
TAMAÑO ÓPTIMO DEL GASTO PÚBLICO COLOMBIANO: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TEORÍA DEL CRECIMIENTO ENDÓGENO

Camilo Alvis¹
Cristian Castrillón²

Alvis, C. y Castrillón, C. (2013). Tamaño óptimo del gasto público colombiano: una aproximación desde la teoría del crecimiento endógeno. *Cuadernos de Economía*, 32(60), 561-596.

Este artículo tiene como propósito hacer una estimación econométrica del modelo de gasto público y crecimiento económico de Barro (1990). La estimación se realizó mediante el método generalizado de los momentos (GMM) para la economía colombiana durante el período 1950-2010. Los resultados obtenidos sugieren que el tamaño óptimo del gasto público se sobrepasó al empezar la década de los noventa. Además, se encontró que el tamaño del gasto público que maximiza la tasa de crecimiento del PIB per cápita depende inversamente del grado relativo de

¹ Economista de la Universidad de Antioquia. Dirección de correspondencia carrera 89 No. 18B-54, apto 201, Medellín, Antioquia. Correo electrónico camiloalvis@gmail.com.

² Estudiante de la Maestría en Economía Matemática UASLP (Universidad Autónoma de San Luis de Potosí, México). Dirección de correspondencia calle 48B No. 74-12, apto. 401, Medellín, Antioquia. Correo electrónico castrilloncc@gmail.com.

Los autores agradecen las observaciones y recomendaciones del profesor Wilman Gómez y los comentarios de los profesores Remberto Rhenals y Héctor Arango.

Este artículo fue recibido el 27 de enero de 2012, ajustado el 9 de septiembre de 2012 y su publicación aprobada el 21 de mayo de 2013.

aversión al riesgo y que la elasticidad de sustitución intertemporal es baja para el período analizado.

Palabras clave: crecimiento económico, gasto público, política fiscal, métodos econométricos y estadísticos, programación de modelos, modelación económica.

JEL: C1, C5, C6, E62, H50, O41.

Alvis, C., and Castrillón, C. (2013). Optimal Size Colombian Public Expenditure: An Approach from Endogenous Growth Theory. *Cuadernos de Economía*, 32(60), 561-596.

The purpose of this paper is to provide an estimation of Barro's (1990) model on public expenditure and economic growth. The estimation was performed by the generalized method of moments (GMM) for Colombian's economy in the period 1950-2010. The results suggest that the optimum size of public spending exceeded starting the nineties. Furthermore, we found that the size of public spending that maximizes the growth rate of GDP per capita depends inversely on the relative risk aversion's degree and the Intertemporal Elasticity of Substitution is very low in the analyzed period.

Keywords: Economic growth, government expenditure, fiscal policy, econometric and statistical methods and methodology, programming models, econometric modeling.

JEL: C1, C5, C6, E62, H50, O41.

INTRODUCCIÓN

La teoría del crecimiento económico es uno de los campos de la economía que ha adquirido gran importancia entre los investigadores, tanto por sus postulados como por sus consecuencias de largo plazo en una economía determinada. Las pequeñas diferencias entre las tasas de crecimiento, sostenidas durante largos períodos de tiempo, generan mayores niveles de renta per cápita y bienestar social de largo plazo. Esta teoría tiene como fin explicar el crecimiento a través de los factores capital y trabajo y su complejidad radica en que las tasas de crecimiento de las principales variables macroeconómicas dependen del supuesto de la tecnología y de parámetros exógenos; además, las decisiones de ahorro de los agentes no siguen una conducta optimizadora, puesto que la tasa de ahorro se considera exógena (Solow, 1956; Swan, 1956). Este problema se superó con los trabajos de Cass (1965) y Koopmans (1965), fundamentados en Ramsey (1928), quienes endogenizaron la tasa de ahorro de manera implícita en las funciones de utilidad y consumo, basados en un modelo de equilibrio general dinámico.

La teoría del crecimiento endógeno avanzó sobre los supuestos exógenos e introdujo algunos argumentos adicionales como el capital humano, las externalidades de capital, el gasto público y los procesos de innovación, entre otros, lo que permitió superar los rendimientos marginales decrecientes señalados por Inada (1963). Así, las principales contribuciones se debieron a Romer (1990), Lucas (1988), Rebelo (1991) y Barro (1990), siendo este último enfoque el que se seguirá en este trabajo tanto a nivel teórico como empírico.

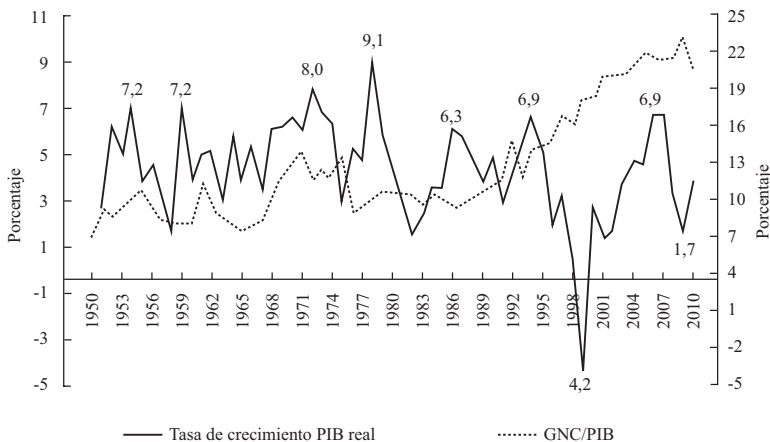
La importancia de conocer la evolución del gasto público y su relación con la actividad productiva radica en promover la estabilidad asociada al ciclo económico con respecto a su tendencia de largo plazo. En el caso colombiano solo se cumple hasta los años noventa, pues este período ha quedado registrado por su manejo anticíclico de la política fiscal (Ocampo, 2007), mientras que desde el período de 1981, según Braun y Gresia (2005) (citados por Cárdenas, Mejía y Olivera, 2006), el gasto público del Gobierno Nacional Central (GNC) parece seguir una tendencia ligeramente procíclica.

La Gráfica 1 presenta el comportamiento de la tasa de crecimiento del producto interno bruto (PIB) y el tamaño del gasto público del GNC³ como proporción del producto, desde 1950 a 2010. Los niveles de gasto público como porcentaje del PIB pasaron de estar alrededor del 10% entre las décadas de los cincuenta y sesenta, hasta llegar a niveles cercanos al 13% a mediados de los años setenta, mientras que la tasa de crecimiento del PIB tuvo una relación positiva con el gasto del GNC hasta 1975. De ahí en adelante, el gasto del GNC fue cercano al 11% del PIB, el

³ Esto quiere decir que se tienen en cuenta todas las entidades públicas que proporcionan bienes y servicios de carácter colectivo para los cuales el mercado aún no provee completamente por sí mismo, tales como: educación, salud, justicia, defensa, seguridad social, entre otros. Se clasifican por su financiación mediante impuestos y contribuciones obligatorias. Por tanto, se dejan de lado componentes importantes de las finanzas del sector público no financiero (entidades territoriales y empresas estatales).

cual se mantuvo hasta 1990, mientras que el comportamiento del crecimiento económico tuvo su máximo en 1978 con un 9,1% y después se deterioró hasta la mitad de los años ochenta, cuando se recuperó nuevamente con ritmos promedio del 5% anual hasta 1990. A partir de 1991 el gasto del GNC presenta una fuerte tendencia creciente y alcanza el máximo de 23,5% del PIB en 2009; el crecimiento económico fue positivo y decreciente en la primera parte de la década de los noventa y tocó fondo en la crisis económica de 1999, con un decrecimiento del PIB del 4,2%, seguido de bajas tasas de crecimiento hasta el 2003, cuando nuevamente recupera ritmo la actividad productiva.

GRÁFICA 1.
TASA DE CRECIMIENTO ECONÓMICO *VERSUS* GASTO PÚBLICO COMO PORCENTAJE DEL PIB, 1950-2010 (AÑO BASE 1994)



Fuente: cálculos de los autores.

