RELACIONES DE PREFERENCIA Y ELECCIÓN SOCIAL EN UNA ESTRUCTURA DIFUSA

Arcenio Pecha
Jaime Villamil

A. Pecha es profesor de Matemáticas de la Universidad Nacional, correo: apecha@uniandes.edu.co. J. Villamil es profesor de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional, correo: cjaromil@yahoo.com. Artículo recibido el 30 de enero de 2002 y aprobado por Consejo Editorial el 27 de septiembre de 2002.

Resumen

Pecha, A. y Villamil J. "Relaciones de preferencia y elección social en una estructura difusa", *Cuadernos de Economía*, v. XXI, n. 37, Bogotá, 2002, páginas #

Autores como Prasanta Pattanaik [1997] encuentran en la lógica difusa un modo de superar las restricciones de la condición de racionalidad económica neoclásica. Ellos se sirven de este instrumento matemático para hacer una reinterpretación del planteamiento de la elección social que Arrow [1951] modeló con relaciones de preferencia ajustadas a una lógica binaria.

El propósito de este trabajo es doble. Por un lado se desarrolla el planteamiento del Teorema de Imposibilidad de Arrow [1951], resaltando la importancia de la transitividad impuesta a las relaciones de preferencia como condición de racionalidad, y mostrando cómo la transitividad adquiere distintas formas cuando se incluyen relaciones de preferencia difusas. De otra parte, se examinan las reglas de agregación y las medidas del consenso propuestas por los autores que estudian la elección social dentro de una estructura difusa.

Palabras clave: *preferencia difusa, elección social, condiciones de racionalidad. JEL: B41, D71*

Abstract

Pecha, A. y Villamil J. "Preference relations and social election in a fuzzy structure", *Cuadernos de Economía*, v. XXI, n. 37, Bogotá, 2002, pages #

Authors as Prasanta Pattanaik [1997] find in the fuzzy logic a way to go beyond the restrictions of the conditions of neoclassic economic rationality. They use this mathematical tool to reinterpret the social choice proposal, which was modelled by Arrow [1951] with preference relations adjusted to binary logic.

This paper has two goals. To begin with, the Arrow's [1951] approach of the Impossibility Theorem is developed. It gives importance to the transitivity condition imposed to preference relations as a condition for rationality and shows how this condition acquires different forms when fuzzy preference relations are used. On the other hand, the rules of aggregation and consensus measure that are proposed by authors working on social choice in fuzzy framework are examined.

Key words: *fuzzy preference, social election, conditions of rationality. JEL: B41, D71*

¿Cómo podría la innovación política lograr
que los hombres fueran, una vez para siempre
habitantes satisfechos de la tierra?
F.W. Nietzsche

INTRODUCCIÓN

El *teorema de imposibilidad* de Arrow [1951], muestra que no existe una regla de elección colectiva que satisfaga simultáneamente un conjunto de propiedades lógicas y éticas que Arrow considera deseables. Dicha particularidad es conocida como la *condición de dominio restringido* que exige que las reglas de elección social tengan en cuenta las preferencias de todos los individuos; el "principio de Pareto" criterio de asignación óptima; "la condición de independencia de alternativas irrelevantes" que busca la imparcialidad de los mecanismos de elección; y la "condición de no dictadura" que no permite la existencia de individuos que impongan sus preferencias al resto de individuos de la sociedad.

Sen [1970] buscó resolver el problema de imposibilidad planteado por Arrow. Este autor sugirió reemplazar la condición de transitividad por condiciones más débiles de racionalidad como la cuasi-transitividad y la aciclicidad de las relaciones de preferencia. Las sugerencias de Sen [1982] nacen de poner en entredicho las condiciones de racionalidad económica, condiciones que no son una interpretación del mundo real y, por tanto, no son hipótesis adecuadas para estudiar los temas de elección social.

Se han buscado diversas alternativas que permitan establecer un puente lógico entre la elección individual y la colectiva. El inconveniente por superar se encuentra en que la imposibilidad de una elección colectiva se expresa en el no-cumplimiento de la condición de transitividad de la función de bienestar social. Esta ausencia de transitividad se interpreta como una limitación de la condición de racionalidad −entendida como racionalidad maximizadora−, que se hace aún más evidente cuando se pasa de exigir este tipo de racionalidad de un individuo a una colectividad.

Los resultados de imposibilidad, que se ejemplifican a través de las paradojas de votación, obligan a pensar necesariamente en la naturaleza de las preferencias individuales [Arrow 1951, 109]. Las relaciones de preferencia tanto individual como colectiva, tal como Arrow las concibió, se apoyan en la hipótesis de perfecta información. En este contexto significa que los ordenamientos que hacen los individuos son completos, es decir, que un individuo tiene que ser decisivo entre dos alternativas. No obstante, con frecuencia, las personas "no saben qué elegir", los agentes económicos no manifiestan siempre una actitud para distinguir claramente las alternativas que prefieren de las que no prefieren. Por lo tanto, el comportamiento de un agente económico no se ajusta a una lógica binaria del tipo preferir/no-preferir, sino a una lógica "difusa" [Ponsard 1987, 450]. La lógica difusa permite que un individuo pueda preferir en "cierto grado" o "aproximativamente" determinada alternativa; no necesariamente tiene que darse la total preferencia o la total ausencia de preferencia como se ha expuesto tradicionalmente desde Arrow la relación de preferencia.

Si se introduce la relación de preferencia desde la perspectiva de la lógica difusa, se relaja el supuesto de perfecta información y se abre camino para interpretar situaciones de elección en presencia de información imperfecta, en las cuales los individuos pueden ser no decisivos entre dos alternativas y preferir en cierto grado una más que otra.

Cuando por medio de la relación de preferencia difusa se introduce la vaguedad o la ambigüedad que se presenta en el acto de elegir, la idea de racionalidad maximizadora sufre severas limitaciones debido a que la racionalidad se puede entender de muchas maneras, a diferencia de lo que sucede con las relaciones de preferencia binaria, que dan lugar a una sola forma de entender la racionalidad. Desde luego, la transitividad de la relación de preferencia, que refleja la condición de racionalidad, también se debe interpretar de diversas maneras.

RELACIONES DE PREFERENCIA CON LÓGICA BINARIA Y ELECCIÓN SOCIAL

A continuación se hacen algunas precisiones de conceptos necesarios para entender la exposición de la elección social que hace Arrow en términos de relaciones de preferencia con lógica binaria, y las modificaciones que Sen hace a las condiciones de racionalidad.[1]

Sean las siguientes condiciones del modelo:

(1) El conjunto N está conformado por los n individuos de una sociedad, N={1, 2, …, n}.

