
DEPENDENCIA ESTRUCTURAL EN LOS MERCADOS BURSÁTILES DE COLOMBIA Y ESTADOS UNIDOS: UNA APROXIMACIÓN USANDO CÓPULAS

Daiver Cardona Salgado¹

Comprender la dependencia de las pérdidas generadas por el mercado bursátil colombiano con respecto a otros mercados bursátiles internacionales, en particular con el mercado de Estados Unidos, es relevante para que los inversionistas puedan identificar oportunidades en la conformación de sus portafolios; y para que los hacedores de política económica puedan generar, si es necesario, medidas regulatorias que permitan suavizar los efectos de contagio, causados por una caída, en mercados bursátiles externos y sus repercusiones en la economía colombiana, o en caso de no dependencia, aprovechar sus beneficios para estimular la inversión extranjera y el crecimiento económico. El objetivo de estudio de este trabajo de investigación es la medición de la dependencia entre los mercados bursátiles de Colombia y Estados Unidos usando cópulas.

Para cuantificar la dependencia estructural de los mercados bursátiles colombiano y estadounidense, se siguieron los lineamientos del modelo CAPM, en el que el riesgo sistemático que comparten ambos mercados es medido a partir de coeficientes de dependencia. La dinámica de los mercados bursátiles se determina si-

¹Magister en Administración de Empresas y en Economía. Se desempeña como profesor en la Universidad Autónoma de Occidente. E-mail: dcardona@uao.edu.co. Dirección de correspondencia: Cra 103 N. 11-40 (Cali, Colombia).

Este artículo fue recibido el 30 de abril de 2010, la nueva versión el 27 de abril de 2011 y su publicación aprobada el 21 de mayo de 2012.

guiendo a McNeil, Frey y Embrecht (2005)², a partir de la distribución de pérdidas de los índices Col20, Dow Jones (DJ) y Standar & Poor's 500 (SP500).

Para modelar la dependencia, primero se encuentran las distribuciones marginales de cada serie de pérdidas de los índices con modelos AR(P)-Garch(p,q), justificados por la volatilidad condicional de las pérdidas financieras³. Este es un modelo similar al propuesto por Bollerslev (1987) y a los usados recurrentemente en este tipo de estudios, por Jondeau y Rockinger (2006), Patton (2002, 2006) y Hu (2006, 2008). Después, con los residuos se modela la dependencia con cópulas, como lo mencionan Becerra y Melo (2008) el uso de la cópula tiene la ventaja de presentar el concepto de dependencia como una estructura que describe completamente la relación entre las variables, en lugar de resumirla en un solo número como el coeficiente de correlación. A partir de las cópulas, se estimaron medidas de dependencia de las distribuciones y medidas de dependencia asintóticas, las primeras son usadas para determinar el grado de riesgo sistemático que comparten los dos mercados bursátiles y las segundas, para determinar qué tan probable es que ambos mercados experimenten pérdidas o ganancias extremas conjuntamente.

MARCO TEÓRICO

Modelo CAPM

De acuerdo con Perold (2004), el CAPM, por sus siglas en inglés (Capital Asset Pricing Model), es una contribución fundamental para entender la manera en que se determinan los precios de los activos. EL CAPM permite entender como los propietarios de activos, por medio de la diversificación, logran bajos retornos esperados y, aumento en los precios de sus activos. Además, inversionistas con portafolios no diversificados probablemente estén tomando riesgos por los cuales no serán recompensados. El CAPM provee un marco conceptual coherente para dar respuesta a una pregunta fundamental en finanzas: ¿cómo el riesgo de una inversión puede afectar su retorno esperado?

A partir del trabajo de Markowitz (1952), Sharpe (1964) y Lintner (1965) desarrollaron una teoría económica de amplias implicaciones: el modelo CAPM. Ellos mostraron que si los inversionistas tenían expectativas homogéneas y optimizaban con portafolios de media-varianza eficientes, entonces, en ausencia de fricciones del mercado, el portafolio de todos los activos, o el del mercado, serían en sí mismos portafolios de media-varianza eficiente. La ecuación usual del CAPM es una implicación directa de la media-varianza eficiente del portafolio del mercado.

²En la administración de riesgo financiero hay una preocupación fundamental por la probabilidad de grandes pérdidas.

³El negativo de los retornos financieros.

Los supuestos del CAPM se pueden condensar en tres conjuntos de condiciones: el mercado de activos está en equilibrio⁴, en el sentido de que es un mercado sin fricciones y de que los precios se ajustan de tal manera que el stock de cada activo se mantiene disponible; todos los inversionistas se comportan de acuerdo al criterio de media-varianza de Markowitz; y, los inversionistas basan sus decisiones en los valores de las mismas medias, varianzas y covarianzas, es decir, los agentes tienen expectativas homogéneas y el mercado de activos es de información simétrica.

El modelo CAPM para el retorno de un activo riesgoso se expresa formalmente con la siguiente ecuación.

$$r_i = r_f + \beta_i * (r_m - r_f) + \zeta_i \quad (1)$$

Donde:

r_f : es un activo libre de riesgo; se supone no estocástico.

r_m : es el retorno del portafolio representativo del mercado; representa el riesgo sistemático o no diversificable, así como los factores comunes en el mercado.

ζ_i : es el riesgo específico inherente al activo i -ésimo que no es explicado por los factores comunes del mercado; este es el riesgo idiosincrático o diversificable.

ζ_i se supone estocástico y con distribución normal.

De la ecuación (1) se concluye que:

$$E[r_i] = r_f + \beta_i * (E[r_m] - r_f) \quad (2)$$

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_M)}{var(r_M)} \quad (3)$$

$$var(r_i) = \beta_i^2 var(r_m) + var(\zeta_i) \quad (4)$$

β_i mide cuánto del i -ésimo activo riesgoso no puede ser diversificado, y este riesgo sistemático es determinado por la covarianza entre el retorno del i -ésimo activo riesgoso y el portafolio del mercado, es decir, el riesgo sistemático depende del coeficiente de correlación lineal bajo el supuesto de distribución normal, como lo muestra la expresión (3).

La expresión (2) determina la línea característica para el activo i -ésimo, la cual tiene pendiente β_i . Cada activo incluido en el portafolio del mercado cuenta con su línea característica. Estas líneas difieren de acuerdo al valor de los β_i .

En la práctica el portafolio del mercado es representado por el portafolio correspondiente a un índice de precios de acciones (como el Col20, el DJ y el SP500). Un desafío crítico es comprobar los alcances del CAPM porque estos índices bursátiles son siempre aproximaciones del portafolio del mercado, en el sentido de que

⁴Equilibrio en el sentido de demanda = oferta para cada activo en el mercado.

los índices no coinciden exactamente con el universo de activos disponibles al inversor.

La implicación central del CAPM es la línea de seguridad del mercado (SML⁵), la cual grafica $E[r_i]$ y β_i . La SML es otra forma de interpretar la ecuación (2). En la SML el intercepto es igual a la tasa libre de riesgo, r_f , y la pendiente es igual a $E[r_m] - r_f$. El CAPM predice la tasa de retorno esperado y el coeficiente beta para todos los activos y portafolios de activos. Si un activo por encima de la SML indica que el valor del activo está sobrevalorado. El hecho de que el desequilibrio sea percibido por el mercado es la razón por la cual los agentes no comprarían el activo, el exceso de oferta hace bajar el precio del activo hasta el nivel sobre la curva SML. De forma análoga, si un activo por debajo de la SML indica que el valor del activo está subvalorado, este desequilibrio es percibido por el mercado y los agentes lo comprarían; el exceso de demanda hace que el precio del activo suba hasta el nivel sobre la curva SML.

Una interpretación ampliamente usada de β_i tiene que ver con la prima de riesgo, la cual se define como el exceso de retorno esperado por encima de la tasa libre de retorno: $E[r_m] - r_f$. La magnitud de la prima de riesgo evidentemente depende del riesgo, en el caso del CAPM. De acuerdo con (2), el exceso de retorno esperado es $E[r_i] - r_f = (E[r_m] - r_f) * \beta_i$, lo que implica que el exceso de retorno de un activo es igual al producto entre el exceso de retorno del portafolio del mercado con el β del activo. Intuitivamente, entre más grande sea el β_i , el activo es de mayor riesgo. Un activo con $\beta_i = 0$, implica que el activo no está correlacionado con el mercado y tiene una tasa de retorno esperada igual a la tasa libre de riesgo.

La diversificación de un portafolio hace referencia a la selección de activos que permiten reducir la variabilidad de la tasa de retorno de todo el portafolio, comparada con la variabilidad de cada uno de los activos que lo constituyen. Según la ecuación (1) la variabilidad en el retorno i -ésimo tiene dos fuentes, como se observa en la expresión (4): la variación en la tasa de retorno del mercado, r_m , y la variación aleatoria del ζ_i . La varianza de ζ_i es asociado con el riesgo idiosincrático y la varianza de r_m es el riesgo sistemático del mercado no diversificable. El rol de diversificación en el CAPM es seleccionar los activos que reduzcan el riesgo idiosincrático del portafolio. Nótese, que por la expresión (4) la varianza de un portafolio está dada por la expresión (5).

$$var(r_P) = \beta_P^2 var(r_m) + var(\zeta_P) \quad (5)$$

Donde $var(\zeta_P)$ es la varianza de la parte idiosincrática del portafolio con $\zeta_P = \sum_{i=1}^n w_i * \zeta_i$; donde w_i es la proporción del activo i -ésimo en el portafolio. Con una selección adecuada de los w_i es posible reducir el riesgo idiosincrático del portafolio. Para que el riesgo idiosincrático sea nulo, se requieren dos condiciones: la primera, que el portafolio esté balanceado, es decir, que las proporciones de los

⁵Por su sigla en inglés Security Market Line.

activos sean aproximadamente iguales en el portafolio; la segunda, que los componentes idiosincráticos sean no correlacionados entre los activos. Si la segunda condición no se satisface, entonces aparecen las covarianzas en el extremo derecho de la expresión (5). Sin embargo, esto no es coherente con el equilibrio del CAPM donde existen correlaciones no nulas entre al menos alguno de los ζ_i .