Lo anterior ha planteado varias inquietudes respecto al comportamiento sostenido del gasto público desde la década de los noventa y la eficacia con la cual se han venido utilizando los recursos públicos para promover el crecimiento económico. El inicio del proceso de liberalización económica exigió menos participación del Estado, pero al mismo tiempo las nuevas obligaciones originadas en la Constitución Política de 1991 forzaron a incrementar la participación estatal en el sector social, de justicia y de seguridad, entre otros, para superar los múltiples conflictos sociales e institucionales del país. Esto permite explicar que el comportamiento del gasto público en Colombia obedece más a criterios de política que al seguimiento de un modelo definido que dinamice de manera óptima la actividad económica, razón por la cual han surgido importantes debates sobre el tamaño del Estado y la capacidad para financiarlo.

Debido a ello y con el propósito de contribuir a la solución de esta problemática, el objetivo de este trabajo es hacer una aproximación a la estimación del tamaño óptimo del gasto público, que sea consistente con las características de la economía colombiana. Para tal fin, se ha dividido el documento en varias secciones. En la primera, se presenta el marco teórico sobre el cual se desarrolla este trabajo, el cual sigue la concepción teórica de Barro (1990); en la segunda, se hace una revisión de la literatura y la evidencia empírica respecto a la determinación del tamaño del gasto público, tanto a nivel internacional como nacional; en la tercera se analiza la evolución del gasto del GNC y en la cuarta se presentan los resultados del modelo y, por último, las respectivas conclusiones.

MARCO TEÓRICO: MODELO DE BARRO (1990)

La propuesta teórica de Barro (1990) parte de incorporar al sector público en un modelo de crecimiento económico con rendimientos constantes a escala en una economía cerrada. La idea central con este modelo es considerar el diseño de las políticas gubernamentales, tanto a nivel teórico como para predicciones empíricas sobre cuál debería ser el tamaño óptimo del Gobierno que maximice la tasa de crecimiento económico y, por tanto, los niveles de ahorro, teniendo en cuenta que existen distorsiones en el mercado por la financiación a través de impuestos, lo que tiene consecuencias en el comportamiento del consumo y la inversión.

Barro (1990) introduce la provisión de servicios públicos g_t como un insumo adicional productivo en la función de producción de la firma del agente representativo, quien lo toma como dado. Además, asume que es un bien privado, es decir, rival y excluible y, por ende, no está sujeto al problema de congestión. De esta forma, la tecnología de producción tipo Cobb-Douglas, en términos per cápita, es:

$$y_t = f(k_t, g_t) = A_t k_t^\alpha g_t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

El bien público suministrado es un insumo que se proporciona en cada período del tiempo y, en consecuencia, no es susceptible de ser acumulado como los bienes de capital. Estos servicios proporcionados por el gasto público pueden ser racionalizados bajo la plena depreciación del capital público, con lo que se logra que el gasto público se considere equivalente al tamaño de la inversión pública. Al mismo tiempo, se asumió que se cumple la condición de equilibrio fiscal y, por tanto, en cada período de tiempo el gasto público debe ser financiado con impuestos (τ) sobre el nivel de renta⁴. Tal estructura de financiamiento es la razón por la que el gasto público se vuelve endógeno y queda en función del *stock* de capital físico.

⁴ Esto debido a que el horizonte para el agente representativo se extiende hasta el infinito, lo que implica que cualquier supuesto hecho sobre la financiación del gasto público mediante deuda tendría efectos irrelevantes (Romer, 2006, cap. 2).

$$g_t = \tau y_t = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} k_t \quad (2)$$

A partir de la externalidad generada por el gasto público, el modelo adquiere las propiedades de un tipo *AK*, ya que asume una tecnología constante, lo que significa que la evolución del capital y el consumo carecen de transición dinámica. A partir de la identidad macroeconómica donde la inversión es igual al ahorro, se deduce la evolución del capital, determinada por la siguiente ecuación de transición:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} [(1-\tau)y_t - c_t + (1-\delta)k_t] \quad (3)$$

La función de utilidad del agente representativo es tipo *CRRRA* (*constant relative risk aversion*):

$$U_t = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \quad (4)$$

donde β es el factor de descuento de la utilidad intertemporal⁵; E_0 es el operador de expectativas racionales; θ es el inverso de la elasticidad intertemporal de sustitución (EIS), lo que significa que cuanto mayor sea θ , mayor es el deseo de alisar el consumo a través del tiempo y, por tanto, los hogares están menos dispuestos a aceptar desviaciones de un patrón de consumo a través del tiempo. Esta función tiene dos casos especiales: si $\theta \rightarrow 0$, la función tiende a hacerse lineal y significa que los consumidores tienden a ser indiferentes en la valoración de su consumo a través del tiempo, es decir, valoran de igual forma el consumo presente como el futuro; si $\theta \rightarrow 1$, la función tiende a transformarse en una función logarítmica y esto significa que la tasa de crecimiento del consumo responde uno a uno a los cambios en la tasa de rendimiento del ahorro.

La oferta de trabajo es perfectamente inelástica y así las decisiones de ocio no forman parte de la función de utilidad. Entonces, el problema de optimización intertemporal es el siguiente:

$$\mathcal{L}(c_t, k_{t+1}, \lambda_t) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_t [(1-\tau)y_t - c_t + (1-\delta)k_t - (1+n)k_{t+1}] \right\} \quad (5)$$

Las condiciones de primer orden, para el consumo, el capital y el multiplicador de Lagrange o precio sombra son las siguientes:

$$c_t^{-\theta} - \lambda_t = 0 \quad (6)$$

⁵ $\beta = 1/(1+\rho)$, donde $\rho > 0$, representa la tasa subjetiva de descuento y se debe a que el agente representativo planea su consumo y valora de manera diferente los consumos, y con ellos las utilidades en cada período.

$$-(1+n)\lambda_t + E_t \beta \lambda_{t+1} \left[(1-\tau)\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right] = 0 \tag{7}$$

$$(1-\tau)A_t k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - c_t + (1-\delta)k_t - (1+n)k_{t+1} = 0 \tag{8}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+n)\beta^t \lambda_t k_{t+1} = 0 \tag{9}$$

donde λ_t es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción global de recursos y refleja el valor de una unidad adicional de capital, es decir, el precio implícito del capital. La ecuación [9] es la condición de transversalidad, que garantiza un esquema de juegos que no es Ponzi y significa que los agentes al final de los tiempos no ahorran nada, es decir, consumen todo y honran sus deudas a lo largo del tiempo, garantizando su máximo bienestar. Luego, realizando el álgebra correspondiente, se obtiene la tasa de crecimiento del consumo.

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} - 1 = \gamma_{c,t+1} = \left[\left(\frac{\beta}{1+n} \right) \left((1-\tau)\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1}{\alpha}-1} + (1-\delta) \right) \right]^{\frac{1}{\theta}} - 1 \tag{10}$$

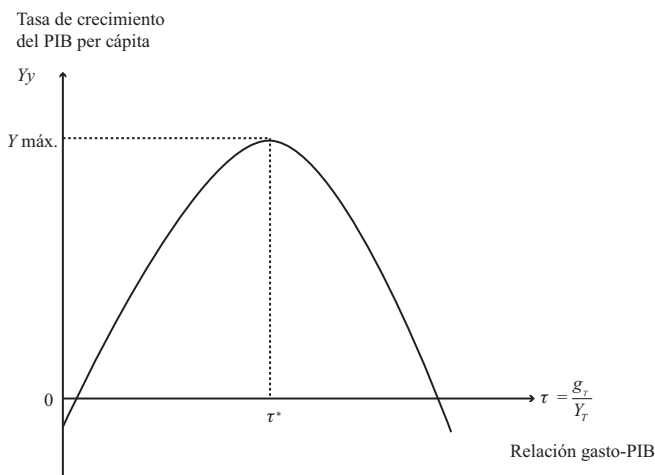
La ecuación [10] es la condición de Euler, donde la tasa de crecimiento del consumo es constante a través del tiempo, debido a que está en función de parámetros, siendo equivalente a la solución descentralizada de Barro (1990). Así, una variación en el *stock* de capital llevaría a nuevos estados estacionarios porque no hay convergencia. Además, es posible obtener a partir de esta ecuación una expresión para el tamaño óptimo del gasto público como proporción del PIB, dado por $\tau^* = 1 - \alpha$. En la medida en que el gasto público, financiado con impuestos, sea proporcional al capital privado en cada período, ambos factores compartirán la misma tasa de crecimiento. A partir de la ecuación [8] se puede verificar que:

$$\frac{c_t}{k_t} = (1-\tau)A \left(\frac{k_t}{g_t} \right)^{\alpha-1} + (1-\delta) - (1+n)(1+\gamma_{k,t+1}) \tag{11}$$

donde $k_t / g_t = 1 / (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}}$ es constante, lo que permite mostrar que hay una senda de crecimiento equilibrado del consumo y el capital a la misma tasa, es decir, $\gamma_c = \gamma_k = \gamma_g = \gamma$. Se asume que la tecnología es lo suficientemente productiva como para asegurar un estado con sendas de crecimiento balanceadas y la función de utilidad está acotada y parametrizada para que no tenga trayectorias explosivas.