(2) Los n individuos de una sociedad van a elegir sobre *estados del mundo* que son las expectativas subjetivas que se tienen acerca de unas situaciones futuras. Las elecciones respecto de *estados del mundo* introducen la incertidumbre de qué será lo que ocurrirá una vez haya elegido. El estado del mundo o estado social es un tipo de expectativa de carácter endógeno, subjetivo y más cualitativo que cuantitativo, contiene lo que la persona espera con respecto a sus planes de vida, asignación de recursos, escenarios distributivos, etc. No debe olvidarse que también los individuos deciden sobre otros asuntos, como con quién se van a casar, etc. Pero lo que aquí interesa, son los *estados del mundo* que afectan de una manera importante a todos los n individuos de la sociedad [Kreps 1995; Cante 2000].

(3) X es el conjunto de los estados del mundo concebibles. Arrow supone que los estados del mundo son disjuntos o mutuamente excluyentes [Arrow 1951, 30].[2]

(4) Para efectos de la elección, sólo interesa un subconjunto propio S de X formado por los estados del mundo alcanzables ($S \subset X$).

Sea un subconjunto R de S×S, donde R es una relación binaria:

(5) R se dice *reflexiva* si y sólo si:

$$\forall\, x \in S: x\, R\, x$$

(6) R se dice *completa* si y sólo si:

$$\forall\, x, y \in S: (x \neq y) \rightarrow (x\, R\, y \vee y\, R\, x)$$

---

[1] Ver por ejemplo los tres primeros capítulos de Sen [1970], y González [1998].

[2] Este supuesto pierde fuerza si pasamos de lógica binaria a una lógica difusa, puesto que esta última admite la presencia de valores de verdad que no son disjuntos o mutuamente excluyentes. En otras palabras, la lógica difusa admite valores de verdad distintos a verdadero o falso.

Con relaciones de preferencia que obedecen a una lógica binaria, la relación de preferencia debe ser completa para garantizar que un individuo o una colectividad sean decisivos entre dos alternativas.

(7) R se dice *no-completa* si y sólo si:

$$\exists\, x, y \in S: (x \neq y)\ \&\ \neg(x\ R\ y)\ \&\ \neg(y\ R\ x)$$

(8) R se dice *transitiva* si y sólo si:

$$\forall\, x, y, z \in S: (x\ R\ y\ \&\ y\ R\ z) \rightarrow x\ R\ z$$

(9) Una relación binaria R se dice que es un *ordenamiento* en S si R es reflexiva (5), completa (6) y transitiva (8).

(10) Un subconjunto R de S×S (R⊆S×S) representa una *relación binaria de preferencia* en S, si R es equivalente al siguiente conjunto:

$$R = \{(x, y) \in S \times S \mid \text{“x es al menos tan bueno como y”}\}$$

(11) P es una subrelación de R que se llama *factor asimétrico* de R (x P y quiere decir “x es preferido a y”) y se define:

$$x\ P\ y \leftrightarrow [x\ R\ y\ \&\ \neg(y\ R\ x)]$$

(12) I es una subrelación de R que se llama *factor simétrico* de R (x I y quiere decir “x es indiferente a y”) y se define:

$$x\ I\ y \leftrightarrow [x\ R\ y\ \&\ y\ R\ x]$$

La no-completitud (7) se define para subrayar su distinción con la indiferencia (12) y para señalar, además, que no todos los estados del mundo son comparables como quisiera Arrow [1951] cuando exige ordenamientos (9).[3] En otras palabras, si se tiene no-completitud no tiene sentido hablar de indi-

[3] “Con frecuencia, en la teoría de la elección racional se requiere que las preferencias sean completas […] con ello se quiere decir que dado un par cualquiera de opciones se debería poder expresar preferencia por una u otra y no siendo esto posible, se debería ser capaz de expresar indiferencia […] no hay argumentos fuertes que avalen esta condición. De hecho, podría decirse que resulta irracional para uno mismo comprometerse con una preferencia en particular por una de las opciones si se sabe poca cosa acerca de ambas” [Elster 1983, 19].

ferencia, porque no es posible ser indiferente entre dos estados del mundo de los cuales no se tiene la suficiente información para ser decisivo entre los dos. Mientras que si se garantiza completitud puede hablarse de preferencia o indiferencia.

Para llegar a la definición de *función de decisión social* (21), Sen [1970] define unas condiciones más débiles que la transitividad:

(13) R se dice *cuasi-transitiva* si y sólo si:

$$\forall\ x, y, z \in S: (x\ P\ y\ \&\ y\ P\ z) \rightarrow x\ P\ z$$

(14) R es *acíclica* en S si y sólo si:

$$\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_r \in S: [(x_1\ P\ x_2\ \&\ x_2\ P\ x_3\ \&, \ldots, \&\ x_{r-1}\ P\ x_r) \rightarrow x_1\ R\ x_r]$$

Si R es cuasi-transitiva (13) entonces R es acíclica (14).

De aquí en adelante R representará una relación de preferencia social. Para cada $i \in N$, R_i será la relación de preferencia para el individuo i-ésimo, que refleja su sistema de valores, es decir, sus creencias y sus deseos, o cómo el individuo valora los estados del mundo desde la perspectiva de que algo sea al menos tan bueno como otra cosa. P representará la relación fuerte de preferencia social, esto es, "x es preferido estrictamente a y", y por P_i la relación fuerte de preferencia individual.

Sen [1970] no exige que la relación de preferencia social R sea un ordenamiento (9) como lo hace Arrow. Para concebir la elección social a Sen le basta con que R sea reflexiva (5), completa (6) y cuasi-transitiva (13). Aunque la cuasi-transitividad permite pasar de la elección individual a la elección social sin necesidad de caer en la imposibilidad de Arrow, queda por ver si cambiando la transitividad por cuasi-transitividad se sigue teniendo una base satisfactoria para seguir hablando de elección racional.

(15) Se dice que x es *mejor estado del mundo* de S con respecto a R si y sólo si:

$$\forall\ y : y \in S \rightarrow x\ R\ y$$

(16) El conjunto de los mejores estados del mundo en S, C(S, R), se llama *conjunto de elección*.

(17) Una *función de elección* $\hat{C}(S, R)$ definida en X es una relación funcional tal que el conjunto de elección C(S, R) es no-vacío para cada subconjunto no-vacío S de X [Sen 1970, 30].

Para que exista la *función de elección*, según Sen, se necesita que R_i como mínimo cumpla reflexividad (5) y completitud (6). Si hay algún estado del mundo que no sea al menos tan bueno como él mismo, obviamente no puede existir función de elección. Y si R_i es no-completa, existirá por lo menos un par de elementos de S para el cual su conjunto de elección es vacío, porque sobre ese par no se hace ninguna elección o no existe un mejor estado del mundo. La completitud de la relación de preferencia social acompañada del cumplimiento de la reflexividad y de una condición más débil de racionalidad (la aciclicidad), se convierten en condición suficiente y necesaria para que exista una *regla de elección colectiva* a la que Sen llama *función de decisión social* por oposición a la *función de bienestar social* de Arrow [Sen 1970, 32].