De acuerdo con Bee (2005), desde la introducción de la teoría de selección de portafolio de Markowitz y del modelo CAPM de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) la dependencia se convirtió en objeto de estudio de la economía financiera. Su aceptación se debe a que este modelo ofrece rigurosidad al intuitivo concepto de diversificación, por ello se ha convertido en el corazón de las finanzas y la administración del riesgo. Este modelo supone una relación de dependencia lineal, tanto entre parejas de activos, como entre un activo y un factor latente de la economía.

Siguiendo el modelo CAPM, los inversionistas y reguladores, en busca de beneficiarse de la diversificación, han usado medidas de dependencia, en particular en estudios de mercados bursátiles. Como lo mencionan Chollete, de la Peña y Lu (2009) la relevancia e importancia de la medición de la dependencia entre mercados bursátiles estriba en la reciente historia de los mercados internacionales, donde se observa: un gran número de crisis financieras, incremento de la globalización de los mercados y contagios financieros.

Según Chollete *et al.* (2009), cuando los activos presentan dependencia en colas, la diversificación puede no ser óptima. Samuelson (1967) examinó las restricciones necesarias para asegurar una diversificación óptima, y encontró la necesidad de una definición general de dependencia negativa en términos de la función de distribución de los activos. Brumelle (1974) probó que las correlaciones negativas no eran ni necesarias ni suficientes para diversificar, excepto en los casos especiales, como la distribución normal o la función de preferencias cuadráticas.

Sin embargo, la evidencia empírica del comportamiento de los retornos no garantiza estas restricciones sobre la función de densidad conjunta; esto ha llevado a considerar distribuciones de colas pesadas, donde el coeficiente de correlación lineal deja de ser apropiado para medir dependencia, y a desarrollar conceptos más sofisticados para modelar dependencia.

Las dos vías que se han utilizado empíricamente para modelar la dependencia son: la teoría del valor extremo y el modelamiento de meta-distribuciones con cópulas. En esta investigación se ha optado por las cópulas, básicamente porque estas permiten extraer la estructura de dependencia de un portafolio. Trabajos más recientes en este sentido son: Rockinger y Jondeau (2001) quienes estudiaron la dependencia de mercados bursátiles europeos usando el DAX (Alemania); el CAC (Francia) con el SP500; el NIKKEI (Japón) y el FTS (Financial Times Stock index), que mostraron la dependencia de los mercados europeos cambió a través del tiempo, la dependencia fue creciente hasta mediados de los 90, y descendió hasta el 2001. Hu (2008) estudió la estructura de dependencia del mercado bursátil chino

con los mercados bursátiles de Estados Unidos, Alemania, Francia, Reino Unido, Hong Kong y Japón. Sun, Rachev, Fabozzi y Kalev (2009) estudiaron los movimientos de nueve índices bursátiles usando cópulas debido a su importancia en la diversificación del riesgo de un portafolio internacional.

Cópulas

De acuerdo con Patton (2006), una cópula es una función que captura toda la información de la distribución conjunta de dos variables que no es considerada por sus distribuciones marginales, es decir, captura toda la información de dependencia de la distribución conjunta. El uso de cópulas en economía se presenta esencialmente en dos situaciones: la primera, cuando se requiere la función de distribución conjunta y no son suficientes los dos primeros momentos; ejemplos de este caso son: Rosenberg (2003), lo usó para calcular el precio de opciones con más de un subyacente, Hull y White (1998) para calcular el valor en riesgo de un portafolio de activos, Diebold, Hahn y Tay (1999) para pronósticos con funciones de densidad multivariada desconocidas. La segunda, cuando la correlación lineal no es suficiente; ejemplos de este caso son: correlación asimétrica de activos (Erb, Harvey y Viskanta, 1994); contagios financieros donde los mercados internacionales son más dependientes en crisis que durante bonanzas, y valoración de activos, cuando no se cumplen los supuestos teóricos del CAPM.

De acuerdo con Schweizer (1991) el término cópula fue introducido por Sklar, en un artículo publicado en francés en 1959, donde presentaba la cópula como una función que conectaba una distribución multivariada con cada una de las distribuciones marginales.

Teorema 1 (Teorema de Sklar) *Sea $F(r_1, r_2, \dots, r_d)$ la función de distribución conjunta de las variables aleatorias R_1, \dots, R_d , con funciones de distribución marginales $F_1(r_1), F_2(r_2), \dots, F_d(r_d)$, si estas funciones de distribución marginal son continuas, entonces existe una función única $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, tal que:*

$$F(r_1, r_2, \dots, r_d) = C(F_1(r_1), F_2(r_2), \dots, F_d(r_d), \theta) \quad (6)$$

Donde θ es un vector de parámetros de la cópula que mide la dependencia entre las marginales.

Para el caso bivariado, un elemento de θ mide la dependencia entre las dos marginales. La ventaja sustancial de las cópulas es que las funciones de distribución marginal pueden ser de familias diferentes. De la ecuación (6) se evidencia que la cópula es una función que solo modela la dependencia entre las marginales.

A partir de las funciones marginales F_1, F_2, \dots, F_d , donde $u_i = F_i(u_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, d$, la cópula se puede expresar como lo presenta la ecuación (7).

$$\begin{aligned} F(r_1, r_2, \dots, r_d) &= P(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2, \dots, R_d \leq r_d) \\ &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_d \leq u_d) \\ &= C(u_1, u_2, \dots, u_d, \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde U_1, U_2, \dots, U_d son variables aleatorias uniformemente distribuidas.

Si las funciones marginales F_i son continuas, entonces la cópula asociada a la función de distribución conjunta es única; esto implica que:

Si el vector $\mathbf{R} \sim F$, entonces $(F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)) \sim C$.

Y si el vector $\mathbf{U} \sim C$, entonces $(r_1, \dots, r_d) \sim F$.

Becerra y Melo (2008) mencionan que, como el coeficiente de correlación de Pearson presenta algunos inconvenientes cuando las variables aleatorias no satisfacen el supuesto de normalidad multivariada, o cuando las variables no siguen una distribución elíptica, la cópula supera algunos de estos inconvenientes, y señalan las siguientes ventajas:

- Dado que la cópula extrae la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada, esta contiene mucha más información acerca de la dependencia entre d variables aleatorias que la que puede contener un solo número.
- La cópula tiene en cuenta todos los posibles casos de dependencia. Si existe dependencia perfecta positiva entre las variables aleatorias de interés, se dice que las variables aleatorias son comonotónicas, por su parte, cuando la dependencia es perfecta negativa, se dice que las variables son contra-monotónicas. En ambos casos, estas situaciones pueden ser descritas por una cópula específica. Adicionalmente, cuando las variables aleatorias son independientes, su relación se resume en la cópula de independencia.
- La cópula es invariante ante transformaciones monótonas crecientes, incluyendo las transformaciones afines positivas. Sean R_1, R_2, \dots, R_d variables aleatorias con funciones de distribución marginales F_1, F_2, \dots, F_d y cópula C . Si T_1, T_2, \dots, T_d son transformaciones monótonas crecientes, esta propiedad implica que R_1, R_2, \dots, R_d y $T_1(R_1), T_2(R_2), \dots, T_d(R_d)$ tienen la misma cópula C . Esta propiedad muestra que la estructura de dependencia es invariante ante traslaciones, ya que las que cambian en estos casos son las distribuciones marginales (McNeil *et al.*, 2005). Esto implica que la misma cópula puede ser usada para la distribución conjunta de R_1, \dots, R_d , como para $\ln(R_1), \dots, \ln(R_d)$; esta propiedad de invarianza hace de las cópulas una herramienta muy útil en diversas aplicaciones.

- Como la cópula representa la estructura de dependencia independientemente de las funciones de distribución marginales, esta puede tratar con múltiples especificaciones de funciones de distribución, inclusive aquellas que no tienen definidos algunos de sus momentos, característica propia de las series financieras de colas pesadas donde $E[R_i^2] = +\infty$.

A continuación se presentan las cópulas fundamentales: independencia, comonotónica y contramonotónica. Como el propósito de este trabajo es cuantificar el nivel de dependencia de dos mercados bursátiles usando cópulas, se presenta el caso particular de cópulas bivariadas.

Cópula de independencia

Si X y Y son dos variables aleatorias independientes, se tiene que su función de distribución es $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, y la cópula de independencia está dada por:

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(F_X^{-1}(X) \leq F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(Y) \leq F_Y^{-1}(y)) \\ &= P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$C^I(u_1, u_2) = u_1 u_2$$

Donde $u_1 = F_X(x)$ y $u_2 = F_Y(y)$ y U_1 y U_2 son dos variables aleatorias que siguen una distribución uniforme entre cero y uno.

Cópula comonotónica

Si X y Y son dos variables aleatorias que presentan dependencia positiva perfecta (comonotonicidad), la cópula que representa esta dependencia está definida por:

$$C^U(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\} \quad (9)$$

Donde $u_1 = F_X(x)$ y $u_2 = F_Y(y)$

Cópula contramonotónica

Si X y Y son dos variables aleatorias que presentan dependencia negativa perfecta (contramonotonicidad), la cópula que representa esta dependencia está definida por:

$$C^l(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \quad (10)$$

Donde $u_1 = F_X(x)$ y $u_2 = F_Y(y)$.

