy* para la tasa de interés de corto plazo es la única forma disponible para encontrar los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión. En el mercado colombiano la tasa que cumple de manera más cercana esta condición es la Tasa de Interés Interbancaria (TIB), con la que es posible calibrar el parámetro de volatilidad de las tasas de interés. Sin embargo, el parámetro de velocidad de reversión a la media no es posible inferirse con esta metodología, pues da como resultado valores inferiores al 2%, lo cual implica una reversión demasiado lenta como para tener sentido económico. El parámetro de velocidad de reversión a la media estimado para el modelo de HW es de

1,84% y para el modelo de BK es de 1,38%. Estos valores son muy pequeños respecto a los valores encontrados en estudios empíricos en otros países.<sup>25</sup>

Los resultados del trabajo sirven como primera aproximación a la solución del problema de valoración de instrumentos derivados de tipos de interés en Colombia. Sin embargo, dado que la calibración de los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión a la media es difícil de realizar, la elección de dichos valores queda a merced del juicio de los usuarios, lo cual es apenas lógico en la etapa inicial de desarrollo del mercado de derivados de tipos de interés en Colombia y siempre se presenta en la utilización de cualquier modelo.

## Lista de referencias

- Arbeláez, M. A. *et al.* (2002). El mercado de capitales colombiano en los noventa y las firmas comisionistas de bolsa. Bogotá: Alfa-Omega.
- Almeida, L.A., Yoshino, J.A. y Schirmer, P.P. (2003). Derivativos de Renda Fixa no Brazil: Modelo Hull-White. *Pesquisa e planejamento econômico*, 31 (2), 1-15.
- Arango, L.E., Melo, L.F. y Vásquez, D.M. (2002). Estimación de la estructura a plazos de tasas de interés en Colombia. *Borradores de Economía*, 196, 1-20.
- Bali, T.G. and Wu, L. 2005. *A comprehensive Analysis of the Short-Term Interest Rate Dynamics*. Manuscrito no publicado. Zicklin School of Business, Baruch College. Recuperado el 4 de enero de 2007 de [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=688581](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=688581).
- Bessada L., O.M., C.A. Nunes C. e Cesar das Neves. (2003). *Aplicação do Modelo de Black, Derman & Toy à Precificação de Opções sobre Títulos de Renda Fixa*. Trabalhos para Discussão, 74, Banco Central do Brazil. Recuperado el 7 de enero de 2007 de <http://ideas.repec.org/p/bcb/wpaper/74.html>.
- Björk, T., B.J. Christensen, and A. Gombani. (Sin fecha). *Some Control Theoretic Aspects of Interest Rate Theory*. Manuscrito no publicado. Department of Finance Stockholm School of Economics; Institute of Mathematics, University of Aarhus and LADSEB-CNR, Italy. Recuperado el 7 de enero de 2007 de <http://www.ladseb.pd.cnr.it/control/gombani/paperspdf/SURVEY.pdf>.
- Björk, T. (2003). On the Geometry of Interest Rate Models. En: *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer, pp. 133-214.
- Black, F., E. Derman, and W. Toy. (1990). A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options. *Financial Analyst Journal*, Jan-Feb., 33-39.
- Black, F., and P. Karasinski. (1991). Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analyst Journal*, July-Aug., 52-59.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autorregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

<sup>25</sup> Véase por ejemplo Chan *et al.* (1992).