(18) Una *regla de elección colectiva* es un funcional f tal que para cada conjunto de n ordenamientos individuales $R_1, \ldots, R_n$ (un ordenamiento para cada individuo), determina una relación de preferencia social $R= f(R_1, \ldots, R_n)$ [Sen 1970, 44].

(19) Una *regla de elección colectiva* se dice decisiva si y sólo si la relación de preferencia social R que determina f es completa.

El planteamiento de Arrow [1951] se hace en términos de una *función de bienestar social* que se define a continuación:

(20) Una *función de bienestar social* (FBS) tipo Arrow es un caso particular de una regla de elección colectiva para la cual la relación de preferencia social R determinada por f es un ordenamiento (9), $R= f(R_1, \ldots, R_n) = FBS(R_1, \ldots, R_n)$.

Sen [1970] plantea una divergencia con Arrow, y se sirve del concepto de *función de decisión social* para elaborar la elección colectiva:

(21) Una *función de decisión social* (FDS) es un caso particular de una regla de elección colectiva que exige que R sea reflexiva (5), completa (6) y cuasi-transitiva (13), $R= FDS(R_1, \ldots, R_n)$.

Cuando los n individuos de una sociedad tienen diversas preferencias sobre los estados del mundo, entran en conflicto al momento de encontrar una preferencia social que respete las preferencias individuales. La teoría de la elección social busca una regla de mayoría que elija sobre *los estados del mundo* que afectan el bienestar social de un conjunto de individuos. Arrow muestra el conflicto que se presenta entre la elección individual y la elección social cuando se trata de encontrar una *función de bienestar social.* Sen lo muestra en general, tratando de encontrar una *regla de elección colectiva* que concilie las preferencias individuales de todos los individuos de una sociedad con una decisión colectiva.

En el planteamiento de Arrow, existe un conjunto X de todos los estados del mundo concebibles (3). S un subconjunto propio de X que son los estados del mundo posibles (4) o que están al alcance de cada individuo al momento de la elección −Arrow supone que todos los individuos tienen perfecta información acerca de estos estados sociales−, y S es el conjunto de los ordenamientos (9) que se pueden hacer de estos estados del mundo alcanzables. Si en la sociedad hay n individuos, el propósito es encontrar una regla de elección colectiva tal que para cada conjunto de n ordenamientos individuales, se obtenga un ordenamiento social de los mismos (*función de bienestar social*), esto es:

$$\text{FBS: } S^n \rightarrow S.$$

Una función de bienestar social debe satisfacer las siguientes condiciones:

U (dominio no restringido): como no se conocen de antemano cuáles van a ser los ordenamientos individuales, la *función de bienestar social* debe encontrar un ordenamiento social para todas las posibles combinaciones de ordenamientos de los n individuos de la sociedad:

$$\text{Dom FBS} = S^n.$$

Esta condición "está próxima a la libertad de expresión o de elección" [Mueller 1979, 196], en la medida en que como afirma la condición 1' de Arrow, "son admisibles todos los ordenamientos lógicamente posibles de las situaciones sociales alternativas" [Arrow 1951, 206]. La condición de dominio no restringido supone que cada individuo es libre de ordenar los estados del mundo del subconjunto S en la forma que quiera, y que además dicha ordenación individual es tenida en cuenta en el proceso de elección colectiva.

P (principio débil de Pareto): si para todos los n individuos de una sociedad, el estado del mundo x es preferido al estado del mundo y, entonces la sociedad prefiere x a y. [4] En símbolos:

$$(\forall\ i : x\ P_i\ y) \rightarrow x\ P\ y$$

Esta condición significa que si a la preferencia de algún individuo i no se opone ninguna preferencia de otro individuo j, dicha preferencia se conserva en la ordenación social [Mueller 1979, cap. 10].

I (independencia de las alternativas irrelevantes): la elección entre los estados del mundo de un subconjunto propio A de S no debe depender de los estados del mundo que se encuentran en S-A (el complemento de A).

Formalmente, dados dos conjuntos de n ordenamientos individuales ($R_1, \ldots, R_n$) y ($R'_1, \ldots, R'_n$), y las respectivas funciones de elección $\hat{C}(S, R)$ y $\hat{C}(S, R')$:

$$\forall\ i \in N\ \&\ \forall\ x, y \in S\text{: } x\ R_i\ y\ \&\ x\ R_i'\ y \rightarrow \hat{C}(S, R) = \hat{C}(S, R')$$

Donde R' corresponde a una relación de preferencia bajo otro sistema de valores, y $\hat{C}(S, R')$ es la función de elección (17) sobre S de acuerdo con la relación R'.

Con esto se quiere garantizar la transparencia del proceso de elección evitando que haya lugar a votaciones estratégicas que no permitan a cada individuo revelar su verdadera preferencia mediante el voto.[5]

D (no dictadura): la *función de bienestar social* garantiza que un individuo o grupo de individuos no imponga su preferencia como elección social por encima de los demás individuos de la sociedad:

$$\neg\ \exists\ B \subset N\ (\forall\ i \in B\text{: } x\ R_i\ y \rightarrow x\ R\ y)$$

Además de las anteriores condiciones, se debe tener en cuenta que la relación de preferencia social R que encuentre la *función de bienestar social* debe ser

[4] "Debemos dar por supuesto que la función de bienestar social es tal que la ordenación social responde positivamente a las variaciones de los valores individuales, o que al menos no lo hace en sentido negativo" [Arrow 1951, 52].
[5] "Exigiremos de nuestra función de bienestar social que la elección a realizar por la sociedad en un entorno dado dependa solamente de las ordenaciones que hagan los individuos de las alternativas de ese entorno" [Arrow 1951, 54].

reflexiva (5), completa (6) y transitiva (8)[6] para que la elección sea elección racional. La completitud implica que todos los posibles estados del mundo son susceptibles de compararse entre ellos y así obtener una *función de bienestar social* que sea *regla de elección colectiva* decisiva (19). Para la transitividad se necesita que los estados del mundo sean disjuntos o mutuamente excluyentes [Arrow 1951, 30]. La importancia de la transitividad que se exige para la relación de preferencia social, reside en el hecho de asegurar la independencia del resultado final del proceso de elección respecto de la *función de bienestar social* utilizada para llegar a este, es decir, el proceso de elección no debe ser arbitrario [Arrow 1951, 206].