La Gráfica 2 muestra el caso teórico que relaciona la tasa de crecimiento económico per cápita y el tamaño del gasto público. La tasa de crecimiento depende de manera positiva del gasto y, de la forma negativa, de los impuestos. Por tanto, el efecto final en la tasa de crecimiento económico depende de cuál sea el efecto dominante (Sala-i-Martin, 2000).

GRÁFICA 2.
RELACIÓN ENTRE τ Y LA TASA DE CRECIMIENTO
ECONÓMICO PER CÁPITA



Cuando los individuos deciden sacrificar unidades de consumo con el fin de ahorrar y con ello adquirir unidades de capital, estimulan el ingreso nacional en una cuantía equivalente al producto marginal del capital. Luego, debido al impuesto a la renta, se incrementa el ingreso público para financiar aumentos del gasto público. En consecuencia, un aumento de k está acompañado por incrementos de igual porcentaje en g , con lo que se logra que tanto el capital como el gasto público aumenten al mismo ritmo. Asimismo, la función de producción presenta de manera conjunta retornos constantes a escala en los factores que pueden ser acumulados, por lo que el modelo toma forma de uno tipo AK , siendo esta la justificación intuitiva según la cual se origina un proceso de crecimiento endógeno.

EVIDENCIA EMPÍRICA

La evidencia empírica para determinar el tamaño óptimo del gasto público desde este punto de vista teórico es relativamente escasa y la mayoría de casos están limitados a relacionar el efecto del gasto público en el crecimiento económico para determinar si es excesivo o no. En los autores generalmente se ven dos tendencias: algunos proponen un tamaño pequeño del sector público y otros, uno grande. Algunas investigaciones sugieren que un bajo nivel de gasto público podría tener un efecto positivo en el crecimiento económico, mientras que otras consideran que es deseable un tamaño mayor del gasto. Por ende, la evidencia empírica no es concluyente debido a los resultados a favor de una u otra aproximación; además, no se muestran resultados robustos en cada uno de los enfoques y resalta que son escasas las estimaciones del nivel óptimo.

Estudios internacionales

Barro (1991) llevó a cabo un análisis en una muestra de 98 países para el período 1960-1985, usando la tasa promedio de crecimiento anual del PIB real per cápita y la ratio del gasto de consumo del Gobierno y el PIB real. De acuerdo con los resultados, sugiere que el tamaño del gasto en consumo público está relacionado de manera negativa con el crecimiento económico, mientras que el componente de inversión pública presentó una relación positiva con la tasa de crecimiento. De la misma forma, afirma que las tasas de crecimiento están correlacionadas de manera positiva con las medidas de estabilidad política y negativamente con las distorsiones del mercado.

Por otro lado, hay una serie de estudios que no fueron satisfactorios desde el punto de vista metodológico, porque están basados en correlaciones entre las variables, con énfasis en la curva de Armey (1995)⁶, cuya especificación funcional en forma cuadrática *ad hoc* y sin microfundamentos hace que resulte bastante complicada la justificación de la estimación del tamaño óptimo de la relación gasto-PIB. Además, poseen otros problemas, especialmente econométricos, ya que la mayoría de los trabajos usan panel de datos y consideran que todos los países tienen el mismo tamaño del sector público, sin diferencias entre países⁷. Esta curva también se estima con series de tiempo, que en términos generales puede llevar a una confusión entre la correlación y la causación; incluso, se asumen modelos paramétricos que usan a priori una forma funcional, lo que hace difícil la justificación de los datos.

Estudios nacionales

Para el caso colombiano, una de las primeras aproximaciones a la explicación del crecimiento del gasto público se encuentra en Posada (1996), bajo la hipótesis según la cual el gobernante tiene que resolver varios objetivos con el gasto público como único instrumento. Primero, usar los recursos públicos para beneficio social *versus* el beneficio personal y, segundo, usar el gasto público para estimular la economía o para mejorar la redistribución del ingreso. El autor obtiene que entre 1970-1995 se redujo la concentración del ingreso porque mejoró la eficiencia marginal de la redistribución del gasto público, mientras que la tasa de crecimiento de la economía se vio frenada por la baja eficiencia del gasto público destinado a estimular la economía. Posada (1996) concluye que la expansión excesiva del gasto público tiende a deteriorar la distribución del ingreso a causa de sus efectos negativos sobre la estabilidad macroeconómica y el crecimiento.

⁶ Algunos trabajos basados en estas relaciones o derivados de la curva de Armey son los de Vedder y Gallaway (1998), Lizardo y Mollick (2006), De Witte y Moesen (2010), Fölster y Henrekson (2001), Dar y AmirKhalkhali (2002) y Alexiou (2009).

⁷ La razón es que los niveles de desarrollo, el tamaño de la población, la extensión del territorio, las preferencias de los individuos por el consumo público, el conflicto interno y los niveles de ingreso, entre muchas otras características, imposibilitan una plena comparación.

La investigación de **Gómez y Posada (2002)** analiza la relación entre gasto público y crecimiento económico, mediante la metodología de calibración en un modelo neoclásico de optimización intertemporal, ampliado con base en los factores productivos adicionales tales como el capital humano (medido a través del nivel de educación) y la inversión en infraestructura para el período 1905-2000. Ellos encontraron que en 1975-1996 la acumulación de capital físico privado y público creció a tasas muy elevadas y rápidas, comparadas con el período comprendido entre 1925 y 1975. Sin embargo, estas no contribuyeron a estimular el crecimiento ni a cerrar la brecha con respecto a otros países, ya que el producto per cápita creció 2,44% anual en el mismo período, mientras que entre 1975 y 1996 lo hizo al 0,73% anual.

En cuanto a la medición del gasto público óptimo, al menos para el 2000 se tiene que el gasto efectivo realizado en capital humano es de cerca del 10% del PIB y pareciera que está en los niveles de equilibrio óptimo. En cambio, en la inversión en infraestructura parece existir un exceso de gasto público efectivo, frente al óptimo del 3% o 4% del PIB. Finalmente, deducen que la pérdida de bienestar de la sociedad es significativa al financiar el gasto público con impuestos que distorsionan el consumo y la inversión, en lugar de hacerlo con impuestos de suma fija, lo que haría necesario compensar a los consumidores mediante transferencias y una transformación del sistema tributario colombiano.

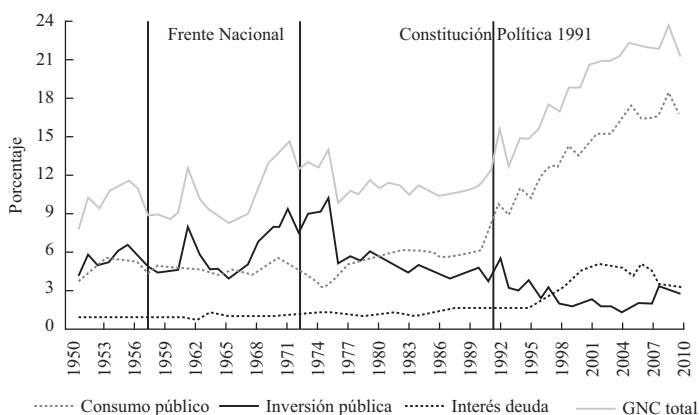
Posada y Escobar (2003) realizan una estimación econométrica del modelo de Barro (1990), mediante el método de panel de datos para 83 países, incluido Colombia, para el período 1983-1999. Sugieren que el gasto público colombiano comenzó a ser excesivo durante la primera mitad de los años noventa y así contribuyó a la desaceleración de la tasa de crecimiento de la economía. De acuerdo con los resultados, el tamaño óptimo del gasto público del GNC para la economía colombiana sería del 9,4% del PIB, lo que permitiría lograr una tasa máxima de crecimiento del producto per cápita del 1,012% anual. Concluyen que a partir de 1993 hubo una tendencia de aumento del gasto público excesiva y superior a los países de ingreso medio pero, con respecto a estos, a partir de 1995 la brecha de crecimiento se deterioró.