Las cópulas anteriores cumplen la siguiente desigualdad:

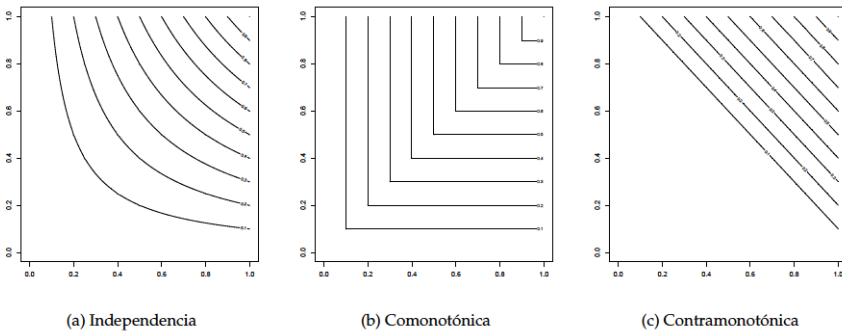
$$C^l(u_1, u_2) < C^I(u_1, u_2) < C^U(u_1, u_2)$$

Esta desigualdad permite clasificar las cópulas según su grado de concordancia en:

- Si una cópula se ubica entre C^I y C^U es dependiente en el cuadrante positivo (PQD, por sus siglas en inglés); lo que intuitivamente implica que X y Y tienen una probabilidad alta de tomar valores en la misma dirección que en el caso de variables con las mismas marginales pero independientes.
- Si una cópula se ubica entre C^I y C^I es dependiente en el cuadrante negativo (NQD, por sus siglas en inglés); lo que intuitivamente implica que X y Y tienen una probabilidad alta de tomar valores en direcciones opuestas que en el caso de variables con las mismas marginales pero independientes.

Las gráficas de las curvas de nivel de la cópula permiten identificar el nivel de concordancia; entre más concordancia las curvas de nivel se ubicarán más a la izquierda. La Gráfica 1 presenta las curvas de nivel de las cópulas de contramonotonidad, independencia y comonotonidad. Las cópulas PQD se encontrarán a la izquierda de la cópula de independencia y a la derecha de la cópula de comonotonidad. De forma análoga, las cópulas NQD se encontrarán a la derecha de la cópula de independencia y a la izquierda de la cópula de comonotonidad.

GRÁFICA 1.
CURVAS DE NIVEL DE LAS CÓPULAS FUNDAMENTALES



Fuente: elaboración propia.

Medidas de dependencia

La diversificación es cuantificada con varias medidas de dependencia. Si dos activos tienen baja dependencia, de acuerdo al modelo CAPM, el riesgo sistemático que comparten es bajo y ofrecen mejor diversificación. Se dice que dos activos X y Y son dependientes o asociados si $F_{XY}(x, y) \neq F_X(x)F_Y(y)$. En el caso bivariado, si $\delta(X, Y)$ es un escalar que denota una medida de dependencia entre las dos variables, Embrechts, McNeil y Straumann (2002) definieron las siguientes cuatro propiedades para este tipo de medida:

1. $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ (simetría);
2. $-1 \leq \delta(X, Y) \leq +1$ (normalización);
3. $\delta(X, Y) = 1 \Leftrightarrow X$ y Y son comonotónicas; $\delta(X, Y) = -1 \Leftrightarrow X$ y Y son contramonotónicas;
4. Para transformaciones estrictamente monotónicas $T : R \rightarrow R$ de X :

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) T & \text{Es creciente} \\ -\delta(X, Y) T & \text{Es decreciente} \end{cases}$$

De acuerdo con Cherubini, Luciano y Vecchiato (2004) la asociación entre dos variables puede ser medida usando diferentes alternativas. El autor examinó cuatro en particular: correlación lineal, concordancia, dependencia en colas y dependencia en cuadrantes. A continuación se presentan las tres primeras y su estimación a partir de la cópula.

Coefficiente de correlación

El coeficiente de correlación, también conocido como el coeficiente de Pearson, es la medida de dependencia más popular en finanzas, y permite cuantificar las oportunidades de diversificación sobre toda la distribución; está definido por:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (11)$$

ρ_{XY} cumple las propiedades de simetría y normalización, además es invariante ante transformaciones lineales. Sin embargo, tiene las siguientes desventajas: $\rho_{XY} = 0$ no implica que las variables sean independientes; esto solo es cierto en caso de distribución normal o de distribuciones elípticas. ρ_{XY} no está definido para distribuciones con colas pesadas, donde la varianza no existe, característica propia de series financieras. Boyer, Gibson y Loretan (1997) encontraron que el coeficiente de correlación no brinda suficiente información en presencia de dependencia asimétrica. Adicionalmente, ρ_{XY} no es invariante ante transformaciones monotónicas no lineales, por lo tanto la correlación entre los datos de los retornos difiere de la correlación del logaritmo de los retornos. Estas desventajas hacen necesario el uso de medidas de concordancia.

Coefficientes de correlación de rango o concordancia

Considere X y Y variables aleatorias con funciones de distribución marginal F_X y F_Y , con función de distribución conjunta F_{XY} . El coeficiente de rango de Spearman (ρ_S) está definido por:

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_X(X), F_Y(Y)) \quad (12)$$

Donde ρ es el coeficiente de correlación de Pearson. Por lo tanto, ρ_S es, simplemente, la correlación lineal entre X y Y , transformadas a través de sus funciones de distribución marginal.

Y el coeficiente de rangos de Kendall (ρ_τ) está definido por:

$$\rho_\tau(X, Y) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0], \quad (13)$$

Donde (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son dos parejas de variables aleatorias independientes con una función de distribución bivariada F_{XY} . El primer término de la derecha hace referencia a la probabilidad de concordancia y el segundo, a la probabilidad de discordancia, entonces ρ_τ es una medida de la diferencia relativa entre estas dos probabilidades.

ρ_S y ρ_τ son medidas basadas en el concepto de concordancia, el cual hace referencia a la propiedad, según la cual valores altos de una variable están asociados a valores altos de la otra variable, mientras que la discordancia hace referencia a la propiedad según la cual valores altos de una variable están asociados a valores pequeños de la otra variable.

ρ_S y ρ_τ cumplen las cuatro propiedades definidas por Embrechts *et al.* (2002), además, toman el valor de cero bajo independencia de X y Y .

Las medidas de concordancia son muy útiles cuando los datos presentan observaciones extremas; por ser basadas en rangos, son robustas a la presencia de valores atípicos. Las principales ventajas de estas medidas con respecto a la correlación de Pearson son la invarianza bajo transformaciones monótonas crecientes y su capacidad para identificar los casos en que existe dependencia perfecta no lineal.

Si las funciones de distribución marginales son continuas, es posible definir el coeficiente de correlación de Spearman (ρ_S) y el coeficiente de correlación de Kendall (ρ_τ) en términos de la cópula. Nelsen (2006) demostró que:

$$\rho_S(U, V) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \quad (14)$$

$$\rho_\tau(U, V) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (15)$$

Las ecuaciones (14) y (15) son usadas en muchos casos para estimar numéricamente los coeficientes $\rho_S(U, V)$ y $\rho_\tau(U, V)$.

Dependencia en colas

En términos económicos, la importancia de estudiar la dependencia en colas estriba en la necesidad de determinar que si dos activos son asintóticamente independientes, es poco probable que ambos activos experimenten retornos extremos. Por

otra parte, si dos activos son asintóticamente dependientes, ellos pueden experimentar conjuntamente ganancias o pérdidas extremas.

Una de las ventajas de las cópulas, es que, a partir de ellas, se pueden obtener coeficientes para medir la dependencia en las colas de la distribución conjunta. τ^U y τ^L son parámetros que miden la dependencia conocida como dependencia en colas. Estas medidas se definen a continuación.

Definición: si el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P[U \leq \epsilon/V \leq \epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P[V \leq \epsilon/U \leq \epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} C(\epsilon, \epsilon)/\epsilon = \tau^L \quad (16)$$

Existe, entonces la cópula presenta dependencia en la cola inferior si $\tau^L \in (0, 1]$, y no presenta dependencia en la cola inferior si $\tau^L = 0$. De forma análoga, si el límite

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 1^-} P[U > \delta/V > \delta] &= \lim_{\delta \rightarrow 1^-} P[V > \delta/U > \delta] & (17) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 1^-} (1 - 2\delta + C(\delta, \delta))/(1 - \delta) = \tau^U \end{aligned}$$

Existe, entonces la cópula presenta dependencia en la cola superior si $\tau^U \in (0, 1]$, y no presenta dependencia en la cola superior si $\tau^U = 0$.

Cuando se mide la dependencia en dos formas, con correlaciones y con dependencia en las colas, y se observan discrepancias entre las dos, esto sugiere complejidad de la dependencia entre las dos variables, e informa sobre posibles errores al considerar solo las correlaciones. Por ejemplo, si dos activos presentan baja correlación y altos coeficientes de dependencia en colas, un inversionista, basándose solo en los coeficientes de correlación, puede pensar que el riesgo sistemático que comparten es bajo, sin embargo el inversionista queda expuesto a un alto riesgo sistemático de pérdidas extremas.

Los coeficientes de dependencia τ^L y τ^U capturan el comportamiento de las variables aleatorias durante eventos extremos; en este estudio servirán para medir la probabilidad de que el mercado bursátil colombiano presente una caída extrema, dado el caso de que mercado americano haya presentado una caída similar.