Sen [1970] afirma que el teorema de imposibilidad de Arrow se aplica a la *función de bienestar social* (20) pero no a la *función de decisión social* (21), debido a que la función de decisión social puede prescindir de la transitividad y ser reemplazada por una condición más débil como aciclicidad (14) y aun así tener una elección colectiva [Sen 1970, 66].

Hasta el momento, en economía del bienestar, no se ha encontrado una regla de elección colectiva que logre expresar la elección social sin infringir al menos una de las condiciones que Arrow le impone a la función de bienestar social. En las demostraciones lógicas de Arrow [1951, 96-109] y de Sen [1970, cap. 3] se llega a que no es posible que se cumplan las condiciones U, P y I junto a la condición D.[7]

LA ELECCIÓN SOCIAL CON RELACIONES DE PREFERENCIA DIFUSAS

Barrett, C.R. *et al.* [1990; 1992], Ovchinnikov [1986; 1992] y Pattanaik [1997] han desarrollado la teoría de la elección social con preferencias difusas, lo que permite hacer una distinción más clara entre indiferencia y falta de completitud. Con preferencias difusas se admite que la falta de completitud obedece a fallas en la información que se traducen en ausencia de elección.

Supóngase que los candidatos presidenciales para las elecciones del año 2002 son A, B y C. En el caso de perfecta información, entre estas alternativas, un individuo j tiene que ser decisivo −no hay lugar a que la relación de

---

[6] "La transitividad es una condición suficiente para la existencia de una función de elección en un conjunto finito, no es una condición necesaria" [Sen 1970, 31].

[7] En palabras de Stiglitz, "el teorema de imposibilidad de Arrow sugiere que, a menos que concedamos a una persona poderes dictatoriales, no podemos esperar que el gobierno actúe con el mismo grado de coherencia y racionalidad que una persona" [Stiglitz 1986, 176].

preferencia sea no-completa−, es decir, sus preferencias utilizan una lógica binaria: tiene que preferir o no-preferir. Por medio de la matriz binaria de unos y ceros donde 1 representa ser preferido y 0 no-preferido, es posible representar el conjunto de las preferencias individuales de j.

MATRIZ 1
RELACIÓN DE PREFERENCIA CON LÓGICA BINARIA

	A	**B**	**C**
A	1	0	1
B	1	1	1
C	0	0	0

El conjunto de las preferencias individuales de j es un subconjunto R de S×S que representa la *relación binaria de preferencia* con lógica binaria de j sobre el conjunto S×S, siendo S el conjunto de candidatos presidenciales para las elecciones del año 2002.

$$R_j = \{(x, y) \in S\times S \mid \text{“x es al menos tan bueno como y”}\}$$

La desventaja de las preferencias elaboradas con lógica binaria, consiste en que un individuo que manifieste su aceptación por un estado del mundo tiene que, obligadamente, manifestar una oposición por otro, como se ve en la Matriz 1, por ejemplo, si para el individuo j, A es un candidato preferido a C, C debe ser un candidato *no* preferido a A. Esta desventaja se supera si se admiten imperfecciones en la información. Como consecuencia, el individuo j podrá tener incertidumbres en sus preferencias, es decir, habrá casos en los que el individuo j no está tan seguro qué preferir, y podrá manifestar una aceptación algo mayor por una alternativa que por otra sin necesidad de trazar una división radical entre una total aceptación y un total rechazo.

Las preferencias de un individuo que no está seguro de qué preferir, se pueden modelar con relaciones de preferencia ajustadas a la lógica difusa −a estas relaciones, de ahora en adelante, se les llamará “relaciones de preferencia difusas”−. En lugar de tener dos valores para representar la relación de preferencia, se puede tomar cualquier valor comprendido en el intervalo cerrado [0, 1]; esto quiere decir que si el individuo j no está seguro de preferir B a A, se puede asumir un valor de, por ejemplo, 0.8. Este es un valor que de todas maneras sigue favoreciendo al candidato B y dicho valor puede ser mayor o menor, dependiendo de qué tan fuerte o qué tan débil es para el individuo j la relación de preferencia entre B y A. Así, una representación matricial de las preferencias de j puede estar dada por la Matriz 2.

MATRIZ 2
RELACIÓN DE PREFERENCIA CON LÓGICA DIFUSA

	A	**B**	**C**
A	1	0.2	0.6
B	0.8	1	0.3
C	0.4	0.7	1

Las preferencias de la Matriz 2 son susceptibles de modificarse por un cambio en las circunstancias de elección que afecten el sistema de valores del individuo j. Una situación semejante es posible en virtud de que la condición de completitud sobre la relación de preferencia se relaja con una lógica de más de dos valores de verdad. En un evento como el que retrata la Matriz 1, se necesita de un cambio radical para que el individuo j cambiase sus preferencias, debido a que con lógica binaria, la dicotomía preferir/no-preferir no admite situaciones intermedias donde el individuo tenga sus propias razones para no estar de acuerdo del todo con una alternativa dada.

El marco teórico que permite abordar infinitos valores de verdad para una relación de preferencia como es el caso de la Matriz 2 se conoce como lógica difusa.[8] Aquí se presentan las definiciones básicas sobre relaciones de preferencia difusas:

(a) Una función μ_R:

$$\mu_R: S\times S \rightarrow [0, 1]$$

La cual llamaremos *función característica* de R. Con los valores de esta función se forma la matriz que representa el grado de relación entre los elementos del conjunto S. En consecuencia, existe una correspondencia entre relaciones y matrices que permite un uso indistinto entre una y otra, debido a que cada relación determina una matriz, y cada matriz con elementos entre 0 y 1, representa una relación. La función característica a través de un valor numérico entre cero y uno indica en qué grado los elementos del producto cartesiano SxS satisfacen la relación de preferencia definida sobre el mismo.

(b) Una *relación de preferencia binaria difusa* es un conjunto de la forma

$$Я = \{\ [(x,y),\ \mu_{Я}(x,y)]\ \mid (x,y)\in S\times S\ \}.$$

En particular:

[8] Para profundizar sobre conjuntos difusos puede consultar a Klir y Folger [1988].

$$Я = \{ (x,y) \in S \times S \mid \text{“x es al menos tan bueno como y”} \}$$

Como en el caso de la lógica binaria, $Я_i$ para cada i=1,…,n, representa la relación binaria de preferencia difusa para el individuo i, y Я representa la relación binaria de preferencia difusa social.

Las relaciones de preferencia difusa capturan la indecisión que un individuo i tiene respecto a su preferencia sobre dos estados del mundo; si está totalmente convencido de que “x es al menos tan bueno como y”, el valor de la función característica de su *relación binaria de preferencia difusa* será de 1, pero puede existir −como de hecho sucede− motivos para que el individuo i no tenga completa certeza de que “x sea al menos tan bueno como y”, a esto se le denomina vaguedad o borrosidad, y se representa con valores en [0,1]. Por el contrario, con relaciones de preferencias que siguen una lógica binaria, xRy, en términos de la función característica, se lee $\mu_R(x,y) = 1$ si se cumple la relación y $\mu_R(x,y) = 0$ si no la cumple, y no es posible otro valor.