En Gómez (2004) se encuentran algunas reflexiones sobre el crecimiento sostenido del gasto público y la desaceleración de la tasa de crecimiento del PIB real en Colombia. El autor analiza el período 1950-2000 y encuentra indicios de la U invertida del modelo de Barro (1990), y resalta que cuando el gasto público está más allá del nivel óptimo, podría estar desperdiciando recursos públicos que desaceleran el ritmo del crecimiento económico debido a que no se están usando eficientemente.

COMPORTAMIENTO DEL GASTO PÚBLICO COLOMBIANO, 1950-2010

La Gráfica 3 muestra el comportamiento creciente del gasto del GNC durante el período de análisis, dividido en tres componentes: el gasto de consumo público, la inversión pública y el pago de intereses de la deuda. Se hará a continuación una breve descripción del comportamiento del gasto público durante 1950-2010.

GRÁFICA 3.
EVOLUCIÓN DE LOS COMPONENTES DEL GASTO DEL GNC COLOMBIANO COMO PORCENTAJE DEL PIB, 1950-2010 (AÑO BASE 1994)



Fuente: cálculos de los autores.

Desde comienzos de la década de los cincuenta se experimentó un período de crecimiento continuo de la economía y del gasto público, debido a la bonanza del sector cafetero que duró hasta la caída de los precios del café en 1955 y con ella la tendencia de aumento del gasto público presentó un leve retroceso⁸. En los años 1950 a 1955 el gasto del GNC pasó del 7,4% al 11,1% del PIB, acompañado por unas tasas promedio de crecimiento real de la economía del 5,1%. En estos años el gasto en consumo público fue el de mayor crecimiento, al pasar del 3,4% al 4,9% del PIB y la inversión del 3,7% al 6% del PIB. Sin embargo, en 1955 el Gobierno se vio obligado a restringir el gasto público en la mayoría de los sectores, especialmente en la inversión pública, por lo que la participación del gasto del GNC pasó del 11,1% del PIB en 1955 al 8,2% en 1959.

⁸ El auge económico estuvo vinculado a la suerte de las cotizaciones externas del café. En efecto, la cotización media mensual de una libra de café colombiano excelso en Nueva York pasó de 22,5 centavos de dólar en 1946 a 53,3 en 1950, y 80,02 en 1954 (Avella, 2008, p. 26).

Durante el período 1958-1974 se puso en marcha el sistema político conocido como el Frente Nacional⁹. Durante estos años, el gasto público del GNC pasó de 10,7% a 12,2% del PIB, lo que significó una tasa promedio anual de crecimiento del 9,7%, mientras que la tasa de crecimiento real de la economía fue en promedio de 5,5%. El componente de inversión pública presentó el mayor crecimiento al pasar del 5,7% al 8,6% del PIB durante la vigencia de este sistema político, el gasto en consumo público fue relativamente estable y la deuda pública experimentó un leve crecimiento. Las causas principales de los incrementos del gasto del GNC durante la vigencia del Frente Nacional se debieron a su orientación y mayor participación en los temas sociales, que tenían como propósito garantizar a los ciudadanos el acceso a condiciones mínimas de salud, vivienda y educación.

El crecimiento del gasto del GNC continuó hasta alcanzar el 13,6% del PIB en 1975 y en adelante se presentó un cambio de tendencia, con una disminución hasta un nivel de gasto público de entre 10% y 11% del PIB por el resto de la década de los setenta, lo cual estuvo acompañado de un crecimiento promedio de la economía del 5,6%. El componente del consumo público ganó participación como proporción del producto y pasó del 3% al 5% del PIB entre 1975 y 1980, mientras que la inversión pública perdió participación y se desplazó del 9,7% al 5,1% del PIB durante el mismo período; por su parte, el tamaño del gasto por pago de intereses de la deuda aún no alcanzó a superar el 0,5% del PIB en 1980. Esto significa que la reducción del gasto del GNC estuvo acompañada de la recomposición del consumo público y la inversión pública.

A pesar de las expectativas optimistas de la economía colombiana al empezar los años ochenta, la crisis de la mayoría de las economías latinoamericanas y las elevadas tasas de interés internacionales condujeron a un escenario de mayor prudencia fiscal y ajuste macroeconómico, para contrarrestar los efectos de la recesión internacional. Con respecto al consumo público, entre 1981 y 1990 este se incrementó levemente del 5,5% al 5,7% del PIB y la inversión pública se redujo del 4,8% al 4,2% del PIB, mientras que el gasto en intereses de la deuda aumentó del 0,6% al 1% del PIB en el mismo período. Esto llevó a que durante la década de los ochenta el gasto del GNC oscilara entre el 10% y el 11% del PIB alcanzado en 1990, mientras que la tasa promedio de crecimiento del producto en la primera mitad de los años ochenta fue del 2,9% y en la segunda mitad recuperó el ritmo promedio de 5,2% anual. Esto significó que el proceso de ajuste económico emprendido en años anteriores fue eficiente y estable, teniendo en cuenta la turbulencia de la “década perdida” de América Latina.

⁹ El Frente Nacional fue un acuerdo entre los partidos políticos tradicionales, el Conservador y el Liberal, para alternarse la Presidencia cada cuatro años, con un compromiso de paridad para ocupar los distintos cargos de la Administración Pública. El objetivo principal de este sistema fue conseguir la paz del país y acabar con el odio y la violencia entre los partidos, para la eliminación definitiva de los numerosos grupos armados que operaban en el territorio nacional al margen de la ley.

Empezando la década de los noventa, la economía colombiana adoptó una serie de reformas estructurales, entre las que se destacan: la apertura económica, la Constitución Política de 1991 y las reformas financiera, tributaria y cambiaria. Los nuevos compromisos constitucionales llevaron a que el gasto del GNC emprendiera un ritmo creciente al pasar del 12% al 18,5% del PIB para el 2000, mientras que la tasa de crecimiento de la economía en la primera mitad de la década tuvo un promedio del 5,1% y en la segunda mitad un promedio del 1%, debido a la crisis de 1999 y la lenta recuperación de la actividad productiva. Este comportamiento estuvo dominado por el incremento sostenido del consumo público del 7,7% al 13,1% del PIB entre 1991 y 2000, mientras que la inversión continuó una senda decreciente al pasar del 3,2% al 1,4% del PIB en el mismo período. De la misma forma, en esta década el gasto público por concepto de intereses creció drásticamente al pasar del 1,1% del PIB en 1991 al 4% del PIB en el 2000, como consecuencia del cubrimiento de los déficits fiscales con endeudamiento público¹⁰.

Al inicio de la primera década del siglo XXI, el ritmo de crecimiento económico colombiano fue lento, heredado de las bajas tasas de recuperación por causa de la crisis de la segunda mitad de los años noventa, el cual estuvo acompañado de un gasto público creciente que puso en duda la sostenibilidad de la deuda y la eficiente asignación de los recursos públicos. Por ello, se trató de ejercer una mayor disciplina fiscal. La mayoría de las reformas fiscales desde la implementación de la Constitución de 1991 fueron orientadas a realizar ajustes a través de los ingresos tributarios, mientras que las reformas exclusivamente relacionadas con el tema del gasto público fueron inexistentes, a excepción de la ley de transparencia y responsabilidad fiscal¹¹ (Ley 819 de 2003), lo que implica que en materia de gastos no existió disposición política para realizar ajustes efectivos de largo plazo (Olivera, Pachón y Perry, 2010).

