KOOPMANS: ESTRUCTURA MODULAR Y ESTRATEGIAS GANADORAS EN TEORÍA ECONÓMICA

Boris Salazar y Andrés Cendales*

Resumen

Salazar, Boris y Cendales, Andrés. "Koopmans: estructura modular y estrategias ganadoras en la teoría económica", Cuadernos de Economía, v. XXVI, n. 46, Bogotá, 2007, páginas 1-27

Siguiendo una idea original de Koopmans, sugerimos que la eficiencia científica y el rápido desarrollo del programa neoclásico de investigación pueden explicarse por la estructura modular que han usado sus creadores y practicantes en forma espontánea. La idea fundamental es simple: la combinación de módulos básicos pertenecientes al núcleo duro del programa genera nuevos modelos que pueden servir, a su vez, para construir otros modelos. Demostramos que la secuencia de modelos de la economía teórica sigue un orden parcial que crece en complejidad y realismo a medida que se aleja de los módulos más simples que los preceden, y sin los cuales no habría podido construirse. Programas rivales de investigación no fueron competidores efectivos, entre otros factores, porque no contaron con una estructura modular.

Palabras clave:estructura modular, programa neoclásico, modelo, eficiencia.
JEL: B13, B41.

* Profesor titular, Departamento de Economía, Universidad del Valle, (Cali, Colombia), y profesor, Departamento de Economía, Pontificia Universidad Javeriana, (Cali, Colombia), respectivamente. Una primera versión de este documento fue presentada en el I Congreso Iberoamericano de Microeconomía y III Simposio Nacional de Microeconomía, Bogotá, agosto de 2005, organizado por la Universidad Nacional de Colombia y la Universidad Externado de Colombia. Este artículo fue recibido el 14 de octubre de 2005 y su publicación aprobada el 14 de noviembre de 2006.

Abstract

Salazar, Boris et Cendales, Andrés. "Koopmans: modular structure and winning strategies in economic theory,"Cuadernos de Economía, v. XXVI, n. 46, Bogotá, 2007, pages 1-27

Taking up an original idea by Koopmans, we suggest that scientific efficiency and the rapid development of the neoclassical research programme may be explained by a modular structure which its creators have been spontaneously using and practising. The fundamental idea is simple; combining basic modules belonging to the programme's hard nucleus produces new models which might be useful (in turn) for constructing other models. We show that the sequence of models of theoretical economics follows a partial order growing in complexity and realism, in the sense that it moves away from the simpler modules than those preceding them, but without which it could not have been constructed. Rival investigation programmes were not effective competitors as they did not have a modular structure.

Key words:modular structure, neoclassic programme, model, efficiency. **JEL:** B13, B41.

Résumé

Salazar, Boris et Cendales, Andrés. "Koopmans : structure modulaire et stratégies gagnantes dans la théorie économique ", Cuadernos de Economía, v. XXVI, n. 46, Bogotá, 2007, pages 1-27

D'aprés une idée originale de KOOPMANS, nous suggérons que l'efficience scientifique et le développement rapide du programme néoclassique de recherche peuvent être expliqués par la structure modulaire utilisée par leurs créateurs et leurs pratiquants d'une façon spontanée. L'idée fondamentale est simple : la combinaison des modules de base qui appartiennent au noyau dur du programme produit de nouveaux modĺes qui peuvent à leur tour servir à la construction d'autres modéles. Nous avons démontré que la séquence de modéles de l'économie théorique suit un ordre partiel dont la complexité et le réalisme s´accroissent à mesure qu'elle s'éloigne des modules précédents plus simples mais sans lesquels elle n'aurait pu se construire. Des programmes rivaux de recherche n'ont pas été de réels concurrents, car ils n'ont pas eu une structure modulaire, entre autres facteurs.

Mots clés: structure modulaire, programme néoclassique, modéle, efficience. **JEL:** B13, B41.

INTRODUCCIÓN

En su manifiesto metodológico Tjlling Koopmans (1976, 142 ss.) estableció que la teoría económica matemática se caracterizaba por ser una secuencia de modelos y por ser eficiente en términos científicos. Las interpretaciones que siguieron a su publicación no han reparado, hasta ahora, en una propiedad decisiva de su propuesta: el carácter modular de la secuencia de modelos que constituiría a la teoría económica matemática. ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que la teoría económica tiene una carácter modular? Que los nuevos modelos, que avanzan por un camino de complejidad y realismo crecientes, son el producto de combinaciones entre módulos básicos ya existentes. Tal como ocurre en el juego del Lego, los nuevos objetos que salen de las manos del jugador son el producto de combinaciones de objetos (módulos) pertenecientes al conjunto de módulos básicos del juego. La clave está en que para jugar el juego de agregar nuevos modelos a la teoría económica no se requiere inventar todas las piezas de nuevo. Las piezas básicas ya están allí. Lo que deben aprender los jugadores es el conjunto de reglas que les permiten transformar objetos individuales en nuevas combinaciones legítimas que se agregarán a la secuencia de modelos que constituye el núcleo de la teoría. No todos los jugadores jugarán el juego de la misma forma y con la misma habilidad. Un buen jugador aprenderá a usar un núcleo cada vez más amplio de objetos ya construidos. Será capaz de ampliar la heurística fundamental hasta alcanzar nuevas formas de construir objetos que no estaban disponibles en la gramática inicial que todos conocen. Este tipo de aplicación ya había sido utilizada por Stuart Kauffman (2003) para caracterizar la estructura de una economía. Creemos, sin embargo, que esta es la primera vez que se utiliza para dar cuenta del progreso de la teoría económica contemporánea.

Cuando Koopmans, hace ya cinco décadas, preguntó ¿qué modelos siguen?, su respuesta fue, al mismo tiempo, una apuesta acerca del futuro de la teoría económica, y una implicación necesaria, derivada de su idea de ver la teoría económica como una secuencia de modelos. Si la teoría estaba conformada por una secuencia de modelos, lo más natural era preguntar cuáles serían los próximos. Si el investigador, además, sabía o intuía, cuál había sido el orden de la secuencia presente y cómo se había formado, le sería mucho más fácil intentar una especulación educada o, en el mejor de los casos, proceder a realizar un proceso inductivo para predecir, en forma tentativa, qué modelos podrían seguir. Pero, ¿cómo podría detectar un investigador la secuencia de modelos de la teoría económica? Suponiendo la existencia de un conjunto de módulos básicos cuya combinación -según cierto conjunto de reglas- permitió la creación de nuevos modelos que engrosaron la secuencia ya iniciada. Sobre el grafo de los modelos existentes, el investigador puede marchar hacia atrás para encontrar el camino recorrido -en términos de módulos, de reglas gramaticales y de heurística- desde los módulos más elementales hasta los más complejos de hoy. De igual forma, para marchar hacia adelante debe recorrer alguna trayectoria compuesta de módulos ya existentes hasta agregar un nuevo modelo al núcleo de la teoría. Habrá muchas trayectorias disponibles, por supuesto. Si un investigador observa la regla de la parsimonia o de la simplicidad debería encontrar la trayectoria más corta para llegar a un nuevo modelo.

Proponemos el siguiente ejercicio mental: supongan que la teoría económica no hubiera contado con una estructura modular y que cada nuevo modelo demandara no sólo reconstruir, sino descubrir otra vez, paso a paso, todos los modelos requeridos para llegar hasta el que está por hacerse. La situación no diferiría mucho de la ideada por Borges en su célebre "Pierre Menard, autor de El Quijote": cada autor de un modelo habría tenido que escribir todos los modelos hasta llegar al propio. Es evidente que ni la secuencia de modelos ni la eficiencia científica en su construcción habrían podido lograrse si la teoría económica hubiera seguido esta vía más larga y costosa y no hubiera contado con la estructura modular que los fundadores de la teoría económica matemática eligieron en forma espontánea. Este artículo se propone revelar esa estructura modular y sus decisivas implicaciones para el desarrollo de la teoría económica en la segunda mitad del siglo pasado.

He aquí nuestra hipótesis: es la estructura modular de la teoría la que permite explicar el tipo y la velocidad del desarrollo que ha tenido en los últimos cincuenta años. Sin ella, no habría podido conformarse la secuencia de modelos propuesta por Koopmans. Esta hipótesis contrasta, en forma directa, con la imagen convencional del desarrollo de la teoría como una confrontación crítica entre escuelas diversas de pensamiento entre teóricos divergentes o entre teorías competidoras, que habrían luchado por imponer su paradigma sobre toda la profesión. Sugerimos que en lugar de la interminable confrontación derivada de la racionalidad crítica, y de la falsación rigurosa y agresiva, lo que ha ocurrido es el desarrollo continuo de diversas secuencias de módulos a partir de los módulos básicos, hasta consolidar, de un lado, un núcleo teórico fuerte, y del otro, un conjunto de modelos específicos desde el cual ha intentado aproximar la realidad observable. El triunfo aplastante del programa neoclásico de investigación puede asociarse, sin duda, a la eficiencia de su estructura modular. Sin ella, la competencia con los programas rivales del momento habría podido ser mucho más equilibrada. Hoy resulta evidente que el desafío para los probables programas rivales era crecer a un ritmo similar al que crecía el programa neoclásico. Para lograrlo, esos programas habrían tenido que elegir también una estructura modular o haber encontrado una estrategia alternativa de crecimiento que pudiera competir con la planteada por Koopmans, tanto en la profusión de modelos como en el reclutamiento de practicantes productivos. La evidencia muestra que no ocurrió así y que las estrategias de crecimiento de los programas rivales no lograron establecerlos como competidores efectivos del programa neoclásico en el mundo académico.