- Bollerslev, T. and J. Wooldridge. (1992). Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamics Model with Time Varying Covariances. *Econometric Reviews*, 11, 143-172.
- Brenner, R.J., Harjes, R.H. and Kroner, K.F. (1996). Another Look at Models of the Short Interest Rate. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 3 (1), 85-107.
- Brigo, D. and F. Mercurio. (2006). *Interest Rate Models: Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*. Berlin: Springer.
- Campbell, J.Y., Lo A.W. and MacKinlay, A.C. (1997). *The econometric of financial markets*. Princeton: Princeton University Press.
- Chan K.C., A. Karolyi, F.A. Longstaff and A.B. Sanders. (1992). The Volatility of Short Term Interest Rates: An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 47 (3), 1209-27.
- Cox, J.C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 35, 389-403.
- Engel, R. (1982). Autorregresive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance U.K. inflation. *Econometrica*, 50 (4), 987-1008.
- Gluckstern, M.C. (2001). *Aplicação do Modelo Hull-White a Precificação de Opções sobre IDI*. FGV/EAESP, Brazil. Recuperado el 7 de enero de 2007 de [http://www.investsul.com.br/textos\\_academicos/Hull\\_White\\_IDI.pdf](http://www.investsul.com.br/textos_academicos/Hull_White_IDI.pdf).
- Ferreira, B. (2006). *Valoração de uma opção sobre um contrato futuro*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Industrial. Brazil: Pontificia Universidad Católica do Rio de Janeiro. Recuperado el 7 de enero de 2007 de [http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/cgi-bin/PRG\\_0599.EXE/9323\\_1.PDF?NrOcoSis=28683&CdLinPrg=pt](http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/cgi-bin/PRG_0599.EXE/9323_1.PDF?NrOcoSis=28683&CdLinPrg=pt).
- Filipovic, D. (2006). *The Geometry of Interest Rate Model*. Lectures Notes from the Dimitsana Summer School 2005, Department of Mathematics, University of Munich. Recuperado el 7 de enero de 2007 de <http://www.vif.ac.at/filipovic/PAPERS/dimitsananotes05.pdf>
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992). Bond Pricing and Term Structure of the Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60 (1), 77-105.
- Ho, T.S.Y., and S.-B. Lee (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance*, 41, 1011-1129.
- Hull, J. and A. White. (1990). Pricing Interest Rate Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, 3, 573-592.
- Hull, J. and A. White (1993). One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 235-254.
- Hull, J. and A. White (1994a). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models. *Journal of Derivatives*, 2 (Fall), 7-16.
- Hull, J. and A. White (1994b). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Two-Factor Models. *Journal of Derivatives*, 2 (Winter), 37-48.

- Hull, J. and A. White (1996a). Using Hull-White Interest Rate Trees. *Journal of Derivatives*, 3 (Spring), 26-36.
- Hull, J. and A. White (2000). *The General Hull-White Model and Super Calibration*. Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto. Recuperado el 23 de octubre de 2006 de <http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/DownloadablePublications/>
- Hull, J. (2003). *Options, Futures and Others Derivatives*. 5th Edition. Toronto: Prentice Hall,
- Johnson, G. (2004). Government of Canada Yield Curve Dynamics, 1986-2003. *Bank of Canada Review*, Winter, 2004-2005, 17-28. Recuperado el 7 de enero de 2007 de <http://www.bankofcanada.ca/en/review/winter04-05/r05-1-eb.html>
- Loretan, M. (1997). *Generating Markets Risk Scenarios Using Principal Components Analysis: methodological and practical consideration*. Federal Reserve Board, USA. BIS Working Paper. Recuperado el 7 de diciembre de 2006 de <http://www.bis.org/publ/esc07c.pdf>
- Melo, L.F. y Vásquez, D.M. (2002). Estimación de la estructura a plazos de tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones *B-spline* cúbicas. *Borradores de Economía*, 210. Recuperado el 6 de mayo de 2005 de <http://econpapers.repec.org/article/col000151/002597.htm>
- Nelson, C. and A. Siegel (1987). Parsimonious Modelling of Yield Curves. *Journal of Business*, 60 (4), 473-89.
- Nelson, D. B. and D. Foster (1995). Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models II: making the right forecast with the wrong model. *Journal of Econometrics*, 67, 341-372.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59, 347-370.
- Ochoa, M. (2006). *Interpreting an Affine Term Structure Model for Chile*. Documentos de Trabajo 380, Banco Central de Chile. Recuperado el 7 de enero de 2007 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2236741>
- Ramírez, A. y Botero, J. C. (2007). La volatilidad de las tasas de interés a corto plazo: Un ejercicio para la economía colombiana, 2001-2006. *Revista Ingenierías*, Universidad de Medellín, 6 (11), 149-170.
- Rebonato, R. (1996). *Interest Rate Option Models*. England: John Wiley & Sons.
- Silva de O., A. (2003). *Modelos de Estrutura a Termo de Tasas de Juros: Um Teste Empírico*. Dissertação de Mestrado, Fundação Getúlio Vargas, Escola de Pós-graduação em Economia. Recuperado El 7 de enero de 2007 de <http://www.eesp.fgv.br/publicacoes>
- Svensson, L.E.O. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. *IMF Working Paper*, 114. Recuperado el 23 de agosto de 2005 de <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/4871.html>
- Tuckman, Bruce (2002). *Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets*. Toronto: Wiley.