A pesar de los esfuerzos fiscales, el gasto del GNC continuó incrementándose, aunque a menor ritmo, lo que llevó a que pasara del 20,4% al 22,2% del PIB entre 2001 y 2005 y la tasa de crecimiento de la economía recuperó los niveles promedio del 3,4% anual, debido a su repunte desde el 2003. En el segundo quinquenio, el tamaño del gasto del GNC pasó del 21,9% al 21% del PIB entre 2006 y 2010, después de experimentar una máxima participación de 23,5% en 2009, lo que permitió alcanzar una tasa promedio de crecimiento económico del 4,6% por año.

Con respecto a los componentes del gasto del GNC, la inversión pública redujo su tamaño y llegó al mínimo del 0,8% del PIB en 2004, pero luego recuperó partici-

¹⁰El comportamiento de la deuda tuvo una consecuencia inesperada, pues se aceptó un mayor endeudamiento al asumir que el crecimiento económico adquiriría rápidamente un mayor ritmo, que mejoraría la relación deuda/PIB y se generarían futuros superávits primarios, necesarios para honrar dicha deuda en niveles sostenibles, lo que no sucedió (Caballero y Posada, 2003).

¹¹Esta ley buscó propiciar la transparencia y responsabilidad fiscal del sector público no financiero, mediante la presentación anual del Marco Fiscal de Mediano Plazo y el Marco de Gasto de Mediano Plazo. Actualmente es el principal instrumento que guía la política fiscal, pues esta establece una senda, pero no una meta para el GNC con respecto a los superávits primarios.

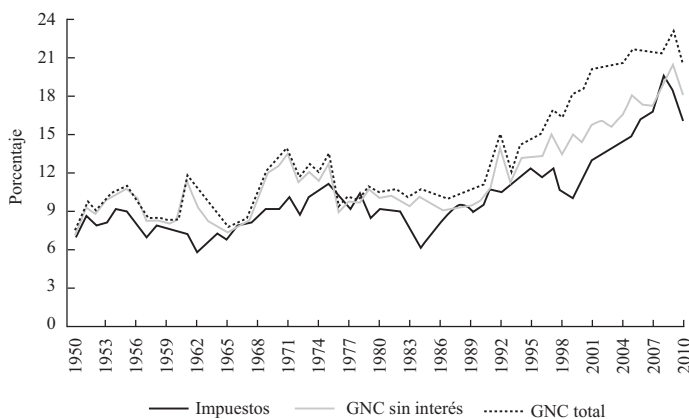
pación en 2008, con 2,8% del PIB, cuando se trató de contrarrestar los efectos de la crisis financiera internacional. Sin embargo, nuevamente en 2010 disminuyó su participación al 2,2% del PIB. Durante el mismo período, el tamaño del consumo público continuó con una tendencia creciente al pasar del 14,4% al 16,25% del PIB entre 2001 y 2010, respectivamente, mientras que el gasto destinado a intereses de la deuda pública tuvo una leve reducción al pasar del 4,4% al 2,5% del PIB durante el mismo período debido a la disminución de las tasas de interés real externas. Por lo anterior se deduce que el aumento del gasto público destinado al consumo público fue en detrimento de la inversión pública durante la primera década del siglo XXI.

De acuerdo con lo anterior, desde la segunda mitad del siglo XX el comportamiento del gasto público en el caso colombiano ha tenido una tendencia creciente y acelerada, especialmente a partir de la década de los noventa, así como se ha presentado una recomposición entre los componentes públicos de consumo, inversión y pago de intereses de la deuda pública. Hasta el inicio de los años noventa el consumo público mantuvo un crecimiento relativamente estable, mientras que la inversión pública ganó participación hasta la década de los setenta y el pago de intereses por deuda pública fue considerablemente pequeño. Sin embargo, a partir de la década de los noventa con la Constitución de 1991 se generaron mayores obligaciones sociales para el Estado colombiano y con ello se da un incremento del gasto público, considerado por el Ministerio de Hacienda en un 94% inflexible¹². Mientras la participación del consumo público aumentaba progresivamente, la inversión pública disminuía debido a su mayor flexibilidad presupuestal, lo que permitió mayor presión para realizar ajustes fiscales.

En la Gráfica 4 se analiza la evolución de los gastos del GNC total y sin intereses con respecto al comportamiento de los ingresos públicos totales durante el período que va desde 1950 hasta 2010. Se observa que el gasto del GNC tuvo una tendencia relativamente estable hasta la década de los ochenta, pues a partir de allí se evidencia que tanto el gasto público total como el primario crean una brecha cada vez más amplia con la capacidad de financiamiento a través del recaudo impositivo. En efecto, las dificultades de los primeros años de los ochenta y la crisis de finales de los noventa contribuyeron a disminuir, aún más, el nivel de ingresos del GNC por el bajo ritmo de crecimiento económico, situación que continuó la mayor parte de la primera década del siglo XXI, ya que al final se observa una leve reducción de la brecha tendiente a alcanzar superávits primarios.

¹²Según el Ministerio de Hacienda y Crédito Público, más del 94% del presupuesto del Gobierno central es inflexible, y la inversión y los gastos generales son los únicos rubros donde puede existir alguna capacidad de ajuste fiscal (Cárdenas *et al.*, 2006, p. 9).

GRÁFICA 4.
GASTO PÚBLICO PRIMARIO Y TOTAL *VERSUS* INGRESO PÚBLICO
COMO PORCENTAJE DEL PIB, 1950-2010 (AÑO BASE 1994)



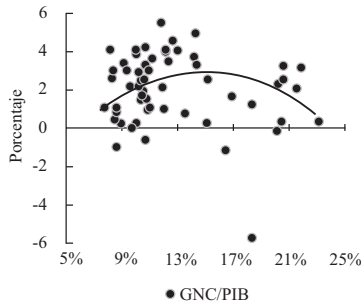
Fuente: cálculos de los autores.

Esto implica que al parecer las medidas restrictivas en materia fiscal en años anteriores, aunque no fueron la solución total, al menos ayudaron a generar un poco de disciplina fiscal, ya que permitieron reducir el nivel de déficit fiscal público del 6,8% al 2% del PIB entre 2002 y 2008, respectivamente. Sin embargo, gran parte de la reducción de la relación deuda-PIB fue impulsada por la recuperación del crecimiento económico, las bajas tasas de interés reales externas, la apreciación de la moneda nacional y la sustitución de deuda externa por interna, que no necesariamente es atribuible a un prudente manejo fiscal¹³.

En la Gráfica 5 se observa la relación existente entre el gasto público como proporción del PIB y la tasa de crecimiento de la economía, la cual se ve en forma de U invertida, similar a la intuición teórica señalada por Barro (1990), mostrada anteriormente en la Gráfica 2. Este comportamiento puede explicarse porque en un primer tramo existe una nube de puntos que relaciona los aumentos del gasto público como proporción del PIB con unas mayores tasas de crecimiento de la economía. Pero en un segundo tramo existe otra nube de puntos que relaciona los mayores niveles de gasto público con menores tasas de crecimiento del PIB real, que corresponden a los datos después de la segunda mitad de la década de los noventa.

¹³En parte debido a que los pequeños impactos del efecto “bola de nieve” en la mayor parte de casi tres décadas se han asociado con tasas reales internas (implícitas) negativas o bajas de la deuda pública interna (Gómez y Rhenals, 2007).

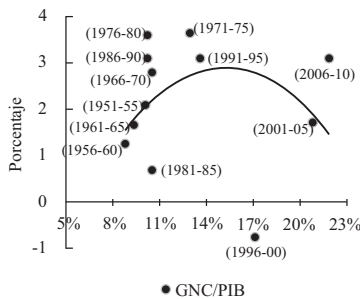
GRÁFICA 5.
TASA DE CRECIMIENTO ECONÓMICO PER CÁPITA
VERSUS GASTO PÚBLICO



Fuente: cálculos de los autores.

Sin embargo, en la Gráfica 6 la relación entre la tasa de crecimiento del PIB real per cápita y el tamaño del gasto público se ve más claramente cuando se realizan los cálculos de la muestra en promedios quinquenales. Pues, efectivamente, los quinquenios después de la primera mitad de la década de los noventa están relacionando el mayor gasto público como proporción del PIB con menores tasas de crecimiento per cápita de la economía. Esto significa que hay fuerte indicios que respaldan la hipótesis de Barro (1990) y, por tanto, se crea la necesidad de utilizar una metodología más precisa para estimar el nivel óptimo de la relación entre el gasto público y el crecimiento de la renta per cápita.