Un trabajo reciente de Chiappori y Levitt (2003) permite ilustrar lo que intentamos sugerir. Los autores encontraron que hay un rezago de varias décadas entre el trabajo teórico de frontera y sus aplicaciones empíricas actuales, aunque las fuentes teóricas de ese trabajo empírico tienden a concentrarse en la década más reciente. La evidencia es muy fuerte: la mejor economía aplicada de hoy dedica el 70% de sus esfuerzos a estimar proposiciones económicas derivadas de la teoría de los precios de los años cincuenta y de la aplicación de la teoría de los precios a nuevos dominios (crimen, comportamiento de los hogares, adicción), un 20% a estimaciones de aspectos de la teoría de la información, la teoría de juegos y la economía del comportamiento concentraron el 5% cada una, y el equilibrio general sólo tuvo dos artículos dedicados a la estimación de proposiciones de ese campo. Al mismo tiempo, la teoría de juegos y la economía de la información reclamaban más de la mitad de los artículos teóricos de frontera y las aplicaciones de la teoría de los precios sólo alcanzaban un 20% de todos los artículos teóricos publicados en el mismo período de referencia. Creemos útil citar, en toda su extensión, uno de los hallazgos más fuertes del artículo de Chiappori y Levitt:

> La gran mayoría de los artículos empíricos prueban ideas económicas tradicionales (por ejemplo, conceptos que eran bastante familiares para los economistas desde los años 40s y 50s), aunque a menudo estas ideas antiguas eran aplicadas en contextos no tradicionales (el crimen, la econometría del hogar, entre otros). Estos artículos no muestran mucha influencia directa de los campos teóricos que emergieron desde aquel tiempo (por ejemplo, equilibrio general, economía de la información, economía del comportamiento).

> Entre las mayores innovaciones en teoría en las décadas recientes, sólo la economía de la información ha tenido una influencia sustancial sobre los artículos empíricos de nuestra base de datos. Artículos empíricos que pongan a prueba la teoría de juegos, ele equilibrio general y la economía del comportamiento son bien raros en nuestra muestra Chiappori y Levitt (2003, 151).

Dos observaciones inmediatas pueden hacerse a partir de los resultados de Chiappori y Levitt. La primera es que el trabajo teórico de frontera, basado en la estructura modular de la economía, marcha a un paso mucho más acelerado que el de sus aplicaciones empíricas. Es nuestra conjetura que la estructura modular de la teoría es responsable por buena parte de las diferencias en los ritmos de desarrollo de los dos campos. Un corolario de esta proposición es que los economistas empíricos tienden a concentrar sus esfuerzos en aquellos campos en los que es más probable obtener resultados exitosos y seguros, y a desechar aplicaciones en nuevos campos, caracterizados por menor disponibilidad de datos y mayores dificultades en la construcción de los referentes empíricos. El patrón de elección observado es razonable y consistente con nuestra hipótesis: la teoría de precios y sus aplicaciones a nuevos dominios de la realidad son, de hecho, los campos que reúnen el mayor número de trabajos empíricos y los que, como lo afirman Chiappori y Levitt (2003, 151), están basados en ideas accesibles a los economistas de los años cincuenta. La segunda observación reivindica una de las ideas más fuertes de Imre Lakatos: el desarrollo de las teorías, una vez consolidado su núcleo fuerte, se da en el cinturón protector, es decir, en los muy diversos campos de aplicación de ideas ya consolidadas en el núcleo.

Un ejemplo clásico

No es sorprendente que Chiappori y Levitt citen a Gary Becker como el teórico que más influencia ha tenido sobre el trabajo empírico de sus colegas en el período considerado por ellos. Las innovaciones de Becker se sitúan en el cinturón protector del programa de investigación dominante en la economía moderna y son un ejemplo clásico de cómo el núcleo fuerte de la economía se extiende a campos de aplicación "naturales", pero ignorados por la teoría hasta el momento. Al mismo tiempo son un ejemplo paradigmático de la eficiencia generada por la estructura modular en la expansión de la colección de modelos que constituye la teoría económica contemporánea.

El artículo clásico de Becker (1973), "Crimen y castigo: un enfoque económico", es un ejemplo paradigmático de la aplicación de los módulos básicos de la teoría económica a un problema real, ignorado hasta ese momento por la teoría económica. Becker comienza por señalar que el crimen es una industria muy importante que no ha sido tenida en cuenta. Luego propone un modelo cuyo centro es el comportamiento de los individuos. La "oferta de ofensas"o número de crímenes cometidos por unidad de tiempo, es el resultado de la elección individual. No hay nadie predispuesto biológica ni socialmente al crimen. Los individuos cometen crímenes porque la utilidad esperada de cometerlo es superior a la que obtendrían en actividades alternativas. Vale la pena citarlo con amplitud:

> El enfoque adoptado aquí sigue el análisis usual de la elección y supone que una persona comete una ofensa si su utilidad esperada supera a la utilidad que podría obtener usando su tiempo y otros recursos en otras actividades. Entonces, algunas personas se transforman en 'criminales' no porque sus motivaciones básicas difieran de las de otras personas, sino porque sus beneficios y sus costos difieren. No puedo detenerme aquí a discutir las muchas implicaciones generales de este enfoque, salvo para remarcar que el comportamiento criminal se transforma en parte de una teoría mucho más general que no requiere conceptos 'ad hoc' de asociación diferencial y otros similares, ni supone conocimientos perfectos, cálculos veloces, o cualquiera otra de las caricaturas de la teoría económica (Becker 1973, 276-277).

¿Cuáles son módulos básicos que Becker usa para construir su teoría económica del crimen? En el nodo inicial está el módulo de la elección individual del que Becker se mueve, en forma "natural", al módulo de la utilidad esperada. La trayectoria elegida es natural en el sentido de que los individuos enfrentados a la decisión de cometer o no un crimen enfrentan una situación incierta, derivada de la efectividad esperada de la acción de la policía y del aparato judicial[1]. La aparición de la probabilidad de ser capturado, enjuiciado y condenado transforma la utilidad del individuo y hace que su tratamiento teórico natural sea la utilidad esperada. La actitud de los individuos con respecto al riesgo determina las relaciones entre la probabilidad, la pena y la utilidad derivada del crimen. Al estudiar las condiciones de optimalidad, Becker enlaza otro módulo del núcleo fuerte: la función de bienestar social de la moderna economía del bienestar. Su objetivo: hacer que las conclusiones del modelo no sean vacías y puedan servir para como criterio para medir, en equilibrio, las pérdidas sociales derivadas de la "oferta de ofensas". Es evidente que Becker no tuvo que reconstruir el núcleo básico de la teoría económica para concretar su teoría económica del crimen. El uso apropiado de los módulos básicos del núcleo fuerte, en una combinación legítima, fue suficiente para construir una teoría aplicada con vasta influencia en la investigación posterior y en el conocimiento del fenómeno en sí mismo. De hecho, el avance logrado en el conocimiento de la realidad observable no vino de cambios en el núcleo fuerte, sino de su aplicación al "mundo exterior" a través de nuevas hipótesis y del uso creativo de la heurística disponible. Si bien Becker no debió jugar, otra vez,

[1] La incertidumbre asociada a la situación es mucho mayor que la sugerida por Becker. La probabilidad de ser capturado, por ejemplo, depende de elementos aleatorios, de la conducta de sus cómplices, si los tiene, y de otros estados del mundo que no dependen de la conducta individual de cada uno.

los juegos asociados a los módulos básicos de la teoría, sí debió jugar en el nuevo módulo que estaba creando a través de la combinación de módulos ya disponibles. Su creatividad estuvo en descubrir un nuevo campo de aplicación y en haber combinado, en forma efectiva, los módulos requeridos para concretar el módulo específico que tanto ha influido en las investigaciones contemporáneas sobre el crimen desde un punto de vista económico.

Una estructura modular para la teoría económica

Koopmans definió la teoría económica como una colección de modelos, en la que distingue una clase de modelos básicos, cada uno de los cuales intenta "expresar en forma simplificada diversos aspectos de una realidad siempre más complicada" (Koopmans 1957, 142).

He aquí la idea fundamental de Koopmans. A la colección de modelos puede asociarse un orden, derivado de un criterio analítico de complejidad: los modelos más simples son las más básicos, aquellos sin los cuales no se pueden construir los otros. Es esta clase de modelos más simples, dotados de la menor capacidad descriptiva, pero indispensables para construir nuevos modelos, la que constituyen el núcleo básico de la teoría como colección de modelos siempre en crecimiento. Desde el punto de vista de su capacidad para describir la realidad no producen nueva información. De hecho, no son más que el resultado de la aplicación del razonamiento deductivo a los postulados de la teoría. No obstante, sin ellos, sería imposible producir nuevos modelos, con mayores dosis de realismo, con mayores niveles de complicación y mayor información acerca de la realidad. La colección de modelos generada por la aplicación del razonamiento deductivo a subconjuntos del conjunto de postulados habría de constituir el núcleo lógico de la teoría económica. Por estas razones, la clase de modelos básicos constituye de manera natural un nodo inicial en la secuencia de modelos de la teoría económica contemporánea.

Una de las ventajas de la estructura propuesta por Koopmans es la posibilidad de regresar, en cualquier momento, al modelo básico a partir del cual, con la eliminación sucesiva de supuestos, se realizó todo el ejercicio deductivo para la construcción de nuevos modelos. Una vez recorrido el camino deductivo hacia delante, cualquier investigador está en capacidad de recorrer los mismos pasos hacia atrás hasta encontrar los supuestos o bloques básicos que permitieron llegar al nuevo modelo. En otros términos, todo investigador tiene acceso al substrato teórico recorrido para arribar a la nueva predicción encontrada. De esta forma, siempre está en capacidad de verificar la legitimidad de lo realizado y su pertenencia a la secuencia de modelos que constituyen el núcleo de la teoría. Koopmans lo planteó así:

> Por lo tanto el realismo siempre tendrá prelación sobre el rigor en la extensión gradual del rango del conocimiento económico. Pero a menos que el rigor se haga presente para consolidar las ganancias en realismo, no sabremos cuáles conclusiones o recomendaciones dependen de cuáles postulados, y cuáles postulados dependen para su validez de cuáles verificaciones de sus implicaciones a través de la experiencia acumulada (Koopmans 1957, 143).