Vasicek, O.A. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

Venegas, M. F. (2005). Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Ciudad de México: Thomson.



## Anexos

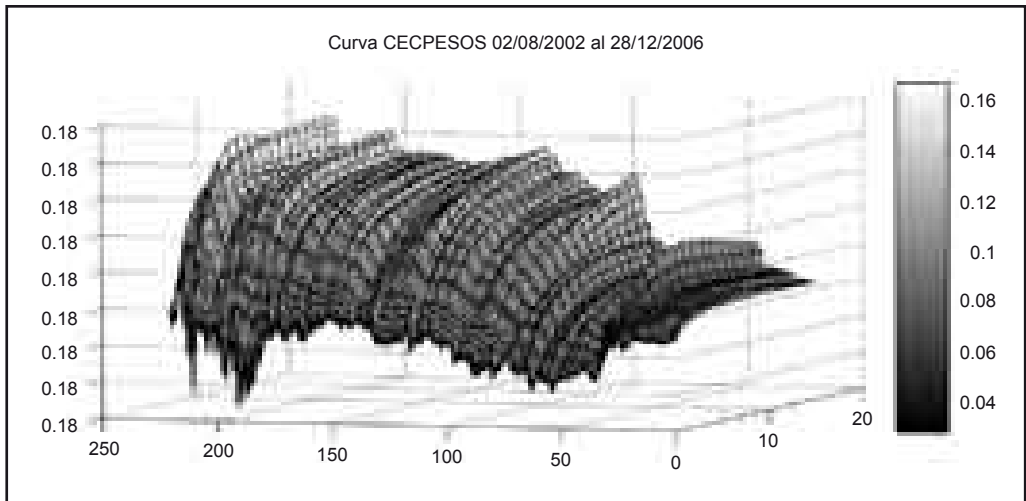
### Anexo 1

#### *Análisis de componentes principales para la estructura a plazos de tasas de interés colombiana de agosto de 2002 a diciembre de 2006*

El gráfico 1A presenta la estructura a plazos de tasas de interés estimada por la Bolsa de Valores de Colombia con la metodología de Nelson y Siegel. Los datos corresponden a estimaciones hechas cada semana para los días jueves desde el 1 de agosto de 2002 hasta el 28 de diciembre de 2006.