De otro lado, la definición de *relación binaria de preferencia difusa* pone de manifiesto una valiosa diferencia con la relación de preferencia de la elección tradicional R, ya que para que la relación binaria “al menos tan bueno como” se pueda establecer, se debe observar el valor de la función característica que toma la *relación binaria de preferencia difusa* de x a y ($\mu_Я(x,y)$) y de y a x ($\mu_Я(y,x)$) y compararlos para emitir juicios de la naturaleza “es al menos tan bueno”, “es preferido” o “es indiferente”.

(c) Я es *reflexiva* si y sólo si:

$$\forall\, x \in S: \mu_Я(x,x) = 1.$$[9]

(d) Я se dice *completa* si y sólo si:

$$\forall\, x, y \in S: \mu_Я(x,y) + \mu_Я(y,x) \geq 1$$

(e) Я se dice *no-completa* si y sólo si:

$$\exists\, x, y \in S: \mu_Я(x,y) + \mu_Я(y,x) < 1$$

[9] Las definiciones para la clasificación de las relaciones puede variar entre diferentes autores, por ejemplo la reflexividad en Bezdek *et al.* [1978] está dada por la propiedad $\forall\, x \in S$, $\mu_Я(x,x)=0$.

Con esta definición de no-completitud se aclara la distinción hecha cuando se hacía referencia a la no-completitud (7) de la FBS de Arrow. De la elección tradicional, se decía que había que distinguir entre indiferencia e incompletitud. La indiferencia explicita una elección en la que al individuo le es indiferente una u otra alternativa. La falta de completitud o no-completitud, en cambio, explicita ausencia de decisión.

La interpretación de la condición de transitividad con lógica difusa, que más se acerca a la de la teoría de la elección con lógica binaria, es la *max-min transitividad* [Barrett *et al.* 1990; 1992], que se define:

(f) Я se dice *max-min transitiva* si y sólo si:

$$\forall\ x, y, z \in S: \mu_{Я}(x,z) \geq \min[\mu_{Я}(x,y), \mu_{Я}(y,z)]$$

Las definiciones anteriores extienden las nociones de reflexividad, completitud y transitividad en relaciones clásicas. Otras condiciones de transitividad que ofrece la literatura son:

(g) Я se dice *max-producto transitiva* si y sólo si:

$$\forall\ x, y, z \in S: \mu_{Я}(x,z) \geq \mu_{Я}(x,y) \times \mu_{Я}(y,z)$$

(h) Я se dice *max-min transitiva restringida* si y sólo si:

$$\forall\ x, y, z \in S: \mu_{Я}(x,y) \geq \mu_{Я}(y,x)\ \&\ \mu_{Я}(y,z) \geq \mu_{Я}(z,y) \rightarrow \mu_{Я}(x,z) \geq \mu_{Я}(x,y) \vee \mu_{Я}(x,z) \geq \mu_{Я}(y,z)$$

(i) Я se dice *transitiva aditiva* si y sólo si:

$$\forall\ x, y, z \in S: \mu_{Я}(x,y) \geq 0.5\ \&\ \mu_{Я}(y,z) \geq 0.5 \rightarrow [\mu_{Я}(x,y) - 0.5] + [\mu_{Я}(y,z) - 0.5] \leq \mu_{Я}(x,z) - 0.5$$

Cuando se estudian relaciones de preferencia difusas (b), la transitividad tiene varias formas de concebirse, lo que a su vez hace que también se tengan varias *funciones de elección* individuales y *reglas de elección* colectivas debido a que la racionalidad debe mirarse de acuerdo con la naturaleza del caso específico de elección que se afronte. Los individuos pueden elegir de diversas maneras en una misma situación de elección sin que una manera de elegir sea más o menos racional que otra.[10]

[10] "The choice of transitivity conditions to be assumed for individual and also social preferences is an important issue in any discussion of aggregation of individual prefer-

Las distintas condiciones de transitividad que surgen en un marco teórico de elección con preferencias difusas, responden al hecho de que las circunstancias afectan de manera muy sensible las valoraciones de los individuos cuando van a elegir. Permitiendo la existencia de relaciones de preferencia no-completas y elecciones individuales no óptimas en el sentido de la racionalidad de la lógica binaria, ya que aun cuando las relaciones de preferencia sean difusas −cuando la información es incompleta, vaga o ambigua− el conjunto de elección es un conjunto de alternativas exactas y el acto mismo de elegir es exacto [Barrett *et al.* 1990].

Las condiciones débiles de racionalidad, la cuasi-transitividad (13) y aciclicidad (14), que son sugeridas por Sen [1970] para posibilitar una función de elección social sin tener que exigir transitividad para la relación de preferencia social son interpretadas en términos de relaciones de preferencia difusas, quedando definidas de la siguiente manera:

(j) Я se dice *cuasi-transitiva* si y sólo si:

$$\forall\ x, y, z \in S: \mu_{Я}(x,y) > \mu_{Я}(y,x)\ \&\ \mu_{Я}(y,z) > \mu_{Я}(z,y) \rightarrow \mu_{Я}(x,z) > \mu_{Я}(z,x)$$

(k) Я es *acíclica* si y sólo si:

$$\forall\ x, x_1, x_2, \ldots, x_r \in S: \mu_{Я}(x_1,x_2) > \mu_{Я}(x_2,x_1)\ \&\ ,\ldots,\ \&\ \mu_{Я}(x_{r-1},x_r) > \mu_{Я}(x_r,x_{r-1}) \rightarrow \mu_{Я}(x,x_r) \geq \mu_{Я}(x_r,x)$$

(l) Definimos P como una subrelación de Я que llamaremos *factor asimétrico* de Я que también se conoce como *relación de preferencia estricta difusa*. Diremos que x P y ("x es preferido a y") si y sólo si $\mu_{Я}(x,y) > \mu_{Я}(y,x)$.

(m) Definimos I como una subrelación de Я a la que llamaremos *factor simétrico* de Я. Aquí, x I y ("x es indiferente a y") si y sólo si $\mu_{Я}(x,y) = \mu_{Я}(y,x)$.