Aunque Koopmans no lo dijo en forma explícita, sólo la estructura modular elegida permitiría verificar, ante cada "hallazgo empírico", ante cada nuevo descubrimiento realista, cuáles eran los postulados básicos que estaban en su origen. Siempre, había una trayectoria que debía conducir de regreso a los postulados básicos a partir de los cuales se había producido el nuevo modelo o la nueva predicción. Este camino recorrido hacia delante o hacia atrás se puede representar, como veremos posterior, como una trayectoria dentro del grafo de la secuencia de modelos de la teoría económica; secuencia que resulta ser, de hecho, un camino de la estructura modular sugerida por Koopmans.

Modelos y esquemas de modelos

Para formalizar la estructura modular que propone Koopmans distinguiremos dos nociones: *modelo* y *esquema de modelo*. Lo hacemos desde la metodología de la lógica situacional de Karl Popper (1997). Así, un *esquema de modelo* es una estructura teórica que explica un evento económico típico que ocurre en un determinado tipo de situación de elección. Como estructura teórica da lugar a una clase muy variada de *modelos*, cada uno de los cuales explica un evento económico que resulta ser un caso singular del evento económico típico.

Karl Popper, en el capítulo 8 de *El mito del marco común* (Popper, 1997), formula una metodología para las ciencias sociales que denomina lógica situacional. Con ella propone entender la evolución del conocimiento en las distintas ciencias sociales a través de la construcción de modelos, y no de teorías, según era la sugerencia de los dos grandes enfoques discontinuistas enfrentados desde la década de los años sesenta. En sus palabras:

> (...) los modelos son incluso más importantes aquí (en las ciencias sociales), porque el método newtoniano de explicar y predecir acontecimientos singulares mediante leyes universales y condiciones iniciales es muy difícil de aplicar en las ciencias sociales teóricas. Operan casi siempre por el método de construir situaciones o condiciones típicas, esto es, mediante el método de construir modelos (Popper 1997, 163).

La metodología de la lógica situacional está formulada en términos de las nociones de modelo y del principio de racionalidad. Un modelo representa una situación típica de elección, definida por tres elementos: el *marco institucional* en el que está inscrito el individuo, la *información* y los *objetivos* que posee. Por tanto, un modelo requiere un principio metodológico que Popper llama el principio de racionalidad, encargado de animar el modelo, es decir, establecer una relación entre los elementos que definen la situación de elección para "representar la manera en que los diversos elementos del modelo podrían actuar los unos sobre los otros" (Popper 1997, 162) y de este modo dar cuenta de un acontecimiento o fenómeno económico.

En otras palabras, el principio de racionalidad establece la manera en que un individuo usa la información disponible para decidir el curso de acción adecuado al marco institucional en el que está inscrito para alcanzar sus objetivos, de tal forma que al realizar la acción adecuada provoca el fenómeno o acontecimiento económico estudiado (Popper 1997, 163 y 166).

De esta forma, para Popper un modelo permite explicar todo evento económico que sea un caso singular del evento económico típico. Es decir, que todo par de eventos económicos que sean casos singulares del evento típico que explica el modelo son acontecimientos estructuralmente semejantes. De ahí, que un modelo permite "explicar en principio (para emplear el término de Hayek una vasta clase de acontecimientos estructuralmente semejantes" (Popper 1997, 166).

Por esta razón, Popper sustituye la palabra modelo por el concepto *modelo situacional típico*. Situacional porque el modelo representa una situación de elección y típico porque está representando un tipo de situación de elección, no una situación concreta o particular del mundo real. Un *modelo situacional típico* permite construir muchos modelos que resultan ser casos particulares de él mismo y que además explican fenómenos distintos, pero semejantes en términos estructurales. Aquí hemos optado por denominar esquema de modelo al modelo situacional típico de Popper (1997). Y a los modelos que resultan ser un caso particular del esquema de modelo los llamamos modelos.

Nuestra intuición es la siguiente: cuando la comunidad de investigadores construye exitosamente un esquema de modelo, está proponiendo un juego. Un juego en el que cada investigador enfrenta fenómenos económicos que debe explicar mediante modelos construidos a partir del esquema de modelo propuesto por la comunidad. De esta forma resuelve dos problemas básicos: decidir si el modelo construido por él es un modelo aceptable e identificar cómo debe rastrear las aplicaciones que debe hacer de los elementos que conforman el esquema de modelo para construir el modelo requerido.

Por lo anterior, identificaremos cada juego entre investigadores configurado alrededor de un esquema de modelo como un módulo. De ahí que un módulo $\mathcal{G}$ sea mucho más que un modelo, dado que $\mathcal{G}$, como juego, establece una convención acerca de cómo modelar todo acontecimiento económico del tipo descrito por el esquema de modelo. De este modo, dada la clase C de módulos, nos proponemos definir un operador cerrado $\otimes$ de $\mathsf{C} \times \mathsf{C}$ en C, de forma que permita, junto con la definición de una relación de orden parcial $\trianglelefteq$ en C, establecer un orden en la secuencia de módulos de acuerdo con el criterio de complejidad involucrado en la definición de $\trianglelefteq$, y así dar lugar a la estructura modular de la teoría económica. La efectividad de la estructura modular está en que los juegos asociados a los módulos básicos ya han sido jugados y no se requiere volverlo a hacer en cada momento. Sólo se requiere jugar el nuevo juego, generado por situaciones más realistas y complejas. Es en las nuevas combinaciones de módulos básicos en los que la creatividad y el rigor de cada investigador están en juego.

UN MÓDULO

Es evidente que la estructura básica de nuestra construcción es el módulo. En esta sección lo definimos como un juego entre investigadores a partir de un esquema de modelo, usando herramientas de la teoría de juegos y de los juegos semánticos de interacción estratégica. Un módulo no sólo es, entonces, un esquema de modelo o una estructura teórica, sino una convención seguida por los investigadores cuando intentan modelar cierta clase de acontecimientos económicos.

Juego $\mathcal{G}$

Siguiendo la tradición de los juegos semánticos de interacción estratégica (Abramsky, 1996), introducimos al jugador Naturaleza, que produce fenómenos o acontecimientos económicos que pueden tener lugar en el mundo exterior. Interpretamos a los acontecimientos económicos como las acciones del jugador Naturaleza. El espacio de acciones de Naturaleza es el conjunto de fenómenos o acontecimientos económicos que pueden tener lugar en el mundo exterior. Para definirlo formalmente, denotemos por $\widetilde{\mathcal{D}}_i$ al conjunto que define todos los posibles valores que puede tomar la noción económica observable i. Diremos que el conjunto $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k$ define todos los posibles valores que pueden tomar k nociones económicas observables, ya sea precio, ingreso, salario, etc. Sea $\widetilde{\mathcal{P}}$ una relación precisa entre las nociones económicas, es decir, $\widetilde{\mathcal{P}} \subset \widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k$. Y $\widetilde{\mathcal{P}}$ como relación, expresa una estructura de comportamiento.

En su trabajo empírico, los economistas toman datos de cada noción económica observable. Sea $\mathcal{D}_i$ un conjunto de datos o registros de la noción económica observable i que toma valores en el conjunto $\widetilde{\mathcal{D}}_i$. Se verifica una relación $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k$ que expresa una estructura de comportamiento que exhibe el conjunto de datos, lo que no compromete todavía una interpretación teórica de $\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k$. Si la relación $\mathcal{P}$ es una relación que satisface las propiedades del tipo de relación $\widetilde{\mathcal{P}}\subset\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k$ y $\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k$ es un conjunto de datos o registros particulares del conjunto $\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k$, entonces, la estructura $(\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k;\mathcal{P})$ es una interpretación verdadera de $(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$[2].

Se cumple que $\mathcal{P}$ está contenida estrictamente en el conjunto de datos $\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k$, una vez la relación $\mathcal{P}$ no involucra aquellos elementos que no verifican la regla de la relación por la ocurrencia de ciertas contingencias observables. Denotemos como $\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}};\widetilde{\mathcal{P}})$ el conjunto de modelos (en el sentido de teoría de modelos) de $(\widetilde{\mathcal{D}};\widetilde{\mathcal{P}})$. Esto nos permite definiran acontecimiento económico.

> ***Acontecimiento económico***. *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de contingencias observables. Un acontecimiento económico del tipo $(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$ es un conjunto de datos generados $\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k$ dada la contingencia $c\in\mathcal{C}$, es decir, un acontecimiento económico es una pareja ordenada*
>
> $$(c,(\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k;\mathcal{P}))\in\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$$
>
> *Entonces, en $\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$ existe todo acontecimiento económico que exhibe una estructura de comportamiento $\widetilde{\mathcal{P}}$. Diremos que $\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$ es el espacio de acciones de Naturaleza.*

Dado un acontecimiento económico $(c,(\mathcal{D}_1\times\cdots\times\mathcal{D}_k;\mathcal{P}))\in\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times\cdots\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$, propuesto por Naturaleza en la primera etapa del juego, el Investigador debe construir, en la segunda etapa del juego, una clase de proposiciones $\mathcal{H}$ (hipótesis), de tal forma que le permita, en el universo de la teoría, implicar lógica o materialmente la relación $\mathcal{P}\subset\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k$ considerando las contingencias obervables (y no-observables) que han tenido lugar al momento de generarse los datos. Por lo anterior, la definición de modelo es:

> **Modelo**. *Sea $(\mathcal{H},u)\in\mathcal{M}\times\mathcal{U}$ una pareja tal que $\mathcal{H}$ es un conjunto de proposiciones (hipótesis) y u es una contingencia no-observable. Dada una observación*
>
> $$(c,(\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k;\mathcal{P}))\in\mathcal{C}\times\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$$

[2] Usando la notación de teoría de modelos, si $(\mathcal{D}_1\times ...\times\mathcal{D}_k;\mathcal{P})$ es una interpretación (en el sentido de teoría de modelos) verdadera de $(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$ a través de σ, decimos que σ es un modelo (en el sentido de teoría de modelos) de $(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$, en símbolos, $\models_\sigma(\widetilde{\mathcal{D}}_1\times ...\times\widetilde{\mathcal{D}}_k;\widetilde{\mathcal{P}})$.

decimos que $(\mathcal{H}, u) \in \mathcal{M} \times \mathcal{U}$ *es un modelo económico del acontecimiento*

$$(c, (\mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k; \mathcal{P}))$$

siempre que

$$\mathcal{H} \wedge c \wedge u \Rightarrow \mathcal{P} \subset \mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k$$