Gráfico 1A

#### **Estructura a plazos de tasas de interés para el período 2002-2006**

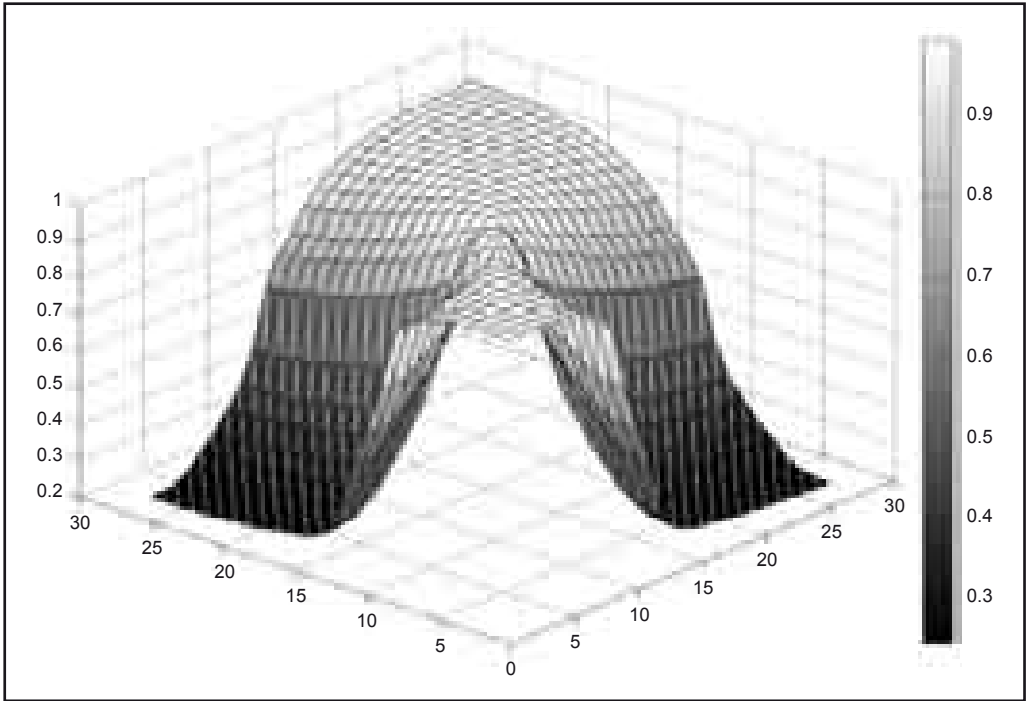


Fuente: Datos BVC. Elaboración propia.

El análisis de componentes principales requiere que las variables estén altamente correlacionadas. El gráfico 2A presenta la estructura de correlaciones entre las tasas de interés calculadas con la metodología de Nelson y Siegel de forma diaria a diferentes plazos (en años) entre el 2 de enero de 2003 y el 28 de diciembre de 2006. Los datos correspondientes a 2002 se excluyen del análisis debido a que en dicho período se presenta gran inestabilidad de los parámetros estimados con la metodología de Nelson y Siegel. El análisis de correlaciones y de componentes principales se hace para datos con frecuencia diaria.

Gráfico 2A

**Correlaciones de las tasas de interés a diferentes plazos para el período 2003-2006**



Fuente: Datos BVC. Elaboración propia.

La correlación entre las tasas de interés a diferentes plazos para el período de análisis es alta, esto permite seguir adelante con el análisis de componentes principales.

El cuadro 1A ilustra los resultados del análisis para los primeros diez componentes principales para el período de análisis. Los primeros tres componentes explican casi el 100% de la variabilidad de la estructura a plazos de tasas de interés. El componente principal uno explica el 71,8%, el dos el 25,5% y el tres el 2,5%. Estos componentes se asocian en la literatura al nivel, pendiente y curvatura de la estructura a plazos de tasas de interés.

Cuadro 1A

**Componentes principales para el periodo entre 2003 y 2006**

	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 4	Comp 5	Comp 6	Comp 7	Comp 8	Comp 9	Comp 10
Eigenvalue	1.867.999	6.630.539	0,660332	0,02761	0,001469	5,58E-05	1,82E-06	3,87E-08	7,09E-10	1,08E-11
Varianza Explicada	0,718461	0,255021	0,025397	0,001062	0,000057	0,000002	0	0	0	0
Proporción Acumulada	0,718461	0,973482	0,998879	0,999941	0,999998	1.000.000	1.000.000	1.000.000	1.000.000	1.000.000

Fuente: Cálculo de los autores.

El cuadro 2A presenta los resultados del análisis de componentes principales para cada año entre 2003 y 2006. Estos resultados permiten apreciar que para los años más recientes, 2005 y 2006, el componente principal uno, nivel, explica la mayor proporción de la varianza de la estructura a plazos de tasas de interés en el mercado colombiano. Esto soporta la elección de modelos unifactoriales de tasas de interés para ser aplicados en el mercado colombiano.

Cuadro 2A  
**Componentes principales para cada año entre 2003 y 2006**

Componentes	2003			2004			2005			2006		
	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 1	Comp 2	Comp 3
Principales por año	2.127.290	3.033.410	1.444.301	1.393.203	1.042.141	1.591.214	2.248.056	3.102.920	0.406138	2.271.242	3.059.886	0.176872
Eigenvalue	0.818188	0.116670	0.055550	0.535847	0.400823	0.061201	0.864637	0.119343	0.015621	0.873555	0.117688	0.006803
Varianza Explicada.	0.818188	0.934858	0.990408	0.535847	0.936671	0.997871	0.864637	0.983980	0.999601	0.873555	0.991242	0.998045

Fuente: Cálculo de los autores.