Con una *relación binaria de preferencia difusa* además de poder hablar de indiferencia en el sentido de la elección tradicional (12), se puede precisar un grado de indiferencia. Un individuo i es indiferente entre dos alternativas si se cumple que $\mu_{Я_i}(x,y) = \mu_{Я_i}(y,x)$ y si estas funciones características toman valo-

ences into social preferences. The problem is particularly difficult, when one operates in the fuzzy framework, one has many transitivity conditions to consider, none of which has any obvious intuitive superiority over the rest. Therefore, instead of confining ourselves to any single transitivity condition, we investigate the implications of a variety of such conditions" [Barrett *et al.* 1992, 10].

res en el intervalo [0.5, 1], pues si se tomarán valores por debajo de 0.5 existiría un caso de incompletitud, mas no de indiferencia. Luego puede decirse que un individuo i es indiferente entre x, y (x I_i y) en 0.6 si $\mu_{Я i}(x,y)=\mu_{Я i}(y,x)=0.6$, o es indiferente entre x', y' (x' I_i y') en 0.9 si $\mu_{Я i}(x',y')=\mu_{Я i}(y',x')=0.9$. En consecuencia se puede afirmar que según la relación Я para el individuo i x', y' son mejores que x, y.

(n) Я se dice que es un *ordenamiento difuso* en S si Я es reflexiva (c), completa (d) y es transitiva con cualquiera de las definiciones de transitividad que ofrece la literatura −por ejemplo, max-min transitiva, max-producto transitiva, transitiva aditiva, etc. Cada una de estas proporciona un ordenamiento difuso distinto−.

Con las distintas definiciones de transitividad, se proporcionan mayores grados de libertad para proponer reglas de elección colectiva −aquí se llaman *reglas de agregación difusa*− que no se encuentren atadas a la única posible interpretación de racionalidad que es capaz de ofrecer la lógica binaria; o de otro modo, se pueden dar circunstancias de elección en las cuales la proposición de imposibilidad de Arrow pierda su calidad de teorema.

Barrett *et al.* [1992] formulan en términos de relaciones de preferencia estrictas difusas P dos de las condiciones que Arrow exige para la *función de bienestar social* (20), además, para estos autores estas dos condiciones son suficientes para garantizar una regla de elección colectiva. Estas condiciones se exponen a continuación:

(o) F es el conjunto de todas las relaciones de preferencia estrictas difusas sobre S.

(p) La *regla de agregación difusa* es un funcional g tal que para cada conjunto de n *relaciones de preferencia estricta difusas* individuales (P_1, …, P_n) determina una *relación de preferencia estricta difusa social* y se escribe $P= g(P_1, \ldots, P_n)$:

$$g: G^n \rightarrow F \text{ donde } \emptyset \neq G \subset F$$

Aquí, G es un subconjunto propio de F porque sólo se tienen en cuenta *las relaciones de preferencia estricta difusas* individuales que se consideran admisibles. Una regla de agregación difusa, según Barrett *et al.* [1992], debe satisfacer las siguientes condiciones:

Condición P* (Unanimidad):

$\forall$ x, y $\in$S & $\forall$ $(P_1,\ldots,P_n)\in G^n$, $\exists$ i, j $\in$N: $\mu_{P_i}(x,y)\geq\mu_P(x,y)$ & $\mu_P(x,y)\geq\mu_{P_j}(x,y)$

Análogamente a la condición P de la elección con preferencias que obedecen a la lógica binaria, la condición de unanimidad especifica que para todo conjunto de n preferencias individuales, si a la preferencia de algún individuo i no se opone una preferencia de otro individuo j para cualquier x, y −que pertenecen al conjunto de estados del mundo alcanzables S−, dicha preferencia se conserva en el ordenamiento social.

Condición I* (Independencia de alternativas irrelevantes):

$\forall$ x, y $\in$S & $\forall$ $(P_1,\ldots,P_n)$, $(P'_1,\ldots,P'_n)\in G^n$ & $\forall$ i $\in$N: $\mu_{P_i}(x,y) = \mu_{P'_i}(x,y)$ & $\mu_{P_i}(y,x) = \mu_{P'_i}(y,x) \rightarrow \mu_P(x,y) = \mu_{P'}(x,y)$ & $\mu_P(y,x) = \mu_{P'}(y,x)$

Dados dos estados del mundo x, y (que pertenecen al conjunto de estados del mundo alcanzables) y dos conjuntos de n *relaciones de preferencia estricta difusas* individuales admisibles (cada uno bajo sistemas de valoración distintos, representados aquí como P'_i y P_i). Si para todo individuo de la sociedad x es preferido a y de ambas maneras, entonces el resultado social que se tenga de los dos estados del mundo para cualquiera de los dos conjuntos de *relaciones de preferencia estricta difusas* será el mismo.

Una *regla de agregación difusa* debe satisfacer las condiciones P* e I*, y además, debe garantizar que el proceso de elección no quede indeterminado. Un proceso de elección puede quedar indeterminado, debido a que el grado de incertidumbre en las preferencias sea tan alto −es decir, que exista presencia de una marcada incompletitud (e) de las preferencias− que no haya elección alguna. O porque, por todas las alternativas disponibles se presente el mismo grado de preferencia, y entonces no haya solución como resultado de la presencia de indiferencia (m). Pero como lo que interesa es obtener algún resultado de un proceso de elección, la pregunta que queda por resolver, es la de si dichas elecciones satisfacen alguna de las condiciones mínimas de racionalidad que están implícitas en las diversas expresiones de la transitividad. De otro lado, debe decirse cuál es el grado de aceptación que dentro de una colectividad tiene la alternativa resultante de un proceso de elección social.

Para explorar el anterior interrogante, a partir de la matriz que muestra la relación de preferencia, un individuo puede elegir cualquiera de las nueve reglas de elección propuestas por Barrett *et al.* [1990]; estas formas de elegir, llamadas *funciones de elección basadas en preferencia*, generan un resultado de elección con una racionalidad particular a la situación de elección que se está afrontando [Prieto y Villamil 2000].

También es posible −y quizás lo más importante−, dada una preferencia difusa, examinar con una medida adecuadamente definida sobre la matriz que le corresponde a dicha preferencia, qué tanto grado de incertidumbre posee la relación de preferencia de un individuo o una colectividad. Bezdek *et al.* [1978] sugieren la construcción de medidas escalares sobre estas matrices que son de vital importancia, sobre todo, cuando se quiere juzgar el resultado de elección que proporciona una *regla de agregación difusa* (p).

Por alguna *regla de agregación difusa* (p) se llevan las matrices de preferencias individuales a una matriz de preferencia social. Algunos autores se han preocupado porque dicha matriz de preferencia social, se ajuste a cualquier tipo de transitividad como garantía de que ésta ofrezca una valiosa lectura de la información que se refleja en las preferencias de los individuos de la sociedad. Tanino [1984] ha sugerido dos *reglas de agregación difusa*; una de ellas, es el promedio aritmético de las preferencias individuales que garantiza el cumplimiento de la transitividad aditiva (i) para la matriz de preferencia social a condición de que todas las matrices de preferencias individuales cumplan también con la transitividad aditiva.