Juego repetido $\mathcal{G}$

Como las interacciones entre Investigador y Naturaleza no son únicas, es necesario introducir la noción de juego repetido para dar cuenta de las interacciones reales entre jugadores en el contexto del juego antes descrito. Sea $M_{\mathcal{G}}^k = S_1 \times S_2 \times ... \times S_k = \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} S_i$ el conjunto de secuencias alternadas tal que:

$$S_i = \left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k) & \text{si } i \text{ impar} \\ \mathcal{M} \times \mathcal{U} & \text{si } i \text{ par} \end{array} \right\}$$

Por lo anterior, para cada elemento $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_k)$ del conjunto $M_{\mathcal{G}}^k$ se cumple que[3]:

$$s_i = \left\{ \begin{array}{cc} (c, (\mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k; \mathcal{P})) & \text{si } i \text{ impar} \\ (\mathcal{H}, u) & \text{si } i \text{ par} \end{array} \right\}$$

Para $k = 2n - 1$ y $k = 2n$ fijo, los conjuntos $M_{\mathcal{G}}^{2n-1}$ y $M_{\mathcal{G}}^{2n}$ contienen secuencias alternadas que tienen exactamente un número impar de $2n - 1$ movimientos y un número par de $2n$ movimientos respectivamente, y en las cuales mueve primero Naturaleza y luego Investigador. Sean $M_{\mathcal{G}}^{odd} = \overset{N}{\underset{n=1}{\cup}} M_{\mathcal{G}}^{2n-1}$ y $M_{\mathcal{G}}^{even} = \overset{N}{\underset{n=1}{\cup}} M_{\mathcal{G}}^{2n}$ los conjuntos de todas las posibles secuencias alternadas de longitud impar y par con número máximo de $2N - 1$ movimientos y $2N$ movimientos respectivamente. Sea $M^* = M_{\mathcal{G}}^{even} \cup M_{\mathcal{G}}^{odd}$ el conjunto de secuencias alternadas y finitas. Además, se define el producto de dos secuencias $\mathbf{s}_K = (s_k)_{k=1}^K$ y $\mathbf{s}_J = (s_j)_{j=1}^J \in M^*$ como la yustaposición entre ellas, es decir,

$$\begin{aligned} (s_k)_{k=1}^K \cdot (s_j)_{j=1}^J &= (s_1, s_2, ..., s_K) \cdot (s_1, s_2, ..., s_J) \\ &= (s_1, s_2, ..., s_K, s_{K+1}, s_{K+2}, ..., s_{K+J}) = (s_i)_{i=1}^{K+J} \end{aligned}$$

Además, si $K < J$, $J - K = s$ y $(s_k)_{k=1}^K = (s_j)_{j=1}^{J-s}$, decimos que $\mathbf{s}_K$ es un *prefijo* de $\mathbf{s}_J$, en símbolos, $\mathbf{s}_K \sqsubseteq \mathbf{s}_S$, si existe una secuencia $\mathbf{s}_S = (s_r)_{r=1}^S$ tal

[3] A una secuencia la denotaremos con letra minuscula y en negrilla ($\mathbf{s}$) y a un elemento de la secuencia lo denotaremos con letra minúscula en cursiva e indexada con su respectiva posición i en la secuencia (s_i).

que:

$$\mathbf{s}_K \cdot \mathbf{s}_S = \mathbf{s}_K \cdot (s_r)_{r=1}^{S} = (s_1, s_2, ..., s_{J-s}, s_{(J-s)+1}, ..., s_J) = (s_j)_{j=1}^{J} = \mathbf{s}_J$$

Es decir, si $\mathbf{s}_K$ es una secuencia que coincide en todos sus elementos con los primeros K elementos de la secuencia $\mathbf{s}_J$, decimos que $\mathbf{s}_K$ es *prefijo* de $\mathbf{s}_J$ si existe una secuencia que pegándosela a $\mathbf{s}_K$ obtenemos toda la secuencia $\mathbf{s}_J$. Se denotará por Pref($\mathbf{s}$) el conjunto de *prefijos* de la secuencia $\mathbf{s}$.

La función de pagos $u_I : M_{\mathcal{G}}^{even} \to \{0, 1\}$ para Investigador está definida como:

$$\begin{aligned} u_I(s_1, s_2, ..., s_{2n-1}, s_{2n}) &= \prod_{i=1}^{n} u_I(s_{2i-1}, s_{2i}) \\ &= u_I(s_1, s_2) \cdot u_I(s_3, s_4) \cdot ... \cdot u_I(s_{2n-1}, s_{2n}) \end{aligned}$$

tal que:[4]

$$u_I((c, (\mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k; \mathcal{P})), (\mathcal{H}, u)) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & si\ \mathcal{H} \wedge c \wedge u \Rightarrow \mathcal{P} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{array} \right\} \quad (1)$$

Se cumple que $\prod_{i=1}^{n} u_I(s_{2i-1}, s_{2i}) = 1$ si $\mathcal{H}_i \wedge c_{i-1} \wedge u_i \Rightarrow \mathcal{P}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, y $\prod_{i=1}^{n} u_I(s_{2i-1}, s_{2i}) = 0$ en otro caso. La función de pagos $u_N : M_{\mathcal{G}}^{even} \to \{0, 1\}$ para Naturaleza es como sigue:

$$\begin{aligned} u_N(s_1, s_2, ..., s_{2n-1}, s_{2n}) &= \prod_{i=1}^{n} u_N(s_{2i-1}, s_{2i}) \\ &= u_N(s_1, s_2) \cdot u_N(s_3, s_4) \cdot ... \cdot u_N(s_{2n-1}, s_{2n}) \end{aligned}$$

tal que:

$$u_N((c, (\mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k; \mathcal{P})), (\mathcal{H}, u)) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & si\ \mathcal{H} \wedge c \wedge u \Rightarrow \mathcal{P} \\ 1 & en\ otro\ caso \end{array} \right\} \quad (2)$$

Por consecuencia, $u_N(s_1, s_2, ..., s_{2n}) = 0$ si $\mathcal{H}_i \wedge c_{i-1} \wedge u_i \Rightarrow \mathcal{P}_{i-1}$ para todo $1 \leq i \leq 2n$, y $u_N(s_1, s_2, ..., s_{2n}) = 1$ en otro caso.

Estrategia ganadora

Si existe un conjunto de proposiciones $\widetilde{\mathcal{H}}$ tal que $\widetilde{\mathcal{H}}$ implica lógicamente la estructura de comportamiento $\widetilde{\mathcal{P}} \subset \times_{i=1}^{k} \widetilde{\mathcal{D}}_i$, que exhibe un acontecimiento

[4] Esta expresión indica que cada vez que Investigador no construya adecuadamente $\mathcal{H}$ esto le impedirá explicar $(c, (\mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k; \mathcal{P}))$, perdiendo el desafío propuesto por Naturaleza.

económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}})$ — $\widetilde{\mathcal{H}} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{P}} \subset \underset{i=1}{\overset{k}{\times}} \widetilde{\mathcal{D}}_i$, entonces, para cada acontecimiento económico $(c, (\mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k; \mathcal{P})) \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\underset{i=1}{\overset{k}{\times}} \widetilde{\mathcal{D}}_i; \widetilde{\mathcal{P}})$ que exhibe una estructura de comportamiento $\mathcal{P}$, y que resulta ser un caso singular del tipo de relación $\widetilde{\mathcal{P}}$ existe un conjunto de enunciados $\mathcal{H} \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$ tal que $\mathcal{H}$, junto con cierta clase de contingencias observables e inobervables c y u implican lógicamente $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k$ —$\mathcal{H} \wedge c \wedge u \Rightarrow \mathcal{P} \subset \mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k$. Por supuesto, el que tenga conocimiento de su existencia no significa que conozca el camino para encontrarlo, pero al menos sabe que la búsqueda adecuada puede llevarlo a él.

Por lo anterior, si existe $\widetilde{\mathcal{H}}$ tal que $\widetilde{\mathcal{H}} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}$ entonces el juego entre Naturaleza e Investigador está bien definido y el siguiente diagrama está completo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{H}} & \Rightarrow & (\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\mathcal{H}, u) \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) \times \mathcal{U} & \Rightarrow & (c, (\mathcal{D}_1 \times ... \times \mathcal{D}_k; \mathcal{P})) \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\underset{i=1}{\overset{k}{\times}} \widetilde{\mathcal{D}}_i; \widetilde{\mathcal{P}}) \end{array}$$

Y en consecuencia, existe la estrategia ganadora $\kappa^* : dom\,(\kappa^*) \subset M_{\mathcal{G}}^{odd} \rightarrow \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) \times \mathcal{U}$ asociada al juego. Siendo κ^* una función que asigna a cada sucesión de longitud impar $\mathbf{s} = (s_k)_{k=1}^{2n-1}$ un modelo $s_{2n} = (\mathcal{H}_{2n}, u_{2n}) \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) \times \mathcal{U}$ si y sólo si

$$\mathcal{H}_{2n} \wedge u_{2n} \wedge c_{2n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_{2n-1}$$

Definimos la imagen de $(s_k)_{k=1}^{2n-1}$ a través de κ^* como sigue:

$$\kappa^*\left(s_1, s_2, ..., s_{2n-1}\right) = (\mathcal{H}_{2n}, u_{2n}) \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) \times \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{2n} \wedge u_{2n} \wedge c_{2n-1} \Rightarrow \mathcal{P}$$

La representación en forma normal del juego es:

$$\mathcal{G} = \left\langle M_{\mathcal{G}}^{O}, M_{\mathcal{G}}^{P}; \lambda_{\mathcal{G}}; \kappa_{\mathcal{G}}^{*} \subset M_{\mathcal{G}}^{even}; u_P, u_O \in \{0,1\}^{M_{\mathcal{G}}^{even}} \right\rangle$$

Por lo anterior, definimos un módulo como:

> ***Módulo***. *Diremos que un objeto $\mathcal{G}$ es un módulo sii $\mathcal{G}$ es un juego de interacción estratégica tal que:*
>
> $$\mathcal{G} = \left\langle M_{\mathcal{G}}^{O}, M_{\mathcal{G}}^{P}; \kappa_{\mathcal{G}}^{*} \subset M_{\mathcal{G}}^{even}; u_P, u_O \in \{0,1\}^{M_{\mathcal{G}}^{even}} \right\rangle$$

Así, un módulo $\mathcal{G}$ es más que un esquema de modelo o una estructura teórica. Un módulo $\mathcal{G}$ es una convención que siguen los investigadores para modelar cualquier acontecimiento económico que exhiba un comportamiento con una estructura de comportamiento $\widetilde{\mathcal{P}} \subset \widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k$ a partir del esquema de modelo $\widetilde{\mathcal{H}}$.