Familias de cópulas

De acuerdo con las características particulares de las cópulas es posible clasificarlas en los siguientes tres grupos o familias de cópulas.

Cópulas elípticas

Las cópulas elípticas son usadas en estudios financieros porque garantizan la condición de subaditividad y el principio de diversificación de portafolios (CAPM). Las

cóputas más populares de esta familia son la Gaussiana y la t de Student. La cópula Gaussiana tiene coeficientes de dependencia de colas igual a cero ($\tau^U = \tau^L=0$), mientras que la cópula t de Student tiene simetría en los coeficientes de dependencia ($\tau^U = \tau^L$).

La cópula Gaussiana o normal está definida por la ecuación (18).

$$C^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\theta xy + y^2}{2(1-\theta^2)}\right) dx dy \tag{18}$$

Donde x y y se distribuyen de manera conjuntamente normal con coeficiente de correlación de Pearson $\theta \in [-1, 1]$ y $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de la distribución normal estándar.

La cópula t de Student definida por la ecuación (19).

$$C^t(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\theta xy + y^2}{\nu(1-\theta^2)}\right)^{-(\nu+2)/2} dx dy \tag{19}$$

Donde x y y se distribuyen conjuntamente t de Student con ν grados de libertad y coeficiente de correlación de Pearson $\theta \in [-1, 1]$ y $t_{\nu}^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de la distribución t de Student con ν grados de libertad.

Para modelar la función de distribución conjunta de X y Y con las cópulas Gaussianas y t de Student, las funciones $\Phi^{-1}(\cdot)$ y $t_{\nu}^{-1}(\cdot)$ se evalúan en las variables $u_1 = F_X(x)$ y $u_2 = F_Y(y)$, donde F_X y F_Y son las distribuciones marginales de X y Y , que pueden ser diferentes.

CUADRO 1.

MEDIDAS DE DEPENDENCIA PARA LAS CÓPUTAS C^{GA} Y $C^{T_{\nu}}$

Coefficientes	Cópula Gaussiana	Cópula t de Student
Spearman (ρ_S)	$\frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{1}{2}\theta\right)$	-
Kendall (ρ_{τ})	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\theta)$	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\theta)$
Colas ($\tau^L = \tau^U$)	0	$2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\theta)}{1+\theta}}\right)$

Fuente: Becerra y Melo (2008).

En el Cuadro 1 se presentan las expresiones para estimar las medidas de dependencia a partir de los parámetros de las cópulas Gaussiana y t de Student. De acuerdo con Liu (2006) el Coeficiente de Spearman (ρ_S) para la cópula t de Student se puede obtener a partir de las ecuaciones (14) y (19) por integración numérica. El parámetro θ para ambas cópulas es el coeficiente de correlación de Pearson entre las dos variables; en el caso multivariado el parámetro θ es la matriz de correlación.

Cóputas de Arquímedes

Esta familia de cóputas permite describir diferentes tipos de dependencia en las colas. Su aplicabilidad se debe a que son definidas a partir de una función generadora, entre las más populares de esta familia están las cóputas de Clayton, Gumbel y Frank. Las cóputas de Arquímedes están definidas por la expresión (20).

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \tag{20}$$

Donde $\phi : [0, 1] \rightarrow R^+$ se denomina la función generadora, la cual debe ser continua, estrictamente decreciente, convexa y cumple que $\phi(1) = 0$, $\phi^{[-1]}$ es la pseudo-inversa de ϕ . En el caso en que $\phi(0) \rightarrow +\infty$, entonces ϕ es un generador estricto con $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$; en otro caso la pseudo-inversa está definida por la siguiente expresión:

$$\phi^{[-1]}(s) = \begin{cases} \phi^{-1}(s) & \text{si } 0 \leq s \leq \phi(0) \\ 0 & \text{si } \phi(0) \leq s \leq +\infty \end{cases}$$

Las cóputas de independencia y contramonotonidad cumplen la definición de cóputas de Arquímedes. En el Cuadro 2 se presentan las funciones generadoras y las formas de las principales cóputas de Arquímedes: Clayton, Gumbel y la Frank.

CUADRO 2.
FUNCIÓN GENERADORA Y FORMA DE LAS PRINCIPALES CÓPUTAS DE ARQUÍMEDES

Cóputa	Función generadora	Forma de la cóputa	Parámetro
Clayton	$\frac{1}{\theta}(s^{-\theta} - 1)$	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{1/\theta}$	$\theta > 0$
Gumbel	$(-\log(s))^\theta$	$\exp\left\{-\left((-\log(u_1))^{-\theta} + (-\log(u_2))^{-\theta}\right)^{1/\theta}\right\}$	$\theta > 1$
Frank	$-\log\left(\frac{\exp(-\theta s)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$	$-\frac{1}{\theta} \log\left(1 - \frac{(1-\exp(-\theta u_1))(1-\exp(-\theta u_2))}{1-\exp(-\theta)}\right)$	$\theta \in \Re$

Fuente: Becerra y Melo (2008).

En McNeil *et al.* (2005) se encuentran expresiones para el coeficiente de rangos de Kendall y para los coeficientes de dependencia en colas para las principales cóputas de Arquímedes, a partir del parámetro de la cóputa, los cuales se presentan en el Cuadro 3.

En el Cuadro 3 se observa que la cóputa de Clayton no captura dependencia en la cola superior, solo modela dependencia en la cola inferior; por su parte, la cóputa de Gumbell captura únicamente la dependencia en la cola superior, mientras que la cóputa Frank no modela las dependencias en colas.

CUADRO 3.
COEFICIENTES DE KENDALL Y DE DEPENDENCIA EN COLAS PARA LAS PRINCIPALES CÓPULAS DE ARQUÍMEDES

Cópula	Kendall(ρ_τ)		τ^L	τ^U
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$		$2^{-1/\theta}$	0
Gumbel	$1 - \frac{1}{\theta}$		0	$2 - 2^{1/\theta}$
Frank	$1 - \frac{4}{\theta}$	$1 - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t-1} dt$	0	0

Fuente: Becerra y Melo (2008).

Cópulas de valor extremo

Son derivadas de la estructura de dependencia de la distribución generalizada de valor extremo multivariadas; su mayor aplicabilidad se da en el campo de la medición de riesgo. Una cópula se denomina de valor extremo si satisface la condición de la ecuación (21).

$$C(u_1^t, u_2^t) = [C(u_1, u_2)]^t \quad \forall t > 0 \tag{21}$$

Una forma alternativa de representar las cópulas de valor extremo es mediante la ecuación (22).

$$C(u_1, u_2) = \exp \left[\log(u_1 u_2) A \left(\frac{\log(u_1)}{\log(u_1 u_2)} \right) \right] \tag{22}$$

Donde $A : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ es una función convexa tal que $\max(\eta, 1 - \eta) \leq A(\eta) \leq 1 \quad \forall \eta \in [0, 1]$, A se conoce como la función de dependencia.

Como las cópulas de independencia, comonotonicidad y Gumbel se pueden reescribir como la ecuación (18), se pueden clasificar en esta familia. Las cópulas más representativas de esta familia son: Gumbel II, Galambos, Husler-Reiss y la cópula de Marshall-Olkin. En el Cuadro (4) se presentan las formas de las cópulas y sus funciones de dependencia de acuerdo con Bouyé *et al.* (2000).

CUADRO 4.
FUNCIÓN DE DEPENDENCIA Y FORMA DE LAS PRINCIPALES CÓPULAS DE VALOR EXTREMO

Cópula	Función de dependencia	Forma de la cópula	Parámetro
Gumbel II	$\theta\eta^2 - \theta\eta + 1$	$u_1 u_2 \exp \left(\frac{\theta \tilde{u}_1 \tilde{u}_2}{u_1 + u_2} \right)$	$\theta \in [0, 1]$
Galambos	$1 - (\eta^{-\theta} + (1 - \eta)^{-\theta})^{-1/\theta}$	$u_1 u_2 \exp [(\tilde{u}_1^{-\theta} + \tilde{u}_2^{-\theta})^{-1/\theta}]$	$\theta \geq 0$
Husler-Reiss	$\eta\xi(\eta; \theta) + (1 - \eta)\xi(1 - \eta; \theta)$	$\exp [-\tilde{u}_1 \vartheta(u_1, u_2; \theta) - \tilde{u}_2 \vartheta(u_2, u_1; \theta)]$	$\theta \geq 0$
Marshall-Olkin	$\max(1 - \theta_1 \eta, 1 - \theta_2(1 - \eta))$	$u_1^{1-\theta_1} u_2^{1-\theta_2} \min(u_1^{\theta_1}, u_2^{\theta_2})$	$\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$

Fuente: Becerra y Melo (2008).

Donde:

$$\tilde{u} = -\log u, \vartheta(u_1, u_2; \theta) = \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2}\theta \log \left(\frac{\log u_1}{\log u_2} \right) \right], \text{ y}$$

$$\xi(\eta; \theta) = \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2}\theta \log \left(\frac{\log(\eta)}{\log(1-\eta)} \right) \right].$$

Hipótesis

En esta investigación se enfatiza la cuantificación del riesgo sistemático entre los mercados bursátiles colombiano y estadounidense, a partir de la cuantificación de la dependencia en toda la distribución y la dependencia en colas. Las cópulas de Independencia (berchmark), Gaussiana (berchmark), *t* de Student, Clayton, Gumbel, Frank y Galambos se utilizan para ajustar la dependencia entre las pérdidas de los dos mercados bursátiles; con las cópulas que mejor ajuste presenten se estiman los coeficientes de concordancia de Kendall y Spearman y los coeficientes de dependencia en cola. Estos permiten contrastar las hipótesis de este trabajo:

- Los mercados de bursátiles de Colombia y Estados Unidos comparten riesgo sistemático.
- De acuerdo con Erb *et al.* (1994) los mercados bursátiles son más dependientes cuando están a la baja que cuando están en alza; esto implica que comparten mayor riesgo sistemático cuando están a la baja. Este estudio pretende validar la anterior afirmación para los mercados de capitales de Colombia y Estados Unidos.