## **Anexo 2**

### **Curva de volatilidades de la estructura a plazos de tasas de interés en Colombia**

La curva de volatilidades de las tasas *forward* observada en los mercados más desarrollados tiende a caracterizarse por tener volatilidades crecientes en el corto y mediano plazo, luego disminuye gradualmente para las tasas en períodos más distantes. Brigo y Mercurio (2006) muestran cómo los modelos de HW y BK capturan esta característica más o menos adecuadamente. Sin embargo, la estructura de volatilidades de las tasas *forwards* discretas implícitas en las estimaciones de la estructura a plazos de tasas de interés por la Bolsa de Valores de Colombia presentan una característica totalmente contraria al hecho estilizado mencionado anteriormente para los mercados más desarrollados.<sup>26</sup> Dicha estructura de volatilidades es decreciente en el corto plazo y luego crece para las tasas en el más largo plazo. Por esta razón, dicha curva de volatilidades no es susceptible de ser utilizada para la implementación de los modelos de tipos de interés.<sup>27</sup> El gráfico 3A presenta dicha curva de volatilidades para el mercado colombiano.<sup>28</sup>

---

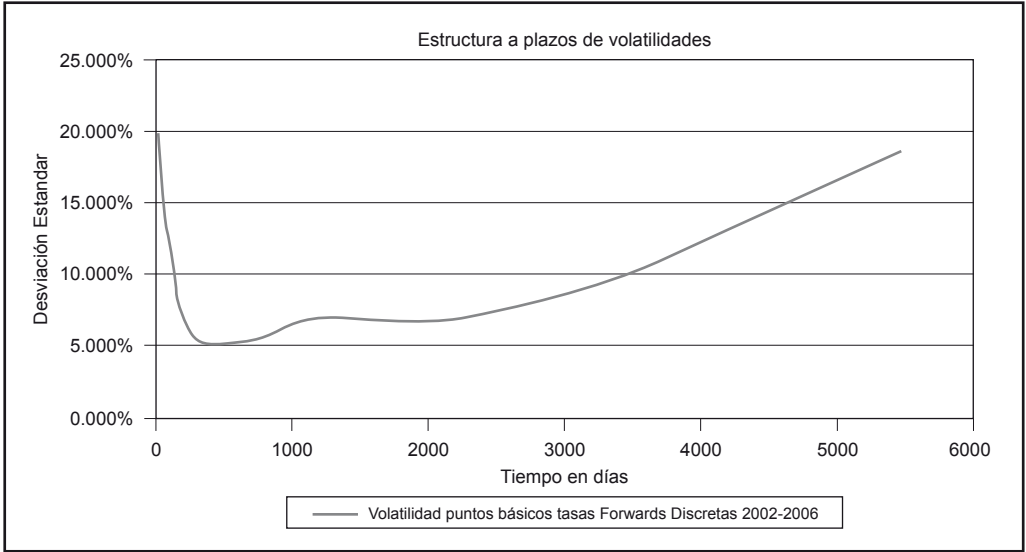
<sup>26</sup> Se trabaja con tasas *forwards* debido a que dichas tasas son la variable subyacente a los contratos Cap.

<sup>27</sup> Además, los modelos de reversión a la media implican que las tasas de largo plazo son menos volátiles que las de corto plazo. Por este motivo, el modelo de Black, Derman y Toy (1990) no se podría calibrar a partir de estas volatilidades, debido a que dicho modelo impone la reversión a la media a través de una estructura de volatilidades decrecientes.

<sup>28</sup> Estas volatilidades se calcularon como la desviación estándar del cambio proporcional de las tasas *forwards* discretas implícitas en la curva cero cupón en pesos de la BVC. Se calcularon sesenta series de tasas *forwards* a intervalos de tres meses para hacerlas comparables con las volatilidades negociadas en los Caps en los mercados internacionales, los cuales transan volatilidades de Caps con liquidaciones trimestrales a varios plazos.