ESTRUCTURA MODULAR

La construcción de nuevos módulos, a partir de los módulos básicos, requiere que el producto o la suma de dos módulos sea otro módulo y que exista un orden parcial en la clase finita de módulos de la teoría económica. De otra forma, la modularidad de la teoría no sería universal y la construcción de nuevos módulos sería el resultado casual o aleatorio de las acciones de los investigadores. Sea C la clase finita de módulos.

Orden parcial en C

Koopmans sugirió ver la teoría económica como una secuencia de modelos que expresaban, en forma simplificada, aspectos distintos de una realidad cada vez más compleja o complicada. Los primeros modelos, en aislamiento, eran muy poco realistas. Pero cada modelo posterior, al ser el resultado de la combinación de módulos anteriores, ganaba en realismo. Surgía entonces un orden implícito: cada nueva combinación era una ganancia en el sentido del realismo o de la capacidad descriptiva del nuevo modelo y todo modelo o módulo básico *precedía* a los modelos más complejos que lo seguían. Koopmans previó, incluso, la objeción de la falta de realismo de este enfoque metodológico. Su respuesta fue contundente: los modelos más simples no son más que *prototipos* de los modelos más *realistas y complejo*s que están *por venir o por construir*. El orden parcial que ahora vamos a inducir sobre C refleja esa idea crucial del pensamiento de Koopmans:

> ***Relación de Complejidad***. *Sea* $\trianglelefteq : \mathsf{C} \rightarrow \mathsf{C}$ *una relación que llamaremos relación de complejidad de tal forma que dados dos módulos* $\mathcal{G}$ *y* $\mathcal{G}^{'}$; *escribimos* $\mathcal{G} \trianglelefteq \mathcal{G}^{'}$ *para decir que* $\mathcal{G}^{'}$ *es más complejo que* $\mathcal{G}$. *Así* $\mathcal{G} \trianglelefteq \mathcal{G}^{'} \Leftrightarrow M_{\mathcal{G}} \subset M_{\mathcal{G}^{'}} \wedge \kappa^*_{\mathcal{G}} \subset \kappa^*_{\mathcal{G}^{'}}$

Consideremos la representación en forma normal de un módulo $\mathcal{G}_0$ como sigue[5]:

$$\mathcal{G}_0 = \left\langle M^O_{\mathcal{G}_0}, M^P_{\mathcal{G}_0}; \kappa^*_{\mathcal{G}_0} \subset M^{even}_{\mathcal{G}_0}; u_P, u_O \in \{0,1\}^{M^{even}_{\mathcal{G}_0}} \right\rangle$$

[5] La expresión $\{0,1\}^{M^{even}_{\mathcal{G}_0}}$ denota el conjunto de funciones con dominio $M^{even}_{\mathcal{G}_0}$ y codominio $\{0,1\}$. Es decir:

$$\{0,1\}^{M^{even}_{\mathcal{G}_0}} = \left\{ u \mid u : M^{even}_{\mathcal{G}_0} \rightarrow \{0,1\} \right\}$$

y supongamos que la comunidad de investigadores construye un módulo $\mathcal{G}_1$ con representación en forma normal:

$$\mathcal{G}_1 = \left\langle M^O_{\mathcal{G}_1}, M^P_{\mathcal{G}_1}; \kappa^*_{\mathcal{G}_1} \subset M^{even}_{\mathcal{G}_1}; u_P, u_O \in \{0,1\}^{M^{even}_{\mathcal{G}_1}} \right\rangle$$

Cumpliéndose que $\mathcal{G}_0 \trianglelefteq \mathcal{G}_1$ siempre que $\mathcal{G}_1$ extienda la clase de acontecimientos económicos $M^O_{\mathcal{G}_0}$, cubierta por $\mathcal{G}_0$ a una clase $M^O_{\mathcal{G}_1} \supset M^O_{\mathcal{G}_0}$, tal que $M^O_{\mathcal{G}_1} - M^O_{\mathcal{G}_0}$ es un conjunto de nuevos acontecimientos económicos que son casos singulares de un nuevo acontecimiento económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_1)$. En símbolos:

$$\left(\forall s_{2n-1} \in M^O_{\mathcal{G}_1} - M^O_{\mathcal{G}_0}\right) \left(s_{2n-1} \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_1)\right)$$

De tal forma, que explicar la estructura de comportamiento $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ exige romper, suavizar o generalizar, al menos un supuesto de la clase de hipótesis $\widetilde{\mathcal{H}}_0$. Sea $\widetilde{\mathcal{H}}_1 \subset \widetilde{\mathcal{H}}_0$ la clase de hipótesis que permite implicar lógicamente la estructura de comportamiento $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ que exhibe el acontecimiento económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_1)$. En símbolos:

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1 \Rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_1 \subset \widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k$$

Si el acontecimiento económico $s_{2n-1} \in M^O_{\mathcal{G}_0}$ es un caso singular del acontecimiento económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_0)$, entonces Investigador sigue la estrategia ganadora $\kappa^*_{\mathcal{G}_0} : M^{odd}_{\mathcal{G}_0} \to M^P_{\mathcal{G}_0}$ definida como:

$$\kappa^*_{\mathcal{G}_0}(s_1, s_2, ..., s_{2n-1}) = (\mathcal{H}_{2n}, u_{2n}) \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\mathcal{H}}_0\right) \times \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{2n} \wedge u_{2n} \wedge c_{2n-1} \Rightarrow \mathcal{P}$$

Es decir, Investigador busca construir un modelo económico $(\mathcal{H}_{2n}, u_{2n})$ tal que:

$$((\mathcal{H}_{2n}, u_{2n}) \in \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{H}}_0) \times \mathcal{U}) \wedge (\mathcal{H}_{2n} \wedge u_{2n} \wedge c_{2n-1} \Rightarrow \mathcal{P})$$

De lo contrario, si $s_{2n-1} \in M^O_{\mathcal{G}_1} - M^O_{\mathcal{G}_0}$ es un caso singular del acontecimiento económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_1)$, es decir, $s_{2n-1} \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} \widetilde{\mathcal{D}}_i; \widetilde{\mathcal{P}}_1)$, Investigador sigue la estrategia ganadora $\kappa^*_{\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0} : (M_{\mathcal{G}_1} - M_{\mathcal{G}_0})^{odd} \to M^P_{\mathcal{G}_1}$, definida como:

$$\kappa^*_{\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0}(\mathbf{s} \cdot s_{2n-1}) = (\mathcal{H}_{2n}, u_{2n}) \ \in \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{H}}_1) \times \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{2n} \wedge u_{2n} \wedge c_{2n-1} \Rightarrow \mathcal{P}$$

Siendo $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ la clase de hipótesis que permite implicar lógicamente la estructura de comportamiento $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ que exhibe el acontecimiento económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_1)$.

Por lo anterior, $\kappa^*_{\mathcal{G}_1}$ es una estrategia ganadora que amplía la capacidad de respuesta de la comunidad de investigadores a un nuevo campo de acontecimientos económicos que en un momento inicial no era cobijado por la teoría. Formalmente, $\kappa^*_{\mathcal{G}_1}$, que contiene la estrategia ganadora $\kappa^*_{\mathcal{G}_0}$, está definida como sigue:

$$\begin{aligned}\kappa^*_{\mathcal{G}_1} : & M^{odd}_{\mathcal{G}_1} \to M^P_{\mathcal{G}_1} \\ & \mathbf{s}\cdot s_{2k-1} \to \kappa^*_{\mathcal{G}_1}(\mathbf{s}\cdot s_{2k-1}) = \left\{\begin{array}{ll} \kappa^*_{\mathcal{G}_0}(\mathbf{s}\cdot s_{2k-1}) & \text{si } s_{2k-1} \in M^O_{\mathcal{G}_0} \\ \kappa^*_{\mathcal{G}_1-\mathcal{G}_0}(\mathbf{s}\cdot s_{2k-1}) & \text{si } s_{2k-1} \in M^O_{\mathcal{G}_1} - M^O_{\mathcal{G}_0} \end{array}\right\}\end{aligned}$$

El siguiente teorema permite establecer que la clase de módulos es un conjunto parcialmente ordenado.

Teorema 1. $\trianglelefteq$ *es una relación de orden parcial*[6].

Procederemos a definir un operador cerrado $\otimes$ en la clase de módulos C, junto con algunas propiedades adicionales. Así, estaremos en capacidad de construir, con la ayuda del orden parcial establecido en C, la estructura modular en forma secuencial.