MODELO

Para cuantificar la dependencia estructural del mercado bursátil colombiano y del estadounidense, se siguieron los lineamientos del modelo CAPM, el riesgo sistemático que comparten ambos mercados es medido a partir de coeficientes de dependencia, tanto global como en colas; estos coeficientes se estiman modelando la dependencia de las pérdidas de los dos mercados con cópulas bivariadas. Se calculó la cópula empírica y se ajustaron las siguientes cópulas: de independencia, la Gaussiana, la *t* de Student, Clayton, Gumbel, Frank y Galambos.

Especificación de variables

Para estudiar la dependencia estructural entre dos mercados se usó la distribución de pérdidas de los índices bursátiles, para el mercado colombiano se tomó el índice bursátil Col20, para el mercado estadounidense se tomaron los índices Dow Jones y el Standard & Poor's 500. Para este estudio se tomó el valor de cierre diario de los índices en el periodo comprendido entre el 15 de julio de 2002 y el 14 de septiembre de 2009 se consideraron los días donde los dos mercados estaban operando. Se utilizó este periodo por tres razones básicas: la primera, la BVC

comenzó a usar el Col20 a partir de enero del 2008, y tiene calculado el índice hacia atrás desde el 15 de julio de 2002. La segunda, este periodo se considera representativo porque en él los mercados bursátiles de Estados Unidos y Colombia presentaron épocas de boom, estabilidad y crisis. Y la tercera, se obtuvieron 1706 datos; este número de datos es adecuado para el procesamiento de los modelos econométricos usados. Para cada índice se calculó la pérdida diaria a partir de la ecuación (23).

$$x_t = -\log \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (23)$$

Donde: x_t es la pérdida (el negativo del retorno) del índice y P_t es el valor con el que cerró el índice en el periodo t .

La metodología desarrollada en esta investigación siguió los lineamientos de los modelos de dinámica multivariados basados en la cópula SCOMDY⁶, propuestos por Chen y Fan (2006). La metodología se implementó en cuatro pasos: estimación de las distribuciones marginales, estimación de las cópulas; evaluación y selección de cópulas, y la estimación de los coeficientes de correlación y dependencia en colas.

Estimación de las distribuciones marginales

De acuerdo con Campbell, Lo y MacKinlay (1997) los retornos diarios, tanto de acciones individuales como de índices, presentan más masa en las colas que la que se puede modelar con la distribución normal. Adicionalmente para modelar la volatilidad condicional de los retornos financieros Bollerslev (1997) propuso un proceso AR(P)-GARCH(p,q), planteado en la expresión (24), este proceso ha sido usado recurrentemente, por Patton (2002, 2006), Jondeau y Rockinger (2006), Hu (2006 y 2008).

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \sum_{i=1}^P \phi_i x_{t-i} + e_t \text{ con } e_t \sim D(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \Omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Donde x_t es la pérdida del índice en el periodo t ; μ es una constante; ϕ_i es el i -ésimo coeficiente autoregresivo; e_t es una perturbación (ruido blanco) con media cero y varianza condicional σ_t^2 ; Ω es una constante; α_i es el i -ésimo coeficiente de la parte Arch de la varianza condicional σ_t^2 ; y β_j es el j -ésimo coeficiente de la parte Garch de la varianza condicional σ_t^2 .

⁶Por sus siglas en Inglés: Semiparametric COpula-based Multivariate DYnamic.

Los valores de P para la parte AR del modelo se seleccionan a partir de las autocorrelaciones parciales significativas de la serie x_t . Los valores de p y q para la parte GARCH del modelo se seleccionan a partir de las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales significativas de los residuales al cuadrado del modelo AR.

Para modelar las pérdidas de los tres índices se usaron modelos AR (P) - GARCH (p,q); para las perturbaciones se revisaron las siguientes distribuciones en sus versiones simétrica y asimétrica: normal, t de Student y la distribución generalizada de errores (GED). Los parámetros de forma y asimetría se estimaron por máxima verosimilitud. Se encontró que la distribución que mejor se ajustó para las tres series de pérdidas fue la GED asimétrica.

En los cuadros 5, 6 y 7 se presentan las estimaciones para los modelos AR-GARCH para las tres series de pérdidas suponiendo que las perturbaciones siguen la GED asimétrica; las estimaciones se realizaron por el método de máxima verosimilitud. Se presentan a continuación las estimaciones significativas.

CUADRO 5.

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL AR(10)-GARCH(1,1) PARA LAS PÉRDIDAS DEL COL20

Parameter	Estimate	Std. Error	t value	P-Value	
mu	-7,092e-04	2,610e-04	-2,718	0,006575	**
ar1	2,318e-01	2,861e-02	8,103	4,44e-16	***
ar7	5,069e-02	2,112e-02	2,400	0,016401	*
ar9	4,163e-02	2,205e-02	1,888	0,058982	,
ar10	4,729e-02	2,222e-02	2,129	0,033283	*
omega	2,388e-04	6,652e-05	3,590	0,000331	***
alpha1	2,916e-01	3,748e-02	7,780	7,33e-15	***
beta1	7,008e-01	4,025e-02	17,411	< 2e-16	***
skew	1,107e+00	4,062e-02	27,257	< 2e-16	***
shape	1,347e+00	6,582e-02	20,467	< 2e-16	***

Nota. ***, **, *, . indican significancia al 0,001, 0,01, 0,05 y 0,1, respectivamente.

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 6.

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL AR(1)-GARCH(2,1) PARA LAS PÉRDIDAS DEL DJ

Parameter	Estimate	Std. Error	t value	P-Value	
mu	-3,692e-04	1,961e-04	-1,883	0,05970	,
ar1	-6,547e-02	2,197e-02	-2,980	0,00288	**
omega	1,166e-06	4,749e-07	2,455	0,01409	*
alpha2	9,166e-02	3,142e-02	2,917	0,00354	**
beta1	8,985e-01	1,833e-02	49,027	< 2e-16	***
skew	1,087e+00	3,392e-02	32,052	< 2e-16	***
shape	1,436e+00	7,370e-02	19,486	< 2e-16	***

Nota. ***, **, *, . indican significancia al 0,001, 0,01, 0,05 y 0,1, respectivamente.

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 7.
ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL AR(1)-GARCH(2,1) PARA EL SP500

Parameter	Estimate	Std. Error	t value	P-Value	
mu	-4,191e-04	1,951e-04	-2,149	0,03165	*
ar1	-8,005e-02	1,987e-02	-4,029	5,59e-05	***
omega	1,207e-06	5,063e-07	2,384	0,01714	*
alpha2	9,789e-02	3,428e-02	2,856	0,00430	**
beta1	8,935e-01	1,852e-02	48,241	< 2e-16	***
skew	1,118e+00	2,916e-02	38,331	< 2e-16	***
shape	1,440e+00	7,598e-02	18,948	< 2e-16	***

Nota. ***, **, *, . indican significancia al 0,001, 0,01, 0,05 y 0,1, respectivamente.

Fuente: elaboración propia.

Para comprobar las bondades del ajuste, se tomaron los residuos y se realizaron las siguientes pruebas:

- Ljung-Box: sobre los residuales (R) para determinar el ajuste del modelo en media condicionada, es decir, la parte AR del modelo. Ljung-Box sobre los residuales elevados al cuadrado (R^2) para determinar el ajuste del modelo en varianza condicionada, es decir, la parte GARCH del modelo.
- ARCH: para probar que no queda efecto GARCH en los residuales estandarizados.
- Kolmogorov-Smirnov: para determinar el ajuste de la distribución propuesta para las perturbaciones.

En los Cuadros 8, 9 y 10 se presentan los resultados de las pruebas de bondad de ajuste de los tres modelos estimados.

CUADRO 8.
PRUEBAS APLICADAS A LOS RESIDUALES ESTANDARIZADOS (R) DEL AR-GARCH PARA LAS PÉRDIDAS DEL COL20

Prueba	Aplicada a	Estadístico	Estimación	Valor P
Ljung-Box	R	Q(10)	11,55816	0,3157148
Ljung-Box	R	Q(15)	16,16476	0,3711867
Ljung-Box	R	Q(20)	17,01979	0,6516884
Ljung-Box	R^2	Q(10)	7,477775	0,6797002
Ljung-Box	R^2	Q(15)	12,32565	0,6542312
Ljung-Box	R^2	Q(20)	14,74082	0,791041
LM Arch	R	TR^2	8,429236	0,7507522

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 9.

PRUEBAS APLICADAS A LOS RESIDUALES ESTANDARIZADOS (R) DEL ARGARCH PARA LAS PÉRDIDAS DEL DJ

Prueba	Aplicada a	Estadístico	Estimación	Valor P
Ljung-Box	R	Q(10)	10,05772	0,4354444
Ljung-Box	R	Q(15)	18,82134	0,2219443
Ljung-Box	R	Q(20)	19,64916	0,4800596
Ljung-Box	R^2	Q(10)	8,246343	0,6047883
Ljung-Box	R^2	Q(15)	9,867352	0,8279998
Ljung-Box	R^2	Q(20)	13,47019	0,8563116
LM Arch	R	TR^2	9,616675	0,6495493

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 10.