Bezdek [1978] deja a un lado el problema de la agregación y se ocupa de definir medidas cuyo resultado sea un número que haga referencia al grado de consenso existente en una matriz de preferencia social. Este autor define dos medidas; una que revela el grado de incertidumbre debido a la incompletitud de la información −que él llama *promedio de borrosidad* y que lo nota F(**Я**), donde **Я** es la matriz de preferencia social−, y otra medida, que revela el grado de certeza de una matriz de preferencia social −llamada *promedio de certidumbre* C(**Я**)−.

Las anteriores medidas Bezdek no las define sobre una matriz de preferencia usual, sino que define un espacio particular y unos subespacios de este donde las medidas C y F tienen sentido.

(q) Sea V_{m} el conjunto de todas las matrices cuadradas (o relaciones) de tamaño m (m es el número de alternativas o estados del mundo alcanzables) y **Я** una relación (o matriz) de preferencias difusas individuales, con la restricción de que los valores de las funciones características para las relaciones de preferencia sigan el comportamiento de una relación dual, que en símbolos se expresa de la siguiente manera:

$$\forall\ x, y \in S: \mu_{Я}(x,y) + \mu_{Я}(y,x) = 1.$$[11]

[11] Obsérvese que este es un caso particular de la definición de completitud (d).

Se llama *espacio de consenso difuso* M_m al conjunto de todas las relaciones de preferencia (o matrices con elementos entre 0 y 1) duales tales que:

$$M_m = \{ \boldsymbol{Я} \in V_m : 0 \leq \mu_Я (x,y) \leq 1 \ \forall x,y ; \mu_Я (x,x)=0 \ \forall x ; \mu_Я (x,y) = 1-\mu_Я (y,x) \ \forall x\neq y \}$$

Se llama *espacio de consenso exacto* M_2 al conjunto de todas las relaciones de preferencia que obedecen a una lógica binaria tales que:

$$M_2 = \{ \mathbf{R} \in V_m : \forall x,y \ \mu_R (x,y) \in \{0, 1\} \}$$

Un *espacio de consenso exacto* M_2 es un subconjunto propio de M_m ($M_2 \subset M_m$) debido a que se refiere a las matrices de preferencia que obedecen a una lógica binaria y que son un caso particular de las preferencias difusas.

Dentro del *espacio de consenso difuso* Bezdek ubica dos posibles casos generales de consenso:

El ***consenso tipo 1*** se presenta para matrices de preferencia que pertenezcan al siguiente conjunto:

$$M_1^* = \{ \boldsymbol{Я} \in M_m : \exists \text{ k tal que } \mu_Я (x,k) \approx 0 \ \forall x ; \mu_Я (x,y) = 0.5 \ \forall x\neq y \ \& \ y\neq k \}$$[12]

La matriz M_1^* especifica situaciones en las que de las m alternativas disponibles hay una alternativa k tal que es visiblemente preferida a las restantes alternativas, y las m alternativas sin incluir la k-ésima son indiferentes entre sí.

La matriz M_1^* se caracteriza porque los elementos de la k-ésima fila son uno o muy próximos a uno exceptuando el elemento kk que por pertenecer a la diagonal, como todos los elementos de la diagonal, toma el valor de cero. Los elementos de la k-ésima columna son cero o muy próximos a cero y los elementos restantes son 0.5.

El ***consenso tipo f*** se presenta para matrices de preferencia que pertenezcan al siguiente conjunto:

$$M_f^* = \{ \boldsymbol{Я} \in M_m : \exists \text{ k tal que } \mu_Я (x,k) \approx 0 \ \forall x ; 0 \leq \mu_Я (x,y) \leq 1 \ \forall x\neq y \ \& \ y\neq k \}$$

[12] $\mu_Я (x,k) \approx 0$ significa que $\mu_Я (x,k)$ es un valor cercano a cero.

La matriz M_f* especifica situaciones en las que de las m alternativas disponibles hay una alternativa k tal que es visiblemente preferida a las restantes alternativas, y entre las alternativas restantes se puede tomar cualquier valor entre cero y uno respetando la definición de relación dual.

La matriz M_f* se caracteriza porque los elementos de la k-ésima fila son uno o muy próximos a uno exceptuando el elemento kk que por pertenecer a la diagonal, como todos los elementos de la diagonal, toma el valor de cero. Los elementos de la k-ésima columna son cero o muy próximos a cero y los elementos restantes toman cualquier valor entre cero y uno con la condición de que $\mu_{Я}$ (x,y) + $\mu_{Я}$ (y,x) = 1 para todo par de alternativas distintas.

Dentro del *espacio de consenso exacto* Bezdek ubica un caso general de consenso:

El ***consenso tipo 2*** se presenta para matrices de preferencia que pertenezcan al siguiente conjunto:

$$M_2^* = \{\mathbf{R} \in M_2 : \exists \text{ k tal que } \mu_R \text{ (x,k)=0 } \forall \text{x} \}$$

La matriz M_2* especifica situaciones en las que de las m alternativas disponibles hay una alternativa k tal que bajo lógica binaria es preferida a las restantes alternativas, y entre esas alternativas restantes se da una relación de preferencia que obedece a lógica binaria, a saber, que si μ_R (x,y)=0 entonces μ_R (y,x)=1 para todo par de alternativas distintas. Nótese que en el conjunto de las matrices M_2, no es posible representar la situación de indiferencia con un valor numérico.

La matriz M_2* se caracteriza porque los elementos de la k-ésima fila son todos uno a excepción del elemento kk que por pertenecer a la diagonal, como todos los elementos de la diagonal, toma el valor de cero. Los elementos de la k-ésima columna son todos cero y los elementos restantes toman valores en {0, 1} sabiendo que para todo par de alternativas distintas si μ_R (x,y)=0 entonces μ_R (y,x)=1.

La matriz de preferencia social obtenida de aplicar una *regla de agregación difusa* se puede llevar a cualquiera de los tres escenarios de consenso (tipo 1, tipo f y tipo2) y a través de las medidas que Bezdek define sobre M_m se puede saber qué tan aceptada es por la sociedad una alternativa o un estado del mundo.

(r) una medida escalar que toma cualquier valor entre cero y uno con el cual se representa el grado de incertidumbre que hay en una matriz de preferencia social, se llama *promedio de borrosidad* y se define así:

$$F(\boldsymbol{Я}) = \frac{2tr(\boldsymbol{\beta})}{m(m-1)}$$

Donde $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{ЯЯ} = \boldsymbol{Я}^2$,es decir, $\boldsymbol{\beta}$ es igual a la matriz de preferencia social multiplicada por ella misma y m es el tamaño de la matriz de preferencia social que es igual al número de alternativas o estados del mundo sobre el que se está eligiendo. Recuérdese que **tr** significa la traza de una matriz y que ésta es igual a la suma de los elementos de la diagonal.[13]

(s) una medida escalar que toma cualquier valor entre cero y uno con el cual se representa el grado de certeza que hay en una matriz de preferencia social, se llama *promedio de certeza* y se define así:

$$C(\boldsymbol{Я}) = \frac{2tr(\boldsymbol{\Sigma})}{m(m-1)}$$

donde $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{ЯЯ}^T$; es decir, $\boldsymbol{\Sigma}$ es igual a la matriz de preferencia social multiplicada por su transpuesta.