Producto tensor

Consideremos la clase finita C de módulos de la teoría económica y definamos un operador cerrado $\otimes$ de $\mathsf{C} \times \mathsf{C}$ en C, de tal forma que, dados dos módulos $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{,} \in \mathsf{C}$, la imagen de $(\mathcal{G}, \mathcal{G}^{,})$ a través de $\otimes$ es un módulo $\otimes\ (\mathcal{G},\ \mathcal{G}^{,}) = \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^{,}$ cuya representación en forma normal es:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^{,} = \ & \left\langle M^O_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}}, M^P_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}}; \kappa^*_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}} \subset M^{even}_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}}; u_p, u_O \in \{O,P\}^{M^{even}_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}}} \right\rangle \\ & M^O_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}} = M^O_{\mathcal{G}} + M^O_{\mathcal{G}^{,}} \\ & M^P_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}} = M^P_{\mathcal{G}} + M^P_{\mathcal{G}^{,}} \\ & M^*_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}} = \left\{\mathbf{s} : \mathbf{s} \upharpoonright M_{\mathcal{G}} \in M^*_{\mathcal{G}} \wedge \mathbf{s} \upharpoonright M_{\mathcal{G}^{,}} \in M^*_{\mathcal{G}^{,}}\right\} \\ & u_p, u_O : M^{even}_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^{,}} \to \{0,1\}\end{aligned}$$

Escribimos $A + B$ para denotar la unión disyunta de los conjuntos A y B y $\mathbf{s} \upharpoonright M_{\mathcal{G}}$ para denotar la secuencia obtenida a partir de la eliminación de todos los elementos que no estan en $M_{\mathcal{G}}$ de $\mathbf{s}$. Lo anterior establece que el producto de dos módulos es un módulo, es decir, $\otimes$ es un operador cerrado. Por lo tanto, es posible construir de manera recursiva módulos a partir de módulos anteriores.

[6] Ver demostración en el apéndice.

Consideremos ahora una secuencia finita de interacciones repetidas

$$(s_1, s_2, ..., s_{2k-2}, s_{2k-1}) = \mathbf{s}\cdot(s_{2k-1}) = \mathbf{s}s_{2k-1} \in M^{even}_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'}$$

en la cual el movimiento $s_{2k-1} \in M^{O}_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'}$ es un acontecimiento económico propuesto por Naturaleza. Entonces, siendo $M_{\mathcal{G}'}$ y $M_{\mathcal{G}}$ disyuntos, tenemos que:

$$s_{2k-1} \in M^{O}_{\mathcal{G}'} \cup M^{O}_{\mathcal{G}}$$

Es decir, s_{2k-1} es un acontecimiento económico que puede ser un caso singular del acontecimiento económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}})$, o ser un caso singular de otro acontecimiento económico típico $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}')$. Si $s_{2k-1} \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}})$, sigue la estrategia ganadora $\kappa^*_{\mathcal{G}}$. De lo contrario, sigue la estrategia ganadora $\kappa^*_{\mathcal{G}'}$. Esto significa que la estrategia ganadora $\kappa^*_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'} : M^{odd}_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'} \to M^{P}_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'}$ asociada al juego $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ es

$$\kappa^*_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'}(\mathbf{s}s_{2k-1}) = \left\{ \begin{array}{ll} \kappa^*_{\mathcal{G}}(\mathbf{s}s_{2k-1}) & \text{si } \mathbf{s}s_{2k-1} \in M^{odd}_{\mathcal{G}} \\ \kappa^*_{\mathcal{G}'}(\mathbf{s}s_{2k-1}) & \text{si } \mathbf{s}s_{2k-1} \in M^{odd}_{\mathcal{G}'} \end{array} \right\}$$

En otras palabras, el *módulo* $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ es un juego en el cual Investigador practica de manera simultánea dos convenciones, cada una de las cuales modelar clases de acontecimientos económicos posibles distintas, a saber: $M^{O}_{\mathcal{G}}$ y $M^{O}_{\mathcal{G}'}$. En otras palabras, la estrategia ganadora $\kappa^*_{\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}'}$ desplegada en el módulo $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$, establece una relación entre las estrategias ganadoras $\kappa^*_{\mathcal{G}}$ y $\kappa^*_{\mathcal{G}}$ de los módulos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$, respectivamente. Esto permite pensar el juego $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ como un procedimiento para modelar, en forma simultánea y exitosa, en los módulos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$. De ahí que $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ representa al árbol

$$\begin{array}{cccccc} & & \circ & & & \\ \mathbf{s}s_{2k-1} \in M^{odd}_{\mathcal{G}} & & \swarrow & \searrow & & \mathbf{s}s_{2k-1} \in M^{odd}_{\mathcal{G}'} \\ & \bullet & \searrow & \swarrow & \bullet & \\ \kappa^*_{\mathcal{G}}(\mathbf{s}s_{2k-1}) & & \circ & & & \kappa^*_{\mathcal{G}'}(\mathbf{s}s_{2k-1}) \end{array}$$

Más aún, en el módulo $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ Naturaleza dicta en cuál juego deberá responder Investigador, es decir, dado un posible acontecimiento económico s_{2k-1} propuesto por Naturaleza, Investigador deberá construir un modelo s_{2k} de s_{2k-1} dentro la convención $\mathcal{G}$ o $\mathcal{G}'$, siguiendo las funciones de mejor respuesta $\kappa^*_{\mathcal{G}}$ o $\kappa^*_{\mathcal{G}'}$.

Lo anterior significa que el módulo $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ permite aproximar una primera compartimentalización del mundo exterior en el sentido de que $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ es una taxonomía conceptual que permite clasificar acontecimientos económicos. Dado un acontecimiento económico s_{2k-1}, Investigador verifica de qué tipo de evento económico se trata para luego decidir la estrategia de modelación a seguir: $\kappa^*_{\mathcal{G}}$ o $\kappa^*_{\mathcal{G}'}$. Por lo tanto, sólo la Naturaleza en el módulo $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ puede inducir un cambio de un subjuego a otro. Para establecer este resultado, presentamos el siguiente teorema.

Teorema 2. *Si A y B son juegos y $\mathbf{s} \in M^*_{A\otimes B}$ es una secuencia de interaciones repetidas entre Investigador y Naturaleza en el juego $A \otimes B$, y se cumple que s_i, s_{i+1} son movimientos sucesivos en diferentes subjuegos (i.e. uno es en A y el otro es en B), entonces, $\lambda_{A\otimes B}(s_i) = P$, $\lambda_{A\otimes B}(s_{i+1}) = O$. Es decir, sólo el Oponente puede cambiar de un subjuego a otro; Proponente siempre puede responder en el mismo subjuego en el que Oponente ha movido*[7]*.*

Construcción secuencial de la estructura modular

Ahora procederemos a utilizar el operador cerrado $\otimes$ entre módulos para construir secuencialmente la estructura modular a partir del orden parcial establecido en $\mathtt{C}$.

Sea $\mathcal{G}_0$ un módulo básico o *prototipo,* en el sentido de Koopmans, establecido como una convención dentro de la comunidad de investigadores neoclásicos. Entonces

$$\mathcal{G}_0 = \left\langle M^O_{\mathcal{G}_0}, M^P_{\mathcal{G}_0}; \kappa^*_{\mathcal{G}_0} \subset M^{even}_{\mathcal{G}_0}; u_P, u_O \in \{0,1\}^{M^{even}_{\mathcal{G}_0}} \right\rangle$$

tiene implicada una estructura:

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{H}}_0, (\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_0); \widetilde{\mathcal{H}}_0 \Rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_0 \subset \widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k \right\rangle$$

con la cual está definida la función de mejor respuesta $\kappa^*_0 : M^{odd}_{G_0} \to M^P_{G_0}$ como sigue:

$$\kappa^*(s_1, s_2, ..., s_{2n-1}) = (\mathcal{H}_{2n}, u_{2n}) \in \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{H}}_0) \times \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{2n} \wedge u_{2n} \wedge c_{2n-1} \Rightarrow \mathcal{P}$$

Entonces, dado un módulo $\mathcal{G}_0$ que da cuenta de una clase de eventos económicos posibles $M^O_{\mathcal{G}} = \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_0)$ consideramos el conjunto partes de $\widetilde{\mathcal{H}}_0$,

$$\mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{H}}_0) = \left\{ \widetilde{\mathcal{H}}_i : \widetilde{\mathcal{H}}_i \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}_0 \right\}$$

Que resulta ser finito porque $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ es finito. De esta manera, en $\mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{H}}_0)$ existen todas las posibles clases de proposiciones que se pueden desprender de $\widetilde{\mathcal{H}}_0$, rompiendo, suavizando o generalizando al menos uno de sus supuestos.

[7] Ver la demostración en el apéndice.

A continuación damos una prueba trivial acerca del hecho de que si tenemos dos clases de acontecimientos económicos, definidas a partir acontecimientos económicos típicos distintos, entonces no puede ocurrir que un acontecimiento económico pertenezca a ambas clases, es decir, un acontecimiento económico s_{2k-1} no puede ser dos tipos distintos de eventos económicos.

Teorema 3. *Si* $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i)$ *y* $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j)$ *son eventos económicos típicos tal que* $\widetilde{\mathcal{P}}_i \neq \widetilde{\mathcal{P}}_j$. *Entonces* $M^O_{\mathcal{G}_i} \cap M^O_{\mathcal{G}_j} = \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i) \cap \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j) = \varnothing$.[8]

Entonces, la comunidad de investigadores toma como punto de partida un nuevo acontecimiento económico típico

$$(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i) \tag{3}$$

si y sólo si existe una clase de proposiciones (hipótesis) $\widetilde{\mathcal{H}}_i \in \mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{H}}_0)$ tal que

$$\widetilde{\mathcal{H}}_i \Rightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_i \subset \widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k$$

Lo anterior, permite a la comunidad de investigadores alcanzar la construcción de una nueva función de respuesta $\kappa^*_{\mathcal{G}_i}$:dom$(\kappa^*_{\mathcal{G}_i}) \subset P^{odd}_{\mathcal{G}_i} \rightarrow M^P_{\mathcal{G}_i}$ tal que:

$$\kappa^*_{\mathcal{G}_i}(\mathbf{s}s_{2k-1}) = (\mathcal{H}_{2k}, u_{2k}) \in \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{H}}_i) \times \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{H}_{2k} \wedge u_{2k} \wedge c_{2k-1} \Rightarrow \mathcal{P}_{2k-1}$$

Así, con esta nueva función de respuesta $\sigma^*_{G_i}$ la comunidad de investigadores está en capacidad de modelar exitosamente todo acontecimiento económico $s_{2k-1} \in M^O_{G_i}$ que sea del nuevo tipo $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i)$. Por lo anterior, se tiene un núevo módulo:

$$\mathcal{G}_i = \left\langle M^O_{\mathcal{G}_i}, M^P_{\mathcal{G}_i}; \kappa^*_{\mathcal{G}_i} \subset M^{even}_{\mathcal{G}_i}; u_P, u_O \in \{0,1\}^{M^{even}_{\mathcal{G}_i}} \right\rangle$$

Resulta claro que a partir del módulo $\mathcal{G}_0$ se ha construido un módulo $\mathcal{G}_i$ rompiendo al menos un supuesto de la clase $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ con la cual se definió

$$M^O_{\mathcal{G}_0} = \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_0)$$

Así, dada la subclase de supuestos $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ de $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ se ha considerado una nueva clase de situaciones posibles de elección:

$$M^O_{\mathcal{G}_i} = \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i)$$

de tal forma que, aplicando la operación $\otimes$ sobre $\mathcal{G}_0$ y $\mathcal{G}_i$ tenemos que $\mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_i$ es una estructura más compleja que $\mathcal{G}_0$, pues, claramente $M_{\mathcal{G}_0} \subset M_{\mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_i} \wedge \kappa^*_{\mathcal{G}_0} \subset \kappa^*_{\mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_i}$. En símbolos:

$$\mathcal{G}_0 \trianglelefteq \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_i$$

[8] Ver demostración en el apéndice.