PRUEBAS APLICADAS A LOS RESIDUALES ESTANDARIZADOS (R) DEL ARGARCH PARA LAS PÉRDIDAS DEL SP500

Prueba	Aplicada a	Estadístico	Estimación	Valor P
Ljung-Box	R	Q(10)	11,57090	0,3147998
Ljung-Box	R	Q(15)	20,20219	0,1643128
Ljung-Box	R	Q(20)	21,22460	0,3840202
Ljung-Box	R^2	Q(10)	9,169975	0,516052
Ljung-Box	R^2	Q(15)	12,60841	0,6325152
Ljung-Box	R^2	Q(20)	13,81446	0,8397772
LM Arch	R	TR^2	11,04240	0,5252888

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 11.

ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE LAS SERIES DE RESIDUOS ESTANDARIZADOS

	res_rCol20	res_rdj	res_rsp500
nobs	1705,00	1705,00	1705,00
Minimum	-3,45	-2,95	-2,74
Maximum	4,35	6,57	6,92
Mean	-0,00	0,03	0,03
Median	-0,03	-0,02	-0,05
SE Mean	0,02	0,02	0,02
LCL Mean	-0,05	-0,02	-0,02
UCL Mean	0,05	0,07	0,07
Stdev	1,00	1,01	1,01
Skewness	0,45	0,37	0,43
Kurtosis	1,47	1,33	1,41
Kol-Sm D	0,02	0,02	0,03
Kol-Sm p-value	0,98	0,84	0,51

Fuente: elaboración propia.

En el Cuadro 11 se presentan estadísticas básicas de los residuales estandarizados de los modelos AR(P) - GARCH(p,q) con que se ajustaron las pérdidas del Col20, DJ y SP500; además, se presentan los contrastes de Kolmogorov-Smirnov, que comprueban el supuesto de que las perturbaciones estandarizadas se distribuyen GED asimétrica.

Con los modelos, AR(P) - GARCH(p,q) se ha modelado la distribución marginal de las pérdidas; y los residuos contienen la información de la dependencia entre las series de pérdidas.

Estimación de las cópulas

Para estimar las cópulas se usó el método de máxima pseudo-verosimilitud, que consiste en usar una pseudo-muestra en lugar de los datos originales y calcular los parámetros de la cópula especificada por máxima verosimilitud.

Con los residuos de los modelos AR(P)-GARCH(p,q) se genera la pseudo-muestra, a partir de la función de distribución marginal estimada por máxima verosimilitud presentada en la sección anterior. Las pseudo-muestras se generan a partir de la expresión (25).

$$u_{it} = F_i(\hat{e}_{it}) \quad (25)$$

Donde u_{it} es la pseudo-observación en el periodo t de la i -ésima variable; $F_i()$ es la función de distribución de las perturbaciones del modelo; AR(P)-GARCH(p,q) para la i -ésima variable; y \hat{e}_{it} es el residual del modelo AR(P)-GARCH(p,q) en el momento t , para la i -ésima variable.

Para que la pseudo-muestra sea válida para estimar la cópula, debe seguir una distribución uniforme en $[0, 1]$, lo que garantiza la correcta representación del *Teorema de Sklar*.

Se evaluaron los residuales en la función de distribución GED asimétrica, con los parámetros de forma y asimetría estimados, y se obtuvieron las pseudo-muestras aleatorias. En el Cuadro 12 se presentan las estadísticas básicas de las pseudo-muestras generadas y el test de de Kolmogorov-Smirnov para comprobar el supuesto de distribución uniforme de estas.

Para estimar los parámetros de la cópula se encuentran los valores que maximizan la expresión (26).

$$l(\theta/E_1, \dots, E_n) = \sum_{t=1}^n \log c(F_1(\hat{e}_{1t}), F_2(\hat{e}_{2t})) \quad (26)$$

$$l(\theta/U_1, \dots, U_n) = \sum_{t=1}^n \log c(u_{1t}, u_{2t})$$

Donde θ es el vector de parámetros de la cópula C , $u_{it} = F_i(\hat{e}_{it})$, $E_t = [\hat{e}_{1t}, \hat{e}_{2t}]'$, $U_t = [u_{1t}, u_{2t}]'$, n es el número de datos disponibles y c es la función de densidad de la cópula C , que está definida por: $c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$.

CUADRO 12.
ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE LAS PSEUDO-MUESTRAS GENERADAS A PARTIR
DE LAS SERIES DE RESIDUOS ESTANDARIZADOS

	F_rCol20	F_rdj	F_rsp500
nobs	1705,00	1705,00	1705,00
Mínimum	0,00	0,00	0,00
Maximum	1,00	1,00	1,00
Mean	0,50	0,51	0,51
Median	0,51	0,51	0,51
SE Mean	0,01	0,01	0,01
LCL Mean	0,49	0,49	0,49
UCL Mean	0,51	0,52	0,52
Stdev	0,29	0,29	0,29
Skewness	-0,01	-0,04	-0,04
Kurtosis	-1,20	-1,18	-1,18
Kol-Sm D	0,01	0,02	0,02
Kol-Sm p-value	0,85	0,38	0,30

Fuente: elaboración propia.

En los Cuadros 13, 14 y 15 se presentan las estimaciones de los parámetros para las cópulas bivariadas mencionadas, correspondientes a las parejas de las pseudo-muestras de las pérdidas de: Col20-DJ, Col20-SP500 y DJ-SP500; esta última se usa como benchmark.

CUADRO 13.
ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS DE LAS CÓPULAS PARA LAS PSEUDO-MUESTRAS DE LAS PÉRDIDAS DE COL20 Y DJ

	Estimador de θ	Error Estándar	Log Verosimilitud
Normal	0,22	0,08	40,76
T_{65}	0,21	0,07	40,98
Clayton	0,22	0,03	26,94
Gumbel	1,13	0,02	33,79
Frank	1,23	0,15	34,77
Galambos	0,36	0,22	34,49

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 14.
ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS DE LAS CÓPULAS PARA LAS PSEUDO-MUESTRAS DE PÉRDIDAS DE COL20 Y SP500

	Estimador de θ	Error Estándar	Log Verosimilitud
Normal	0,22	0,14	43,05
T_{150}	0,22	0,14	43,05
Clayton	0,23	0,03	28,51
Gumbel	1,13	0,04	35,45
Frank	1,25	0,15	36,08
Galambos	0,36	0,53	36,44

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 15.

ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS DE LAS CÓPULAS PARA LAS PSEUDO-MUESTRAS DE PÉRDIDAS DE DJ Y SP500

	Estimador de θ	Error Estandar	Log Verosimilitud
Normal	0,97	0,00	2393,22
T_5	0,97	0,00	2432,91
Clayton	6,73	0,23	1969,06
Gumbel	5,92	4,19	2341,64
Frank	22,72	0,74	2167,84
Galambos	5,21	4,24	2338,37

Fuente: elaboración propia.

Evaluación y selección de cópulas

Para evaluar el ajuste de una determinada cópula, se usa la prueba de bondad de ajuste desarrollada por Genest, Rémillard y Beaudoin (2009) y criterios de selección de cópulas. Tanto la prueba como la mayoría de los criterios se basan en la comparación entre la cópula teórica propuesta y la cópula empírica generada, en este caso, por las pseudo-muestras.

Cópula empírica

De acuerdo con Trivedi y Zimmer (2005), la idea básica es calcular una cópula empírica no paramétrica y compararla con los valores estimados por las cópulas propuestas. Para el caso bivariado la cópula empírica $C_e(F_X(X), F_Y(Y))$ se calcula a partir de la expresión (27).

$$\widehat{C}_e(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{(X_j \leq X_i) \wedge (Y_j \leq Y_i)\} \quad (27)$$

Donde $\mathbf{1}\{\mathbf{A}\}$ es la función indicadora, que es igual a 1 si el evento \mathbf{A} ocurre. Se estiman las cópulas paramétricas teóricas propuestas, denotadas por $\widetilde{C}_p(X, Y)$. La cópula paramétrica que más se ajuste a la cópula empírica es la opción más apropiada. Por lo general, se evalúa el ajuste usando estimadores de distancia entre las dos cópulas.

Test de bondad de ajuste para cópulas

Para evaluar el ajuste de una determinada cópula se usó el test desarrollado por Genest *et al.* (2009) que se basa en el estadístico Cramer-von Mises. Esta prueba es un proceso empírico que compara la cópula empírica con la cópula teórica bajo la hipótesis nula, generando las muestras (bootstrap) de ambas cópulas. Las aproximaciones del valor p para esta prueba son obtenidas usando remuestreo.

CUADRO 16.
PRUEBA DE AJUSTE DE LAS CÓPULAS

Cópulas	Col20 .vs. DJ		Col20 .vs. SP500		dj .vs. SP500	
	Estadístico	Valor-P	Estadístico	Valor-P	Estadístico	Valor-P
Normal	0,01	0,97	0,01	0,95	0,02	0,00
T	0,01	0,98	0,01	0,96	0,02	0,20
Clayton	0,10	0,00	0,10	0,00	0,68	0,00
Gumbel	0,02	0,31	0,03	0,19	0,05	0,00
Frank	0,02	0,40	0,02	0,37	0,12	0,00
Galambos	0,02	0,29	0,03	0,15	0,05	0,00
Independencia	0,67	0,00	0,69	0,00	34,94	0,00

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los valores p del Cuadro 16 y teniendo en cuenta que la hipótesis de la prueba de bondad de ajuste es la igualdad de las dos cópulas, se concluye:

- Para las parejas de pseudo-muestras de las pérdidas de Col20-DJ y Col20-SP500 las cópulas de Clayton e independencia no se ajustan a las cópulas empíricas, por lo tanto se descartan en los análisis posteriores.
- Para la pareja de pseudo-muestras de las pérdidas de DJ-SP500, la única cópula que se ajusta a la cópula empírica fue la cópula t de Student, el resto de cópulas se descartan en los análisis posteriores.