GRÁFICA 6.
TASA DE CRECIMIENTO ECONÓMICO PER CÁPITA
VERSUS GASTO PÚBLICO, PROMEDIOS QUINQUENALES



Fuente: cálculos de los autores.

ESTIMACIÓN DEL MODELO

Metodología

El procedimiento de estimación utilizado es conocido como el método generalizado de momentos (GMM, por sus siglas en inglés), para el cual Hansen (1982) demostró su consistencia y normalidad asintótica con propiedades deseables¹⁴. Los estimadores del GMM se establecen en un bosquejo, incluso, no paramétrico con resultados más robustos, tanto en modelos lineales como no lineales. Para este propósito se utilizan los momentos muestrales (media muestral) para estimar los momentos poblacionales (media poblacional), un proceso conocido en el método de momentos como el “principio de analogía”.

Por esta razón, la idea básica de este trabajo es estimar los parámetros a partir de las restricciones de momentos aplicadas para el modelo, en lugar de emplear el procedimiento más habitual que consiste en recurrir al método de calibración del modelo. La metodología utilizada de GMM es una variante utilizada por Hansen (1982), implementada por Christiano y Eichenbaum (1992) para modelos de ciclos reales de negocios¹⁵. La utilidad de esta técnica es debido a que el comportamiento de las variables está determinado de manera endógena y simultánea, lo que hace posible replicar la dinámica de la economía.

La metodología asume cumplir la condición de ortogonalidad poblacional:

$$m(x, \phi) = E[f_i(x_i, \phi)] = 0 \quad (12)$$

donde f es un vector en función de x_i , el cual es un vector de variables observables que podrían ser endógenas o exógenas, y ϕ es un vector de dimensión K que contiene todos los parámetros desconocidos. Ya que la idea básica es usar por analogía los momentos muestrales como estimadores de los parámetros poblacionales, es lógico asumir:

$$\bar{m}(x_i, \phi) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T f(x_i, \phi) = 0 \quad (13)$$

El punto de partida para la estimación con base en la metodología GMM es el supuesto según el cual debe existir al menos un conjunto de L condiciones de momentos que satisfagan la dimensión K de parámetros desconocidos, es decir $L \geq K$. Cuando $L = K$, se dice que es un sistema que está exactamente identificado y cuando $L > K$, que está sobre identificado. Dado que no es posible asegurar

¹⁴La teoría clásica de los momentos tiene su base pionera en Fischer (1925) y luego se enriquece como un GMM basado en la estimación de funciones, desarrollado originalmente por Godambe y Thompson (1960, citados por Greene, 2002).

¹⁵La cual fue programada por Burnside (1999) para MATLAB, de donde se ha adaptado el algoritmo para propósitos de este trabajo.

una solución exacta para el sistema sobre identificado, la manera de solucionarlo es formular el problema de tal forma que la elección del vector de parámetros desconocidos de las condiciones de momentos esté lo más cerca posible a cero. Por tanto, la estimación por GMM está definida por la elección del vector ϕ que minimiza la forma cuadrática o función objetivo:

$$J_T(\phi) = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(x_t, \phi) \right]' W_T \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(x_t, \phi) \right] = 0 \quad (14)$$

De hecho, el valor de esta función objetivo, denominado J-estadístico, es usado como prueba de ajuste de sobre especificación de las condiciones de momentos, los cuales se distribuyen asintóticamente a una función chi-cuadrado, χ^2_{L-K} , con grados de libertad iguales al exceso de condiciones de momentos sobre el número de parámetros por estimar, bajo la hipótesis nula de que las condiciones de momentos son satisfechas (Hansen, 1982).

$$\frac{\partial J_T(\phi)}{\partial \phi} = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial f(x_t, \phi)}{\partial \phi} \right]' W_T \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(x_t, \phi) \right] = 0 \quad (15)$$

En la práctica, el estimador GMM se obtiene resolviendo esta minimización por métodos numéricos, para los cuales existe una gran variedad de algoritmos disponibles¹⁶. La matriz W_T de dimensión $L \times L$ es simétrica y definida positiva, y converge en probabilidad al menos a alguna matriz que también es simétrica y definida positiva¹⁷, W . El verdadero vector de parámetros es definido por ϕ_0 y esta matriz es de orden $L \times K$, que se define por:

$$D_0 = \text{Plim} \frac{\partial \bar{m}(\phi_0)}{\partial \phi'} = E \left[\frac{\partial f(x_t, \phi_0)}{\partial \phi'} \right] \quad (16)$$

Hansen (1982) mostró que bajo adecuadas condiciones, el estimador GMM es consistente y \sqrt{T} se distribuye con asintótica.

$$\sqrt{T}(\hat{\phi}_T - \phi_0) \xrightarrow{d} N \left[0, (D_0' W_0 D_0)^{-1} D_0' W_0 D_0 S_0 W_0 D_0 (D_0' W_0 D_0)^{-1} \right] \quad (17)$$

Así, la matriz S_0 está dada por:

$$S_0 = E \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x_t, \phi_0) f(x_{t+j}, \phi_0)' \right] \quad (18)$$

¹⁶ Véase Greene (2002, pp. 919-946).

¹⁷ Porque el estimador producido de la minimización de la ecuación objetivo es consistente, $G(\hat{\phi})$ converge en probabilidad a $G(\phi_0)$ y como se ha asumido que W_T converge en probabilidad a W entonces $\text{plim} G(\hat{\phi}) W_T = G(\phi_0) W$.

Hansen (1982) mostró que un estimador óptimo asintótico y eficiente GMM ϕ puede ser obtenido escogiendo W_T como el más pequeño, de tal manera que converge a la inversa de largo plazo de la matriz de covarianzas de la matriz S_0 : $\text{plim}W_T = S_0^{-1}$, para la cual se sugiere un procedimiento en dos etapas:

- En el primer paso se estima ϕ usando alguna matriz de ponderación definida positiva, por ejemplo la matriz identidad que es muy usada cuando el problema es no lineal (Johnston y Dinardo, 1997, pp. 327-345). Esto genera una estimación consistente de $\hat{\phi}_T$, la cual puede ser usada para construir un estimador consistente de S_0 . Cabe aclarar que hay varios métodos¹⁸ por los cuales se puede estimar S_0 y para este caso el método especificado es de la forma:

$$\hat{S}_T = \sum_{j=-n}^n k(j, n) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[f(x_t, \hat{\phi}_T^1) f(x_t, \hat{\phi}_T^1)' \right] \quad (19)$$

donde $k(j, n)$ toma varios valores dependiendo del método utilizado¹⁹.

- En el segundo paso, una vez lograda la matriz $W_T = \hat{S}_T^{-1}$, se reestima ϕ y de allí se obtienen los estimadores GMM asintóticamente eficientes (óptimos) de $\hat{\phi}_T$, y su distribución asintótica está dada por:

$$\sqrt{T}(\hat{\phi}_T - \phi_0) \xrightarrow{d} N\left(0, (D_T' S_T^{-1} D_T)^{-1}\right) \quad (20)$$

donde la matriz asintótica de varianzas y covarianzas puede expresarse como:

$$V_T = (D_T' S_T^{-1} D_T)^{-1}, \text{ donde } D_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial f(x_t, \phi)}{\partial \phi'}$$

De manera complementaria, se incorporan segundos momentos muestrales sin tendencia lineal, a partir de los datos filtrados con la técnica de Hodrick y Prescott (HP). Por tanto, se redefine el vector de parámetros $\phi = (\phi_1' \phi_2')$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son, respectivamente, el conjunto de parámetros desconocidos de las ecuaciones de restricciones de momentos del modelo y el de los momentos formados a partir de los datos, por lo que se cumple así con la tradicional condición de ortogonalidad.

¹⁸También se pueden utilizar la técnica de mínimos cuadrados en dos etapas, la matriz de ponderación de White, la matriz de ponderación consistente con heteroscedasticidad y autocorrelación (HAC) de Newey-West o algún otro método especificado por el autor, que permita construir esta matriz de ponderación para estimar la matriz de covarianzas de largo plazo.