Donde la función de mejor respuesta $\kappa^*_{\mathcal{G}_0\otimes\mathcal{G}_i}\mathrm{dom}(\kappa^*_{\mathcal{G}_0\otimes\mathcal{G}_i}) \subset P^{odd}_{\mathcal{G}_0\otimes\mathcal{G}_i} \rightarrow M^P_{\mathcal{G}_0\otimes\mathcal{G}_i}$ es:

$$\sigma^*_{\mathcal{G}_0\otimes\mathcal{G}_i}\left(\mathbf{s}s_{2k-1}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} \kappa^*_{\mathcal{G}_0}\left(\mathbf{s}s_{2k-1}\right) & \text{si } \mathbf{s}s_{2k-1} \in M^{odd}_{\mathcal{G}_0} \\ \kappa^*_{\mathcal{G}_i}\left(\mathbf{s}s_{2k-1}\right) & \text{si } \mathbf{s}s_{2k-1} \in M^{odd}_{\mathcal{G}_i} \end{array} \right\}$$

De este modo, a partir de $\mathcal{G}_0$ la comunidad comienza a construir recursivamente una sucesión de esquemas de modelos, cuya primera instancia está constituida por el rompimiento de la supuestos pertenecientes a la clase inicial de supuestos $\widetilde{\mathcal{H}}_0$, con la cual construyó el módulo que constituye el primer nodo en el grafo de la secuencia de modelos. De este modo, considerando todas las posibles combinaciones en que es posible romper supuestos de $\widetilde{\mathcal{H}}_0$, consideremos una sucesión decreciente $\widetilde{\mathcal{H}}_n \subset ... \subset \widetilde{\mathcal{H}}_1 \subset \widetilde{\mathcal{H}}_0 \in \mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{H}}_0)$ cualquiera, tal que $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ ocurre primero que $\widetilde{\mathcal{H}}_j$ para $i < j$. Entonces, la sucesión $(\widetilde{\mathcal{G}})^n_{k=1}$ de módulos construidos a partir de $(\mathcal{H}_i)^n_{k=1}$ permite construir una rama de la estructura modular:

$$\begin{array}{ccl}
\overset{\mathcal{G}_0}{\bullet} & \rightarrow & \mathcal{G}_0 \\
\downarrow & & \\
\overset{\mathcal{G}_1}{\bullet} & \rightarrow & \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_1 \\
\downarrow & & \\
. & & \\
. & & \\
. & & \\
\downarrow & & \\
\overset{\mathcal{G}_{n-1}}{\bullet} & \rightarrow & \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{G}_{n-1} \\
\downarrow & & \\
\overset{\mathcal{G}_n}{\bullet} & \rightarrow & \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{G}_{n-1} \otimes \mathcal{G}_n
\end{array}$$

Cumpliéndose que:

$$\mathcal{G}_0 \trianglelefteq \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq \mathcal{G}_0 \otimes \mathcal{G}_1 ... \otimes \mathcal{G}_n$$

CONCLUSIONES

Hemos argumentado a favor de una hipótesis básica: tanto el carácter secuencial de los modelos que constituyen la teoría económica como su eficiencia científica, su muy rápido desarrollo y su desplazamiento de programas rivales dependen en forma crucial del carácter modular de la teoría económica neoclásica. Como lo plantea el mismo Koopmans (1957, 144):

> A veces fenómenos económicos muy diferentes pueden expresarse, mediante conjuntos de postulados cuyo contenido lógico es similar o incluso idéntico... Una economía de esfuerzo se alcanza de esta forma, y se gana la percepción de unidad lógica, dentro la diversidad sustantiva, si la pieza de razonamiento se defiende por sí sola, desprendida del contexto sustantivo que puede haber conducido a su construcción original.

La unidad lógica de la que habla Koopmans sólo es posible porque la teoría cuenta con una estructura modular flexible que siempre permite volver a los módulos iniciales y trazar los razonamientos lógicos que han conducido al modelo en consideración. Sin embargo, no se trata sólo de contar con la posibilidad de recorrer hacia atrás los caminos lógicos recorridos por los modelos ya existentes, sino de moverse hacia adelante en el sentido de ganar mayor realismo y complejidad en la medida en que nuevas combinaciones de los módulos básicos emergen como resultado de las acciones combinatorias de otros investigadores. En ambos sentidos, la economía de esfuerzo de la que habla Koopmans es el resultado de la estructura modular propuesta en este artículo. Es obvio que nada de lo planteado aquí asegura la creatividad la capacidad de cubrimiento empírico del programa neoclásico: sólo da cuenta de su crecimiento y proliferación. Más aún, sólo garantiza la eficiencia interna del programa, pero no dice nada sobre su eficiencia relativa con respecto a otros programas de investigación en economía.

En el intento de revelar la estructura modular de la teoría económica, hemos demostrado que las operaciones con módulos dan como resultado otro módulo y que hay un orden subyacente a la secuencia de modelos de la teoría, un orden que sigue la idea de complejidad creciente propuesta por Koopmans en 1957. Al mismo tiempo hemos usado los juegos semánticos de interacción estratégica para demostrar que el estado de la teoría económica es el resultado de la interacción real que los investigadores han tenido con un oponente ideal (la Naturaleza, la comunidad de investigadores, el ambiente o un genio maligno). Es la interacción entre investigadores reales y un oponente ideal la que ha conducido a la rápida expansión del espacio de modelos o de mundos posibles de la teoría económica contemporánea, pero es la estructura modular con la cual se ha venido realizando la interacción la que ha garantizado su eficiencia, su muy rápido desarrollo y su éxito en desplazar posibles teorías rivales.

Dos líneas de desarrollo quedan abiertas para investigaciones posteriores. La primera es explorar si la estructura modular del programa neoclásico aseguró su predominio sobre otros programas rivales que no contaban con ese tipo de estructura. La segunda es si la estructura modular, con su flexibilidad y capacidad combinatoria, es condición suficiente para garantizar la eficiencia científica sugerida por Koopmans. Por ahora sólo creemos haber demostrado que el rápido desarrollo del programa neoclásico, la profusión de nuevos modelos en sus dominios y su crecimiento inigualado en el medio académico están relacionados de forma directa con la estructura modular vislumbrada por Koopmans y adoptada, en forma espontánea, por sus practicantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramsky, S. (1996) "Semantics of interaction: an Introduction to Games Semantics", en A. Pitts & P. Dybjer (eds.), *Semantics and Logics of Computation*, Londres, Cambridge University Press, 1-31.

Becker, G. S. (1973) "Crimen y castigo: un enfoque económico, en microeconomía", Breit, W. y H. Hochman (eds.), México, Interamericana, 272-297.

Cendales, A. y B. Salazar (2005) "Teoría de la utilidad neoclásica: un juego semántico de interacción estratégica", *Economía Institucional*, 7 (12): 97-112.

Chiappori, P. A. y S. D. Levitt. (2003) "An Examination of the Influence of Theory and Individual Theorists on Empirical Research in Microeconomics", *American Economic Review*, 93 (2): 151-155.

Hintikka, J. (1976) *Lógica, juegos de lenguaje e información*, Madrid, Editorial Tecnos.

Hintikka, J. (1999) "What is the Logic of Experimental Inquiry?" en *Inquiry as Inquiry: a Logic of Scientific Discovery*, Dordrechet, Kluwer Academic Publishers.

Kauffman, S. (2003) *Investigaciones. Complejidad, organizaciones y nuevas leyes para una biología general*, Barcelona, Tusquets Editores.

Koopmans (1976) *Tres ensayos sobre el estado de la ciencia económica*, Barcelona, Antoni Bosch.

Popper, K. (1997) El mito del marco común: en defensa de la ciencia y la racionalidad, Barcelona, Ediciones Paidós.