Gráfico 3A

**Curva de volatilidades de las tasas *forwards* discretas implícitas en la estructura a plazos de tasas de interés construida con la metodología de Nelson y Siegel (1987) para Colombia, año 2006**



Fuente: elaboración propia.

### Anexo 3 Estimación econométrica de la volatilidad

Las pruebas de raíz unitaria para las variables según las especificaciones de los modelos se presentan en el cuadro 3A. Estas pruebas permiten concluir que las variables son estacionarias y es posible pasar a la estimación de los modelos en series de tiempo con la metodología ARIMA-GARCH.

Cuadro 3A  
**Pruebas de Raíz Unitaria para la TIB**

Pruebas de Raíz Unitaria	ADF t-statistic (p-value)	PP t-statistic (p-value)	KPSS* t-statistic (p-value)
TIB en diferencias (Modelo HW)	-36.09953 (0.0000)	-35.9994 (0.0000)	0.861331 (0.463000)
Log(TIB) en diferencias (Modelo BK)	-38.69070 (0.0000)	-39.02142 (0.0000)	0.134106 (0.146000)

\*Hipótesis Nula: Serie de las diferencias de la TIB es estacionaria

Fuente: Banco de la República. Cálculo de los autores.

Ambas variables presentan agrupamiento de volatilidad y efectos ARCH. Los modelos que presentaron el mejor ajuste fueron los EGARCH. Para el caso de la discretización del modelo de BK fue necesario incluir rezagos de las diferencias porcentuales en la ecuación de la media. Este hallazgo es similar al de Ramírez y Botero (2007). Estos modelos se presentan en el cuadro 4A.

Cuadro 4A

#### Modelos EGARCH para la diferencias y las diferencias logarítmicas de la TIB, respectivamente.

Modelo						
0.001294 (0.0009)	-0.018438 (0.0005)	-	-5.071597 (0.0001)	0.713819 (0.0000)	0.664796 (0.0145)	-
-0.036834 (0.0458)	-0.013851 (0.0491)	-0.109740 (0.0280)	-0.4918055 (0.0004)	0.6618213 (0.0000)	0.471088 (0.0001)	-0.227414 (0.0210)

Fuente: Cálculo de los autores.

Los modelos se estimaron por quasi máxima verosimilitud para hacer que las pruebas estadísticas fueran robustas ante la presencia de heterocedasticidad en los residuales (Bollerslev & Wooldridge, 1992). Los modelos del cuadro 4A cumplen con los supuestos generales y las restricciones sobre los parámetros, esto puede comprobarse con facilidad.

Para los modelos EGARCH seleccionados, las pruebas de Ljung-Box muestran que para la TIB en diferencias no existe autocorrelación en los residuales, ni en los residuales al cuadrado



para órdenes menores a diez rezagos. Para las diferencias porcentuales de la TIB no se presenta autocorrelación de ningún orden para los residuales ni para los residuales al cuadrado.

En el cuadro 4A se aprecia que el parámetro de asimetría del modelo EGARCH para las diferencias logarítmicas de la TIB es significativo al 95%. Ramírez y Botero (2007) encuentran que para las diferencias simples de la TIB dicho parámetro es significativo al 90%. Luego de hacer los cálculos, se establece que un choque negativo a la tasa de interés conlleva a una varianza que es menor en un 36,5% respecto al caso en el que el choque fuese positivo.