Criterios de selección de cópulas

Para determinar entre las cópulas que pasaron el test de Genest *et al.* (2009) la que mejor se ajuste a los datos, se aplicaron los siguientes criterios reconocidos en la literatura:

- Valor de la función de log verosimilitud (26) propuesto por Joe (1997) evaluada en $\tilde{\theta}$, donde $\tilde{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de los parámetros de la cópula teórica propuesta.
- Criterios de información: el de Akaike (AIC), corregido por Joe (1997), el Bayesiano (BIC) y el de Hannan y Quinn (HQ) están definidos por la expresiones en la ecuación (28).

$$\begin{aligned}
 AIC &= l - M \\
 BIC &= -2l + M \log(n) \\
 HQ &= -2l + 2M \log(\log(n))
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Donde l es el valor de la función de log verosimilitud (26) evaluada en $\tilde{\theta}$ (el estimador de máxima verosimilitud de los parámetros de la cópula teórica propuesta), M es el número de parámetros estimados en la cópula y n el número de datos disponibles.

- Estadístico de bondad de ajuste (GOF) que permite comparar la cópula teórica estimada y la cópula empírica, generando estadísticas de la distancia entre las dos cópulas, entre ellos el propuesto por Romano (2002) definido en la expresión (29).

$$d(C_p, C_e) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\tilde{C}_p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - \hat{C}_e \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right]^2} \tag{29}$$

Donde C_p y C_e son las cópulas paramétrica propuesta y la empírica, respectivamente.

Con base en el estadístico de Anderson y Darling (1952), para medir la distancia entre las cópulas, los autores Junker y May (2005) y Ané y Kharoubi (2003) plantean los estadísticos presentados en (30).

$$AD = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \frac{\sqrt{n} \left| \tilde{C}_p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - \hat{C}_e \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|}{\sqrt{\tilde{C}_p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \left(1 - \tilde{C}_p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right)}} \tag{30}$$

$$IAD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\left[\tilde{C}_p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - \hat{C}_e \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right]^2}{\tilde{C}_p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \left(1 - \tilde{C}_p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right)}$$

En los Cuadros 17 y 18 se presentan los criterios de selección de cópulas expuestos para las pseudo-muestras de las pérdidas de Col20-DJ y Col20-SP500, respectivamente.

CUADRO 17.
CRITERIOS PARA SELECCIONAR LA CÓPULA BIVARIADA PARA PSEUDO-MUESTRAS DE PÉRDIDAS DE COL20 Y DJ

Cópulas	Log(veros.)	G.L.	AIC(Joe)	BIC	HQ	Dist.(Romano)	AD	IAD
Normal	40,76	1,00	39,76	-74,09	-77,51	0,74	0,50	0,03
T	40,98	2,00	38,98	-67,07	-73,93	0,73	0,50	0,03
Gumbel	33,79	1,00	32,79	-60,14	-63,57	0,65	0,76	0,04
Frank	34,77	1,00	33,77	-62,11	-65,53	0,78	0,56	0,04
Galambos	34,49	1,00	33,49	-61,54	-64,97	0,65	0,79	0,04

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la mayoría de criterios de selección en los cuadros 17 y 18, las cópulas que mejor ajuste brindan a la cópula empírica generada por las pseudo muestras de las pérdidas de Col20-DJ y Col20-SP500 son la Normal y la *t* de Student.

CUADRO 18.
CRITERIOS PARA SELECCIONAR LA CÓPULA BIVARIADA PARA PSEUDO-
MUESTRAS DE PÉRDIDAS DE COL20 Y SP500

Cóputas	Log(veros.)	G.L.	AIC(Joe)	BIC	HQ	Dist. (Romano)	AD	IAD
Normal	43,05	1,00	42,05	-78,66	-82,08	0,75	0,57	0,04
T	43,05	2,00	41,05	-71,22	-78,07	0,75	0,58	0,04
Gumbel	35,45	1,00	34,45	-63,45	-66,88	0,66	0,89	0,04
Frank	36,08	1,00	35,08	-64,73	-68,16	0,78	0,70	0,04
Galambos	36,44	1,00	35,44	-65,44	-68,87	0,66	0,92	0,04

Fuente: elaboración propia.

Para este estudio es relevante el ajuste de la t de Student porque esta cópula modela dependencia en ambas colas⁷. Sin embargo, la distancia de Romano da como mejor ajuste las cópulas de Gumbel y Galambos, las cuales modelan dependencia en cola superior. La cópula de Frank es descartada en los análisis posteriores.

Estimación de los coeficientes de correlación y dependencia en colas

En los Cuadros 19 y 20 se presentan las estimaciones de los coeficientes para las pseudo-muestras de las pérdidas del Col20-DJ y Col20-SP500.

CUADRO 19.
MEDIDAS DE DEPENDENCIA DE ACUERDO A LAS CÓPULAS PARA LAS PSEUDO-
MUESTRAS DE LAS PÉRDIDAS DEL COL20 Y DJ

	Rho Spearman	Tau Kendall	Tau Cola Inf.	Tau Cola Sup.
Normal	0,21	0,14		
T	0,21	0,14	0,00	0,00
Gumbel	0,17	0,11		0,15
Galambos	0,16	0,11		0,14

Fuente: elaboración propia.

CUADRO 20.
MEDIDAS DE DEPENDENCIA DE ACUERDO A LAS CÓPULAS PARA LAS PSEUDO-
MUESTRAS DE LAS PÉRDIDAS DEL COL20 Y SP500

	Rho Spearman	Tau Kendall	Tau Cola Inf.	Tau Cola Sup.
Normal	0,21	0,14		
T	0,21	0,14	0,00	0,00
Gumbel	0,17	0,12		0,15
Galambos	0,17	0,11		0,15

Fuente: elaboración propia.

⁷La t -Student modela dependencia simétrica en colas, mientras que la normal no permite modelar la dependencia en colas.

De acuerdo con las estimaciones de los cuadros 19 y 20, a partir de los Rho Spearman y los Tau Kendall para las diferentes cópulas, se concluye que las pseudo-muestras presentan una baja concordancia comonotónica y, a partir de los coeficientes de dependencia en cola de la cópula t de Student, muestra que las pseudo-muestras no presentan dependencia en colas; sin embargo las cópulas de Gumbel y Galambos muestran baja dependencia en la cola superior.

En el Cuadro 21 se presentan las estimaciones de los coeficientes de correlación de rango y dependencia en colas para las pseudo-muestras de las pérdidas del DJ y SP500.

CUADRO 21.

MEDIDAS DE DEPENDENCIA DE ACUERDO A LAS CÓPULAS PARA DE $F - RDJ$ Y $F - RSP500$

	Rho Spearman	Tau Kendall	Tau Cola Inf.	Tau Cola Sup.
T	0,97	0,84	0,77	0,77

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el Cuadro 21 a partir de Rho Spearman y Tau Kendall, se concluye que las pseudo-muestras presentan una alta concordancia comonotónica y, a partir de los coeficientes de dependencia en cola, muestra que las pseudo-muestras presentan una alta dependencia en colas.

Ejercicio de robustez

Con el propósito de validar la robustez de las estimaciones de los coeficientes de dependencia y de dependencia en colas, se realizó todo el proceso con tres submuestras. La muestra inicial estaba conformada por 1706 datos que corresponden a los valores de los tres índices entre el 15 de julio de 2002 y el 14 de septiembre de 2009. Las tres submuestras que se validaron se conformaron de acuerdo con el Cuadro 22.

CUADRO 22.

CONFORMACIÓN DE LAS SUBMUESTRAS PARA VALIDAR ROBUSTEZ

Submuestra	Inicia	Termina	Tamaño
1	15 jul. 2002	28 oct. 2008	1500
2	22 may. 2003	14 sep. 2009	1500
3	30 jul. 2003	25 ago. 2008	1206

Fuente: elaboración propia.

Los modelos AR(P)-GARCH(p,q) y la distribución GED asimétrica fueron consistentes con la muestra y las tres submuestras para estimar la distribución marginal de las pérdidas de los tres índices. Con las pseudo-muestras la estimación de las cópulas y los coeficientes de dependencia general y en colas también fueron consistentes.

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LOS RESULTADOS

En esta sección se presenta la interpretación económica de los resultados obtenidos con el propósito de contrastar las hipótesis de esta investigación y compararla con los resultados obtenidos por otros autores.

Dependencia estructural en los mercados bursátiles de Colombia y Estados Unidos

A partir de los valores de los coeficientes de dependencia Rho Spearman y Tau Kendall, las pérdidas de los dos índices del mercado bursátil americano presentados en los cuadros 19 y 20, y considerando que la diversificación es cuantificada con estas medidas de dependencia, se puede concluir que los dos mercados presentan una moderada dependencia. De acuerdo con el modelo CAPM el riesgo sistemático que comparten es bajo y ofrecen posibilidades de diversificación.

A partir de los coeficientes de dependencia en colas de las cópulas t de Student, Gumbel y Galambos entre las pseudo-muestras de las pérdidas del Col20 y las pérdidas de los dos índices del mercado bursátil americano presentados en los cuadros 19 y 20, se puede concluir que los dos mercados bursátiles presentan una pobre dependencia asintótica; es baja la probabilidad de que ambos mercados experimenten pérdidas extremas conjuntamente.