APÉNDICE

Teorema 1. $\trianglelefteq$ *es una relación de orden parcial.*

Demostración. $\trianglelefteq$ es reflexiva. En efecto, como $M_{\mathcal{G}} = M_{\mathcal{G}} \wedge \kappa^*_{\mathcal{G}} = \kappa^*_{\mathcal{G}}$ se cumple que $\mathcal{G} \trianglelefteq \mathcal{G}$ para todo módulo $\mathcal{G} \in \mathbb{C}$ por definición de módulo. $\trianglelefteq$ es transitiva. En efecto, si $\mathcal{G} \trianglelefteq \mathcal{G}'$ y $\mathcal{G}' \trianglelefteq \mathcal{G}''$, es claro que $M_{\mathcal{G}} \subset M_{\mathcal{G}''}$. Por otro lado, es inmediato que $\kappa^*_{\mathcal{G}} \subset \kappa^*_{\mathcal{G}''}$. $\trianglelefteq$ es antisimétrica. Se debe probar que si $\mathcal{G} \trianglelefteq \mathcal{G}'$ y $\mathcal{G}' \trianglelefteq \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G} \trianglelefteq \mathcal{G}'$ y $\mathcal{G}' \trianglelefteq \mathcal{G}$ se cumple que $M_{\mathcal{G}} = M_{\mathcal{G}'}$ y $\kappa^*_{\mathcal{G}} = \kappa^*_{\mathcal{G}'}$. Por tanto, $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$

Lema 1. *Sea* $\mathbf{s}' \sqsubseteq \mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_l)$ *y* $\mathbf{s}' \upharpoonright M_A = (s_{A1}, s_{A2}, ..., s_{An}) \in M^*_A$, *en donde para cada* $1 \leq j \leq n$ *se tiene que* $s_{Aj} = s_i$ *para algún* i *entre* 1 *y* l. *Por lo anterior, se cumple que* j *es par/impar sii* i *es par/impar.*

Demostración. La intuición del lema es trivial: puesto que $s_{Aj} = s_i$ *para algún* i *entre* 1 *y* l en la secuencia $\mathbf{s}$, entonces, si j es par, es decir, si s_{Aj} es una acción de Investigador en el subjuego A en la secuencia de interacciones repetidas

$$\mathbf{s}' \upharpoonright M_A = (s_{A1}, s_{A2}, ..., s_{An})$$

que resulta ser una sub-secuencia de la secuencia $\mathbf{s}$, entonces se cumple que s_{Aj} es también una acción elegida por Investigador en $\mathbf{s}$ en el subjuego A. Sea $\lambda_A : M_A \to \{O, P\}$ tal que:

$$\begin{aligned} \lambda_A(s_i) &= O \text{ si } i = 2n - 1 \\ \lambda_A(s_i) &= P \text{ si } i = 2n \end{aligned}$$

Como $\lambda_A(s_{Aj}) = P$ si j es par y $\lambda_A(s_{aj}) = O$ si j es impar y $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = \lambda_A(s_{Aj})$ entonces $i = m + j$ para algún m par por definición de $\lambda_{A \otimes B}$, dado que, de lo contrario si j es par entonces i sería impar y $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = \lambda_A(s_{aj}) = O$, lo cual es una contradicción.

Teorema 2. *Si* A *y* B *son juegos y* $\mathbf{s} \in M^*_{A \otimes B}$ *es una secuencia de interaciones repetidas entre Investigador y Naturaleza en el juego* $A \otimes B$, *y se cumple que* s_i, s_{i+1} *son movimientos sucesivos en diferentes subjuegos (i.e. uno es en* A *y el otro es en* B*), entonces,* $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = P$, $\lambda_{A \otimes B}(s_{i+1}) = O$. *Es decir, sólo el Oponente puede cambiar de un subjuego a otro; Proponente siempre puede responder en el mismo subjuego en el que Oponente ha movido.*

Demostración. Sea $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner$ el estado de juego definido como:

$$\ulcorner \mathbf{s} \urcorner = (\text{parity}_A(\mathbf{s} \upharpoonright M_A), \text{parity}_B(\mathbf{s} \upharpoonright M_B))$$

donde $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner$ es la imagen de una función llamada *parity*, que indica el estado en que se encuentra una corrida $\mathbf{s}$ del juego $A \otimes B$. Esto es, dado un prefijo $\mathbf{s}^{'} \in \text{Pref}(s)$ la función *parity* indica, dado el último movimiento de $\mathbf{s}^{'}$, a que jugador le corresponde jugar en el siguiente movimiento dentro de $\mathbf{s}$ ya sea en A o en B. Para definir *parity*, sea P una proyección de $\mathbf{s}^{'}$ sobre M_A^{alt} y M_B^{alt}:

$$\mathbf{s}^{'} \rightarrow P\left(\mathbf{s}^{'}\right) = \left(P_1\left(s^{'}\right), P_2\left(s^{'}\right)\right) = \left(s^{'} \upharpoonright M_A, s^{'} \upharpoonright M_B\right)$$

Ahora, definamos parity como sigue:

$$\begin{aligned} parity\left(s^{'} \upharpoonright M_A, s^{'} \upharpoonright M_B\right) &= (parity_A(s^{'} \upharpoonright M_A), parity_B(s^{'} \upharpoonright M_B)) \\ &= (\{O, P\}, \{O, P\}) \end{aligned}$$

siendo $parity_A$: $\text{Pref}(s \upharpoonright A) \rightarrow \{O, P\}$ y $parity_B$:$\text{Pref}(s \upharpoonright B) \rightarrow \{O, P\}$ funciones definidas como sigue:

$$s^{'} \upharpoonright A \rightarrow parity_A(s^{'} \upharpoonright M_A) = \left\{ \begin{array}{ll} O & \text{si } s^{'} \upharpoonright M_A \in M_A^{even} \vee s^{'} \upharpoonright M_A = \emptyset \\ P & \text{si } s^{'} \upharpoonright M_A \in M_A^{odd} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{s}^{'} \upharpoonright B \rightarrow parity_B(\mathbf{s}^{'} \upharpoonright M_B) = \left\{ \begin{array}{ll} O & \text{si } \mathbf{s}^{'} \upharpoonright M_B \in M_B^{even} \vee \mathbf{s}^{'} \upharpoonright M_B = \emptyset \\ P & \text{si } \mathbf{s}^{'} \upharpoonright M_B \in P_B^{odd} \end{array} \right\}$$

Por lo anterior, $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner \in \{O, P\} \times \{O, P\}$ determina, dado el último movimiento en $\mathbf{s}^{'}$, a que jugador le corresponde mover, ya sea en A o en B. Consideremos una secuencia de la forma

$$(s_1, s_2, ..., s_{2n-1}, s_{2n}) = (s_1, s_2) \cdot (s_3, s_4, ..., s_{2n-1}, s_{2n})$$

De tal forma que si consideramos la primera interacción $\mathbf{s}^{'} = (s_1)$ tal que $s_1 \in M_A^O$, tenemos que en la primera etapa de esta interacción, $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner$ es:

$$\ulcorner \mathbf{s} \urcorner = \text{parity}\left(\mathbf{s}^{'} \upharpoonright M_A, \mathbf{s}^{'} \upharpoonright M_B\right) = \left(\text{parity}_A\left(s_1\right), \text{parity}_B\left(\emptyset\right)\right) = (P, O)$$

De tal forma, que si en la primera etapa de esta primera interacción Naturaleza decide escoger una acción del juego A entonces por definición de la función estado $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner$ se tiene que: $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner = (P, O)$. Debiendo contestar Investigador en el juego A. Lo que se quiere probar es que nunca es posible que se de una situación en la cual el estado del juego se cumpla lo siguiente: $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner = (P, P)$. Es decir, se quiere probar que si movimientos s_i, s_{i+1} en $\mathbf{s}$ son en juegos distintos, entonces, $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = P$ y $\lambda_{A \otimes B}(s_{i+1}) = O$. Supongamos que $s_i \in M_A$ y $s_{i+1} \in M_B$ y probemos que $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = P$ y $\lambda_{A \otimes B}(s_{i+1}) = O$. Razonemos por contradicción y supongamos que $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = O$ o $\lambda_{A \otimes B}(s_{i+1}) = P$. Por tanto, $s_i \in M_A$, $s_{i+1} \in M_B$ y $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = O$ o $s_i \in M_A$, $s_{i+1} \in M_B$ y $\lambda_{A \otimes B}(s_{i+1}) = P$. Mostremos que $s_i \in M_A$, $s_{i+1} \in M_B$ y $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = O$ lleva a una contradicción. Como $s_i \in M_A$ y $\lambda_{A \otimes B}(s_i) = O$ entonces $\lambda_A(s_{Aj}) = \lambda_{A \otimes B}(s_i) = O$ con i, j impares por definición de λ_A y lema 1. En consecuencia, $\text{parity}_A((s_1 s_2 .... s_i) \upharpoonright$

$M_A) = P$ pues $(s_1, s_2, ..., s_i) \upharpoonright A \in M_A^{odd}$. Por consecuencia, $s_{i+1} \in M_A^P$ $\subset M_A$ y $\lambda_{A\otimes B}(s_{i+1}) = P$ por definición de M_A^*. Es decir, le corresponde jugar a Investigador en A, lo cual es una contradicción, pues, $s_{i+1} \in M_B$ por hipótesis. Es decir, $s_{i+1} \in M_A$ y $s_{i+1} \in M_B$. Por lo tanto, $\lambda_{A\otimes B}(s_i) = P$. Análogamente se muestra que $s_i \in M_A$, $s_{i+1} \in M_B$ y $\lambda_{A\otimes B}(s_{i+1}) = P$ lleva a una contradicción. Por consecuencia, no es posible que $\ulcorner \mathbf{s} \urcorner = (P, P)$

Teorema 3. *Si* $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i)$ *y* $(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j)$ *son eventos económicos típicos tal que* $\widetilde{\mathcal{P}}_i \neq \widetilde{\mathcal{P}}_j$*. entonces* $M^O_{\mathcal{G}_i} \cap M^O_{\mathcal{G}_j} = \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i) \cap \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j) = \varnothing$.

Demostración. En efecto, razonemos por contradicción y supongamos que

$$M^O_{\mathcal{G}_i} \cap M^O_{\mathcal{G}_j} \neq \varnothing$$

Sea s_k un elemento que vive en $M^O_{\mathcal{G}_i} \cap M^O_{\mathcal{G}_j}$. Entonces:

$$s_k \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i) \wedge s_k \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j)$$

Como $\widetilde{\mathcal{P}}_i \neq \widetilde{\mathcal{P}}_j$, entonces $\widetilde{\mathcal{P}}_i \nsubseteq \widetilde{\mathcal{P}}_j$ o $\widetilde{\mathcal{P}}_j \nsubseteq \widetilde{\mathcal{P}}_i$. Si $\widetilde{\mathcal{P}}_i \nsubseteq \widetilde{\mathcal{P}}_j$ así:

$$s_k \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_i) \Rightarrow s_k \notin \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j)$$

Lo cual es una contradicción, dado que:

$$s_k \notin \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j) \wedge s_k \in \mathcal{C} \times \mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \times ... \times \widetilde{\mathcal{D}}_k; \widetilde{\mathcal{P}}_j)$$

Por consecuencia, $M^O_{G_i} \cap M^O_{G_j} = \emptyset$