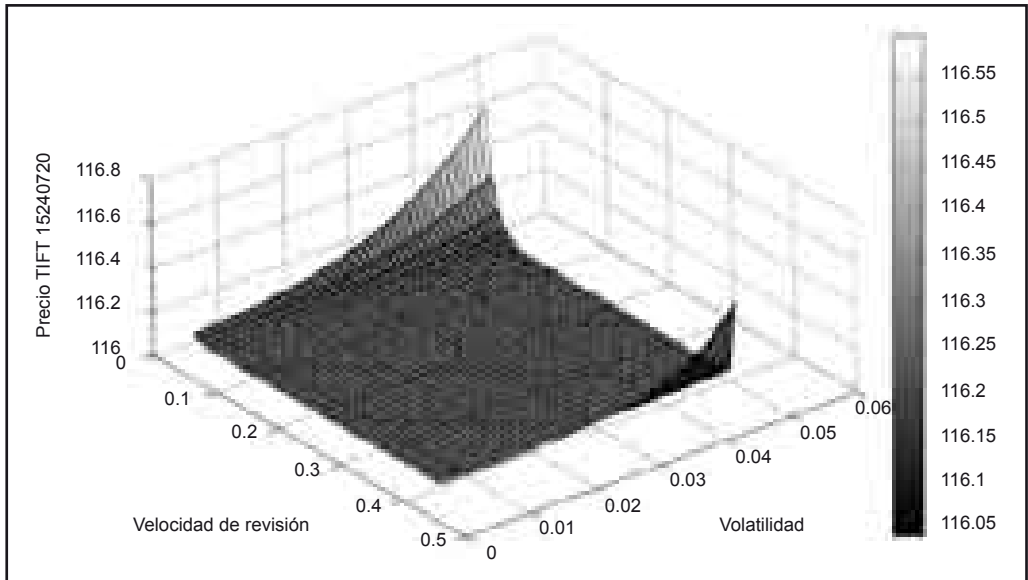
**Anexo 4**

***Sensibilidad del precio de los bonos y de las opciones sobre bonos ante cambio en la volatilidad y la velocidad de reversión utilizada en los modelos***

El gráfico 4A ilustra la sensibilidad del precio de un bono con cupones (TIFT15240720) ante cambios en los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión. La velocidad de reversión se cambia entre 0 y 0,4. La volatilidad se cambia entre 0.005 y 0.05. Los precios de los bonos no son sensibles ante el cambio de estos valores. Esto explica que la calibración se pueda realizar en dos pasos. En el primero se ajusta la estructura a plazos de tasas de interés, lo cual es independiente de los parámetros de volatilidad y velocidad de reversión; en el segundo se ajustan estos dos últimos parámetros.

Gráfico 4A

**Sensibilidad del valor de un bono (TIFT15240720) ante cambios en la velocidad de reversión a la media y la volatilidad**



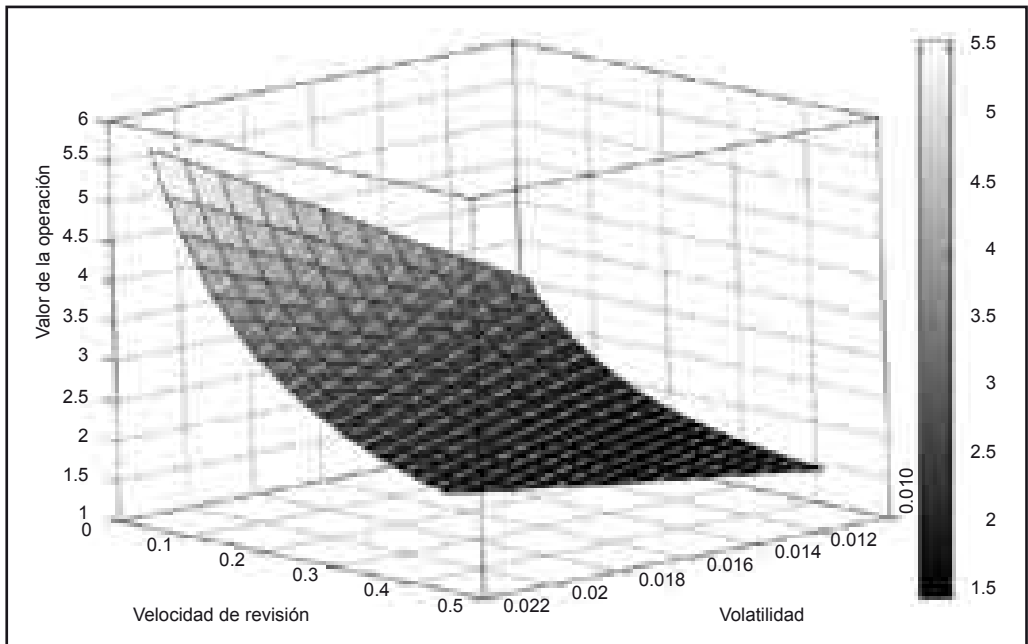
Fuente: elaboración propia.