¹⁹Hansen, Heaton y Ogaki (1992) realizaron un programa en Gauss para GMM (Burnside, 1999).

$$\begin{aligned} E[f_t(x_t, \phi_1)] &= 0 \\ E[g_t(x_t, \phi_2)] &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta las condiciones derivadas del modelo para este trabajo, según una de las cuales el tamaño óptimo es $\tau^* = 1 - \alpha$, las ecuaciones de restricciones de momentos del modelo son:

$$E[\ln(A_t) - \ln(A_0) - \ln(A_{t-1})\rho] = 0 \quad (22)$$

$$E[(\ln(A_t) - \ln(A_0) - \ln(A_{t-1})\rho)\ln(A_{t-1})] = 0 \quad (23)$$

$$E[(\ln(A_t) - \ln(A_0) - \ln(A_{t-1})\rho)^2 - \sigma_A^2] = 0 \quad (24)$$

$$E[\ln(A_t - \ln(\bar{A}))] = 0 \quad (25)$$

$$E\left[\ln(\bar{A}) - \frac{\ln(A_0)}{(1-\rho)}\right] = 0 \quad (26)$$

$$E[\ln(y_t) - \ln(A_y) - t\ln(\gamma_x)] = 0 \quad (27)$$

$$E\left[(\ln(y_t) - \ln(A_y) - t\ln(\gamma_x))\frac{t}{T}\right] = 0 \quad (28)$$

$$E\left[\delta - 1 + \left(\frac{(1+n_t)k_{t+1} - ((1-\tau)y_t - c_t)}{k_t}\right)\right] = 0 \quad (29)$$

$$E\left[(1+n_t) - \beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\theta} \left((1-\tau)\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}g_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)\right)\right] = 0 \quad (30)$$

$$E\left[(1-\alpha) - \frac{g_t}{y_t}\right] = 0 \quad (31)$$

$$E\left[\frac{L_{t+1}}{L_t} - (1+n)\right] = 0 \quad (32)$$

$$E[y_{hp,t}^2 - \sigma_y^2] = 0 \quad (33)$$

$$E \left[c_{hp,t}^2 - \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_y} \right)^2 y_{hp,t}^2 \right] = 0 \quad (34)$$

$$E \left[i_{hp,t}^2 - \left(\frac{i_c}{\sigma_y} \right)^2 y_{hp,t}^2 \right] = 0 \quad (35)$$

El factor de productividad de la economía, A_t , se construye asumiendo una función de producción de tipo Cobb-Douglas²⁰, con PIB per cápita y_t , capital k_t y gasto público g_t . Las ecuaciones [22] a [26] son derivadas de la ley de movimiento para la tecnología A_t y las ecuaciones [27] y [28] que identifican el parámetro γ_x y el parámetro A_y . La ecuación [29] proviene de la identidad relacionada con la inversión para el *stock* de capital. La ecuación [30] se obtiene de la restricción de Euler para el consumo en función del *stock* de capital. La ecuación [31] es la condición de equilibrio fiscal de la economía y la [32] es derivada de la tasa de crecimiento de la población. Por su parte, las ecuaciones [33], [34] y [35] son las restricciones de momentos derivados de los datos, donde el subíndice *hp* denota el componente cíclico de Hodrick y Prescott.

Los datos estadísticos tienen como fuente a Gómez y Rhenals (2007) y la inversión y el *stock* de capital se obtuvieron de Posada y Rojas (2008) y del Grupo de Estudios del Crecimiento Económico (Greco, 2004), todos los cuales fueron actualizados de manera consistente hasta 2010 a partir de la información disponible en el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) y las cifras fiscales reportadas por el Banco de la República, cuya fuente es el Consejo Superior de Política Fiscal (Confis) y el Ministerio de Hacienda y Crédito Público. Los datos de la población se tomaron de las bases de datos estadísticas de la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (Cepal).

Resultados estimados

Para la estimación de los resultados se tienen en cuenta tanto el comportamiento del gasto del GNC sin intereses, como el supuesto según el cual los balances fiscales son siempre cero y, por tanto, el gasto público es equivalente al nivel de recaudo impositivo. Se realizan dos ejercicios econométricos. Primero, se estiman los parámetros del modelo para el período 1950-2010 y para los subperíodos 1950-1990 y 1991-2010. En el segundo ejercicio se analiza la sensibilidad de los resultados ante variaciones en el parámetro que representa el grado de aversión al riesgo, de acuerdo con los valores encontrados en la literatura para el caso colombiano.

²⁰Se asume que viene dado por un proceso estocástico, exógeno y autorregresivo, donde \bar{A} es el valor esperado de la productividad.

Se asume que la tasa de depreciación de capital es constante y conocida, 4,92% según Posada y Rojas (2008), y que el factor de descuento de la utilidad es 90% (Gómez y Posada, 2005)²¹. Por tanto, y haciendo énfasis en los parámetros α y θ para efectos del tamaño óptimo del gasto público que maximiza la tasa de crecimiento γ , el vector de parámetros desconocido queda dado por:

$$\phi = (\phi'_1 \phi'_2) = \left(\theta, \ln(A_0), \rho, \sigma_A^2, A_y, \ln(\gamma_x), \alpha, \ln(\bar{A}), n, \sigma_y, \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_y} \right), \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_y} \right) \right) \quad (36)$$

De acuerdo con los resultados del primer ejercicio (Cuadro 1), el parámetro que mide el grado de aversión al riesgo θ induce el deseo significativo de los individuos de suavizar el consumo a través del tiempo y, por tanto, los valores de la elasticidad intertemporal de sustitución (EIS) tienden a cero, entre 0,0825 y 0,135, lo que implica variaciones proporcionalmente pequeñas del consumo ante incrementos en la tasa del rendimiento del ahorro.

La evidencia internacional respalda este resultado: Campbell y Mankiw (1989), Kandel y Stambaugh (1991), Cochrane y Hansen (1992) y Obstfeld (1994) sostienen que en un escenario de crecimiento endógeno donde no es necesario introducir la tasa de interés real de largo plazo, la EIS tiende a cero y, por tanto, θ no tiene que ser siempre de un dígito. En particular, Harashima (2005) encontró para Estados Unidos una EIS entre 0,087 y 0,09. Liu y Sercu (2008), para un grupo de países europeos y usando la metodología GMM, estimaron θ entre 4,48 y 9,35. Sin embargo, aún no hay un consenso estricto sobre el nivel de la EIS, porque los trabajos microeconómicos difieren, en algunos casos, con los resultados macroeconómicos por la naturaleza de los datos agregados y el período muestral. Al parecer, los períodos grandes hacen que la EIS sea más baja.

Los resultados para el período 1950-2010 sugieren que la tasa máxima balanceada de crecimiento económico per cápita de 1,2% anual se alcanza con un tamaño óptimo de gasto del GNC de 11,0% del PIB. Tomando como referencia el período 1950-1990, la tasa de crecimiento de la renta per cápita de 1,5% se logra con un gasto público del 8,1% del PIB, y en 1991-2010, la tasa de crecimiento del ingreso per cápita de 0,6% se logra con un gasto del GNC de 15,6% del PIB. Sin embargo, las estimaciones derivadas con la regla que el gasto del GNC es equivalente al nivel de recaudo tributario revelan que la tasa de crecimiento económico per cápita del 1,1% se alcanza con un tamaño óptimo de gasto del GNC del 9,8% del PIB, entre 1950 y 2010. Si se toma el período 1950-1990, la tasa de crecimiento es de 1,5%, con un nivel de gasto público del 7,0% del PIB y desde el período 1991-2010 la tasa de crecimiento del ingreso per cápita del 0,9% anual se logra con un tamaño de gasto del GNC de 13,8% del PIB.

²¹ En esta etapa la tasa de interés real es: $r = Pmg_k - \delta$, por ser una economía en etapa de transición hacia el largo plazo.