Los resultados obtenidos son parcialmente coherentes con Erb (1994), quien afirma que los mercados bursátiles son más dependientes cuando están a la baja que cuando están en alza, en el sentido de que la baja dependencia en colas que se detectó con las cópulas de Gumbel y Galambos fue en la cola superior de las pérdidas. En la cola inferior de las pérdidas no se halló evidencia de dependencia, toda vez que la cópula de Clayton que identifica este tipo de dependencia no pasó las pruebas de ajuste y la cópula t de Student no reveló ninguna dependencia en colas.

Los resultados de la nula (con la cópula t de Student) o baja (con la cópula Gumbel o Galambos) dependencia asintótica de los dos mercados bursátiles, considerando el DJ y el SP500 como representantes del mercado global, es parcialmente consistente con Li y Rose (2009) en cuyo trabajo muestran que la dependencia en colas del mercado colombiano con el mercado global es nula en el periodo 30-06-95 al 31-10-01.

Dependencia estructural entre los índices bursátiles DJ y SP500

En este estudio, las cópulas y los coeficientes de dependencia entre las pérdidas del DJ y el SP500 se consideraron solo como benchmarks; y dado que los dos índices pertenecen al mismo mercado, se esperaba que compartieran el riesgo sistemático

y baja o nula diversificación. En otras palabras, los coeficientes de dependencia (Rho Spearman y Tau Kendall) y de dependencia en colas deberían ser altos.

Los coeficientes de dependencia Rho Spearman y Tau Kendall entre las pseudo-muestras de las pérdidas del DJ y las pérdidas del SP500 presentados en el Cuadro 21, considerando que la diversificación es cuantificada con estas medidas de dependencia, presentan alta dependencia como se esperaba. De acuerdo con el modelo CAPM, el riesgo sistemático que comparten es muy alto y no ofrecen posibilidades de diversificación.

A partir de los coeficientes de dependencia en colas de la cópula t de Student entre las pseudo-muestras de las pérdidas del DJ y las pérdidas del SP500 presentados en el Cuadro 21, se puede concluir que los índices bursátiles son asintóticamente dependientes y la probabilidad de que ambos índices experimenten pérdidas o ganancias extremas conjuntamente es alta.

COMENTARIOS Y SUGERENCIAS

Los inversionistas internacionales que, en épocas de crisis o como estrategia de diversificación, buscan mercados emergentes para invertir, se han encontrado con el problema de que estos mercados son más dependientes al mercado global en épocas de grandes pérdidas que en épocas de grandes ganancias –en particular Brasil, Chile y México en Latinoamérica, como lo presenta Li y Rose (2009). De acuerdo con los resultados del presente trabajo, los inversionistas tienen en el mercado bursátil colombiano una opción de inversión, porque el riesgo sistemático que comparten con el mercado bursátil americano es bajo y las probabilidades de grandes pérdidas en el mercado bursátil colombiano son muy bajas cuando el mercado bursátil americano presenta grandes pérdidas.

En cuanto a los hacedores de política económica, se sugiere aprovechar los beneficios de la baja dependencia de los mercados bursátiles colombiano y americano, incluyendo la baja dependencia en colas para estimular la inversión extranjera y el crecimiento económico.

En cuanto al uso de cópulas, vale la pena resaltar su capacidad para modelar los diferentes tipos de dependencia entre las pérdidas de dos índices, dejando a las distribuciones marginales las peculiaridades individuales de cada uno. Esta característica hace de las cópulas una herramienta muy poderosa en campos como las finanzas cuantitativas y la economía financiera.

La metodología para modelar la dependencia estructural entre los mercados bursátiles que se usó en esta investigación se puede extender, en futuras investigaciones a las siguientes temáticas de dependencia estructural.

- Entre los mercados bursátiles y de capitales de Colombia y sus principales socios comerciales.

- Entre el mercado bursátil colombiano y la tasa de cambio peso-dólar y peso-euro.
- Entre el mercado bursátil colombiano y los precios de *commodities*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Anderson, T.W. y Darling, D.A. (1952). Asymptotic theory of certain 'goodness of fit' criteria based on stochastic processes. *The annals of mathematical statistics*, 23(2), 193-212.
2. Ané, T. y Kharoubi, C. (2003). Dependence structure and risk measure. *The journal of business*, 76(3), 411-438.
3. Becerra, O. y Melo, L.F. (2008). Medidas de riesgo financiero usando cópulas: Teoría y aplicaciones (Borradores de Economía 4523). Bogotá: Banco de la República.
4. Bee, M. (2005). *Copula-based multivariate models with applications to risk management and insurance*. Trento: Universidad de Trento. Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=795964>.
5. Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The review of economics and statistics*, 69(3), 542-47.
6. Bouyé, E.; Durrleman, V.; Nikeghbali, A.; Riboulet, G. y Roncalli, T. (2000) *Copulas for finance - a reading guide and some applications*. Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1032533>.
7. Boyer, B.H.; Gibson, M.S. y Loretan, M. (1997). Pitfalls in tests for changes in correlations (International Finance Discussion Papers 597). Washington, D.C.: Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
8. Brumelle, S.L. (1974). When does diversification between two investments pay? *The journal of financial and quantitative analysis*, 9(3), 473-483.
9. Campbell, J.Y.; Lo, A. y MacKinlay, A.C. (1997). *The econometrics of financial markets*. 2 edn. Princeton: Princeton University Press.
10. Chen, X. y Fan, Y. (2006). Estimation and model selection of semiparametric copula-based multivariate dynamic models under copula misspecification. *Journal of econometrics*, 135(1-2), 125-154.
11. Cherubini, U.; Luciano, E. y Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. New York: John Wiley & Sons.
12. Chollete, L.; de la Pena, V. y Lu, Ch. (2009). *International diversification: An extreme value approach* (UiS Working Papers in Economics and Finance 2009/26). Stavanger: University of Stavanger.
13. Diebold, F.X.; Hahn, J. y Tay, A. S. (1999). Multivariate density forecast evaluation and calibration in financial risk management: High-frequency returns on foreign exchange. *The review of economics and statistics*, 81(4), 661-673.
14. Embrecht, P.; McNeil, A.J. y Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. En: H., Dempster M. A. (ed), *Risk management: Value at risk and beyond* (pp. 176-223). Cambridge: Cambridge University Press.
15. Erb, C.B.; Harvey, C.R. y Viskanta, T.E. (1994). Forecasting international equity correlations. *Financial analysts journal*, 50(Nov-Dic), 32-45.

16. Genest, C., Rémillard, B. y Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and economics*, 44(2), 199-213.
17. Hu, J. (2008). *Dependence structures in chinese and u.s. financial markets: A timevarying conditional copula approach* (Departmental Working Papers 0808). Dallas: Southern Methodist University, Department of Economics.
18. Hu, L. 2006. Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach. *Applied financial economics*, 16(10), 717-729.
19. Hull, J. y White, A. (1998). Value at risk when daily changes in market variable are not normally distributed. *Journal of derivatives*, 5(3), 9-19.
20. Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. Londres: Chapman & Hall.
21. Jondeau, E. y Rockinger, M. (2006). The copula-garch model of conditional dependencies: An international stock market application. *Journal of international money and finance*, 25(5), 827-853.
22. Junker, M. y May, A. (2005). Measurement of aggregate risk with copulas. *Econometrics journal*, 8(3), 428-454.
23. Li, X.-M. y Rose, L.C. (2009). The tail risk of emerging stock markets. *Emerging markets review*, 10(4), 242-256.
24. Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, 47(1), 13-37.
25. Liu, W. (2006). *Currencies portfolio return: A copula methodology*. Toronto: Universidad de Toronto. Disponible en SSRN: <http://www.chass.utoronto.ca/weiliu/copuladist6new1.pdf>.
26. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of finance*, 7(1), 77-91.
27. McNeil, A.J.; Frey, R. y Embrecht, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques, and tools*. Princeton: Princeton University Press.
28. Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4), 768-783.
29. Nelsen, R.B. (2006). *An introduction to copulas*. 2 edn. New York: Springer-Verlag.
30. Patton, A.J. (2002). *Applications of copula theory in financial econometrics*. Tesis de doctorado. San Diego: Universidad de San Diego.
31. Patton, A.J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International economic review*, 47(2), 527-556.
32. Perold, A.F. 2004. The capital asset pricing model. *Journal of economic perspectives*, 18(3), 3-24.
33. Rockinger, M. y Jondeau, E. (2001). *Conditional dependency of financial series: An application of copulas* (Documents de Travail 82). Paris: Banque de France.
34. Romano, C. (2002). Calibrating and simulating copula functions: An application to italian stock market (Working Paper 12/2002). Roma: Centro Interdipartimentale sul Diritto e l'Economia dei Mercati.
35. Rosenberg, J.V. (2003). Nonparametric pricing of multivariate contingent claims. *Journal of derivatives*, 10(3), 9-26.
36. Samuelson, P.A. (1967). General proof that diversification pays. *The journal of financial and quantitative analysis*, 2(1), 1-13.

37. Schweizer, B. (1991). Thirty years of copulas. En: Dall'Aglio, G.; Kotz, S. y Salinatti, G. (eds.), *Advances in probability distributions with given marginals: Beyond the copulas* (pp. 13-50). New York: Kluwer Academic Publishers.
38. Sharpe, W.F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3), 425-442.
39. Sun, W.; Rachev, S.; Fabozzi, F. y Kalev, P. (2009). A new approach to modeling comovement of international equity markets: evidence of unconditional copula-based simulation of tail dependence. *Empirical economics*, 36(1), 201-229.
40. Trivedi, P.K. y Zimmer, D.M. (2005). Copula modeling: An introduction for practitioners. *Foundations and trends in econometrics*, 1(1), 1-111.