De este análisis también se desprende que para valores muy pequeños del parámetro de velocidad de reversión a la media, el precio de los bonos se vuelve sensible al mismo. Esto nos lleva a descartar los valores encontrados para este parámetro cuando se realizó la estimación econométrica. Además, se encontró que cuando este parámetro toma valores superiores a 0,4 algunas veces los modelos no son capaces de replicar la estructura a plazos de tasas de interés

iniciales. Así, aunque no se sabe con exactitud el valor de este parámetro, el mismo debe encontrarse aproximadamente en un rango entre 0,05 y 0,4.

El gráfico 5A presenta la sensibilidad del valor de las opciones sobre bonos con cupones ante cambios en estos parámetros. Como se aprecia, a valores bajos (altos) de velocidad de reversión a la media y altos (bajos) de volatilidad corresponden valores altos (bajos) para las opciones sobre bonos.

Gráfico 5A  
**Sensibilidad del valor de la opción ante cambios en la velocidad de reversión a la media y la volatilidad**



Fuente: elaboración propia.

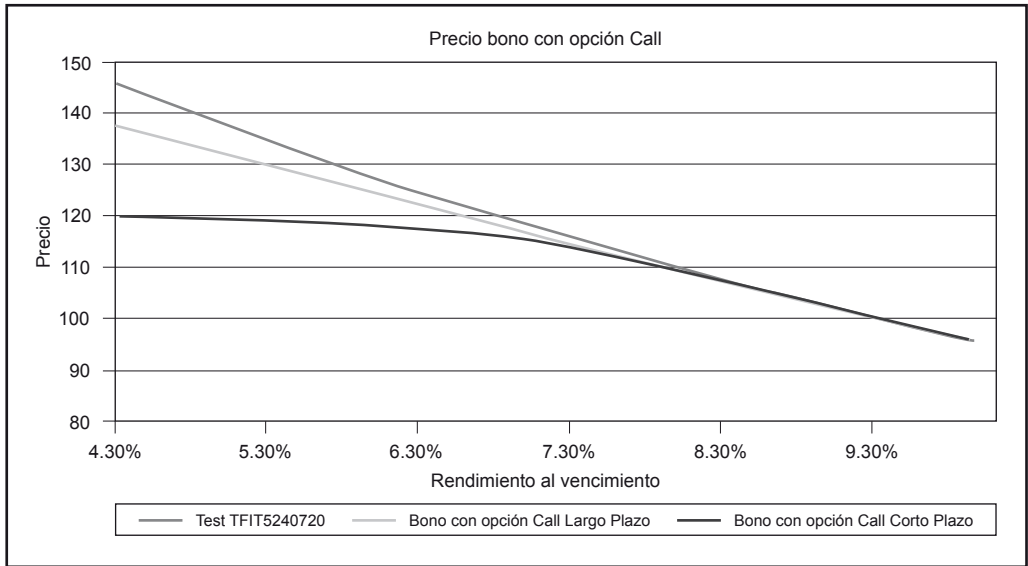
Lo anterior implica que la selección del valor del parámetro de velocidad de reversión resulta determinante en la valoración de opciones de tipos de interés. Por este motivo, deberá ponerse especial atención en el momento de decidir utilizar los modelos presentados en este trabajo para la valoración de ese tipo de derivados.

Resulta interesante cómo los bonos con opciones tienen una convexidad negativa para algunos niveles de las tasas de interés. El gráfico 6A presenta el valor del TES TIFT15240720, de un TES idéntico a este, excepto que tiene la opción de ser llamado por el emisor el 24 de enero de

2008 (Bono con opción Call CP, corto plazo) y de otro TES con la opción de ser llamado por el emisor el 24 de abril de 2015 (Bono con opción Call LP, largo plazo). El precio de ejercicio de estas opciones es 115.

Gráfica 6A

**Sensibilidad del precio de los bonos ante cambios en el rendimiento al vencimiento**



Fuente: elaboración propia.

Las opciones incorporadas de más corto plazo tienen un impacto mayor en la convexidad del bono, haciéndolo menos convexo, que las de largo plazo.