Estas medidas tienen unas propiedades interesantes:

i) $F(\boldsymbol{Я})+C(\boldsymbol{Я})=1$, para consensos del tipo f y del tipo 1. $F(\mathbf{R}) \to 0.5$ significa que hay dos o más alternativas por las cuales se revela la misma preferencia, es decir, es probable la existencia de empates.

ii) $F(\mathbf{R})=0 \to C(\boldsymbol{Я})=1$ sucede en espacios de consenso exacto, particularmente en consensos de tipo 2.

iii) $F(\boldsymbol{Я})=C(\boldsymbol{Я})=0.5$ sucede en un espacio de consenso difuso y señala que todas las alternativas o estados del mundo son indiferentes entre sí. La matriz para la cual esto sucede se caracteriza porque todos los elementos por fuera de la diagonal toman el valor de 0.5 y los elementos de la diagonal valen cero.

[13] Esta es una medida de dispersión de la diagonal.

CONCLUSIONES

1. La incursión de las preferencias difusas en el estudio de la elección social acepta la ambigüedad y la falta de información expresada en la definición de no-completitud.

2. Al incorporar la teoría de conjuntos difusos a la estructura axiomática de la elección social se abren muchas formas de concebir la condición de transitividad, de las cuales la que más se acerca a la transitividad en lógica clásica es la max-min transitividad que cumple con todos los requisitos para garantizar una elección racional en sentido clásico.

3. La existencia de diversas condiciones de transitividad dan a entender diversos tipos de racionalidad distinta a la maximizadora cuando se tiene que elegir, porque con relaciones de preferencia difusa se admite que la elección es incierta más que exacta. No obstante, en la mayoría de ocasiones un individuo o una sociedad se ven obligados a decidirse por un estado del mundo, y una vez tomada la decisión es posible que no sea óptima. De tal suerte que la racionalidad maximizadora se garantiza únicamente con la hipótesis de perfecta información.

4. La manera de encontrar una regla de elección colectiva, gana mayores grados de libertad si se pasa de preferencias con lógica binaria a preferencias con lógica difusa, puesto que ya no es relevante preocuparse porque la preferencia social sea un ordenamiento al igual que las preferencias individuales, sino que una regla de agregación difusa puede originar una matriz de preferencia social que sea transitiva en cualquier sentido de los que expone la lógica difusa, y las matrices de preferencia individuales también pueden ser transitivas en cualquiera de estos sentidos, y esto puede suceder de muchas maneras. El camino queda abierto para la búsqueda de reglas de agregación difusa que no sean tan restrictivas como las reglas de elección colectiva que se dan con lógica binaria.

5. En una matriz que refleje las preferencias de la sociedad no solamente se puede mirar cual es la alternativa que es preferida, sino que, utilizando las medidas de Bezdek *et al.* [1978], se puede establecer el grado del consenso, o cómo la elección de una alternativa es aceptada en una colectividad. De este modo, las matrices resultantes de diversas reglas de elección colectiva pueden ser comparadas para elegir una alternativa de acuerdo con el grado de consenso. Las comparaciones que se pueden hacer entre matrices de preferencia social a través de las medidas $F(\boldsymbol{Я})$ y $C(\boldsymbol{Я})$, son especialmente útiles para resolver situaciones de empate.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, Kenneth J. 1951. *Elección Social y Valores Individuales*. Editorial Planeta-Agostini, España, 1994.

Barrett, C.R. Pattanaik, P.K. y Salles, M. 1990. "On Choosing Rationally When Preferences are Fuzzy", *Fuzzy Sets and Systems* 34, 197-212.

Barrett, C.R. Pattanaik, P.K. y Salles, M. 1992. "Rationality and Aggregation of Preferences in an Ordinally Fuzzy Framework", *Fuzzy Sets and Systems* 49, 9-13.

Bezdek, J.C., Spillman, B. y Spillman, R. 1978. "A fuzzy relation space for group decision theory", *Fuzzy Sets And Systems* 1, 255-268.

Cante, Freddy. 2000. *Derechos individuales e interacción estratégica*. Mimeo, Universidad Nacional de Colombia.

Elster, Jon. 1983. *Uvas Amargas. Sobre la subversión de la racionalidad*. Ediciones Península, Barcelona, 1988.

González, Jorge Iván. 1998. *Notas incompletas sobre elección social y elección colectiva*. Mimeo, Universidad Nacional de Colombia.

Kacprzyk, J. Nurmi, H. y Fredizzi, M. Editores. 1997. *Consensus under Fuzziness*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Klir, George y Folger, Tina. 1988. *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Prentice-Hall International, Inc.

Kreps, D. 1995. *Curso de Teoría Microeconómica*. Editorial McGraw-Hill.

Mueller, Dennis C. 1979. *Elección Pública*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

Ovchinnikov, Sergei. 1986. "On The Transitivity Property", *Fuzzy Sets and Systems* 20, 241-243.

Ovchinnikov, Sergei. 1992. "On Fuzzy Strict Preference, Indifference, and Incomparability Relations", *Fuzzy Sets and Systems* 47, 313-318.

Pattanaik, P.K. 1997. "Fuzziness and The Normative Theory of Social Choice", en Kacprzyk, J. *et al.* [1997, 17-26].

Ponsard, Claude. 1987. "Fuzzy Sets", en *The New Palgrave*. Vol II. Editado por J. Eatwell, M. Milgate y P. Newman, 449-452, Macmilan.

Prieto, A. y Villamil, J. 2000. *La transitividad en la elección social desde la teoría de los conjuntos difusos*. Monografía, Universidad Nacional de Colombia.

Sen, Amartya K. 1970. *Elección Colectiva y Bienestar Social.* Alianza Editorial, Madrid, 1976.

Sen, Amartya K. 1982. *Tontos Racionales: Una crítica de los fundamentos conductistas de la Teoría Económica. Filosofía y Teoría Económica.*, FCE, Frank Hahn y Martin Hollis, compiladores. México, 1986.

Stiglitz, Joseph E. 1986. *La economía del Sector Público.* Antoni Bosch editor Barcelona 1988.

Tanino, T. 1984. "Fuzzy Preference Orderings In Group Decision Making", *Fuzzy Sets and Systems* 12, 117-131.