CUADRO 1.
RESULTADOS DEL MODELO

Parámetros	(1950-2010)		(1950-1990)		(1991-2010)	
	Gasto	Impuestos	Gasto	Impuestos	Gasto	Impuestos
θ	9,10	10,38	7,39	7,93	12,1 ^C	9,6 ^D
$\ln(A_0)$	-0,15 ^A	-0,13 ^B	-0,31	-0,34	-0,49	-0,52
ρ_A	0,76	0,79	0,55	0,51	0,10	0,10
σ_A^2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A_y	13,38	13,39	13,34	13,34	14,36	14,37
$\ln(\gamma_x)$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
α	0,89	0,90	0,92	0,93	0,84	0,86
σ_y	0,03	0,03	0,02	0,02	0,03	0,03
σ_c / σ_y	1,10	1,09	1,18	1,18	1,10	1,11
σ_i / σ_y	6,29	6,31	5,31	5,32	5,41	5,41
$\ln(\bar{A})$	-0,59	-0,62	-0,67	-0,70	-0,54	-0,57
n	0,021	0,021	0,025	0,025	0,016	0,016
τ^*	11,0%	9,8%	8,1%	7,0%	15,6%	13,8%
γ_c^*	1,2%	1,1%	1,5%	1,5%	0,6%	0,9%

A: este parámetro es estadísticamente significativo a un nivel de 7,1%; B: significativo al 10,8%; C: significativo al 50%; D: significativo al 38%. Los demás son significativos en cualquier nivel.

* Tasa óptima de gasto público que garantiza una senda de crecimiento balanceado del consumo, el capital físico, el gasto público y el producto, a una misma tasa per cápita, es decir, $\gamma_c^* = \gamma_k = \gamma_g = \gamma_y$.

De lo anterior se deriva que es posible tener tasas de crecimiento del PIB per cápita al menos similares con un menor nivel de recursos públicos. La diferencia entre las tasas de crecimiento óptimas superiores, obtenidas bajo el supuesto de que el Estado gasta exactamente lo que percibe por ingresos, se puede interpretar de manera plausible como ineficiencia y corrupción en la asignación de los recursos públicos. Esto podría explicarse mediante los resultados de Acemoglu (2005), quien sugiere que cuando el Gobierno es débil, obstaculiza el crecimiento económico

y las consecuencias de la ineficiencia de su comportamiento se reflejan porque no puede transformar lo percibido en ingresos públicos en una relación uno a uno en la actividad productiva. Además, Mauro (1997) mostró que la corrupción puede ser capturada de manera similar a un impuesto a los ingresos públicos y, en consecuencia, relaciona la evidencia en algunos componentes del gasto público que están más sujetos a capturas mediante sobornos y, por tanto, a asignaciones ineficientes de los recursos públicos.

El segundo ejercicio mide el grado de sensibilidad del gasto público y la tasa de crecimiento del PIB per cápita en un escenario en el que el parámetro de aversión al riesgo θ se toma de la literatura para el caso colombiano. Estos valores se encuentran en: Gómez, Mahadeva y Rhenals (2011), con 1,542 y 2,249; Iregui y Melo (2009) con 2,47; y Grupo de Estudios del Crecimiento Económico (Greco, 2004), con 3,5 y 4. Con respecto al valor de uno, no existe evidencia empírica que lo respalde, pues es un caso teórico en donde la función CRRA se vuelve en una de tipo Inc_t , lo que llevaría a altas tasas de crecimiento, pero que no son óptimas, pues dependen del tipo de agente representativo modelado y el escenario establecido²².

De acuerdo con los resultados del lado izquierdo del Cuadro 2, en la medida en que el parámetro del grado de aversión al riesgo θ desciende desde el valor de 4 hasta 1,542, el tamaño óptimo del gasto público se incrementa desde 12,3% hasta 13,7% del PIB, y de la misma forma la tasa de crecimiento óptima del consumo per cápita se incrementa de 2,5% al 6,2% anual. Este nivel se sobrepasó a partir de 1994 cuando se observa que el gasto del GNC llegó al 14,4% del PIB y la tasa de crecimiento del PIB per cápita fue de 4,9%. Además, en los años en los cuales el nivel de gasto estuvo en el intervalo de las estimaciones, la tasa de crecimiento de la renta per cápita en promedio fue del 3,4% por año, mientras que cuando el nivel de gasto público estuvo por fuera de este intervalo la tasa de crecimiento del PIB per cápita disminuyó al 1,9% anual.

Los resultados del lado derecho del Cuadro 2, cuando no hay déficits fiscales y, por ende, el nivel de gasto del GNC tiene por regla ser equivalente al total de ingresos públicos, son similares en tendencia al cuadro anterior. En este caso, el tamaño óptimo del gasto público está entre 11,3% y 12,7% del PIB y la tasa máxima de crecimiento económico por habitante pasa del 2,7% al 6,8%. Este nivel de gasto se sobrepasó a partir de 1994, con 14,4% del PIB y con respecto al nivel de ingresos se superó en 2002 cuando el recaudo total llegó al 13,4% del PIB.

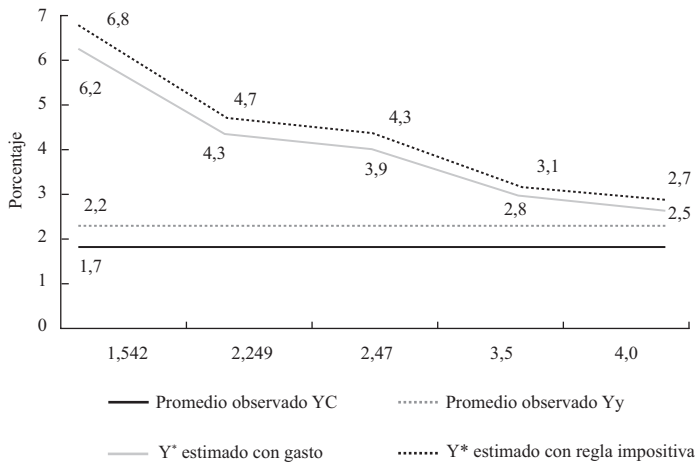
²²En el modelo de Ramsey (1928) la EIS determina la velocidad de ajuste en estado estacionario y el comportamiento de la tasa de ahorro durante la transición. Si la EIS es alta, entonces los fuertes cambios en el consumo no son costosos para los agentes porque las altas tasas de intereses conducen a ahorrar una mayor proporción de los ingresos. Mientras que si la elasticidad es baja, el motivo de suavizar el consumo es fuerte, por lo que los agentes consumen mucho y ahorran poco, así la tasa de interés real sea alta (Barro y Sala-i-Martin, 2004, p. 91). En este modelo, al contar con el gasto público, la EIS de los individuos es baja y, además, los impuestos distorsionan las decisiones de ahorro y consumo de los individuos, alejándolos de las decisiones óptimas.

CUADRO 2.
RESULTADOS DEL MODELO, 1950-2010

Parámetros	Con gasto del GNC						Con regla impositiva						
	1,542	2,249	2,47	3,5	4,0		1,542	2,249	2,47	3,5	4,0		
θ													
$\ln(A_0)$	-0,23	-0,22	-0,21	-0,19 ^E	0,18 ^E		-0,25	-0,24	-0,23	0,20 ^F			
ρ_A	0,56	0,59	0,60	0,65	0,67		0,54	0,57	0,58	0,64			
σ_A^2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00			
A_y	13,37	13,37	13,37	13,38	13,38		13,37	13,37	13,37	13,38			
$\ln(\gamma_x)$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02		0,02	0,02	0,02	0,02			
α	0,86	0,87	0,87	0,87	0,88		0,87	0,88	0,88	0,89			
σ_y	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02		0,02	0,02	0,02	0,02			
σ_c / σ_y	1,16	1,15	1,15	1,14	1,13		1,16	1,15	1,15	1,13			
σ_i / σ_y	5,98	6,00	6,01	6,05	6,08		6,01	6,02	6,03	6,06			
$\ln(\bar{A})$	-0,52	-0,53	-0,54	-0,55	-0,56		-0,54	-0,55	-0,55	-0,57			
n	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02		0,02	0,02	0,02	0,02			
τ^*	13,7%	13,3%	13,1%	12,6%	12,3%		12,7%	12,2%	12,1%	11,5%			
γ_c^*	6,2%	4,3%	4,0%	2,8%	2,5%		6,8%	4,7%	4,3%	3,1%			

E: este parámetro es estadísticamente significativo a un nivel de 2% y F: significativamente al 3%. Los demás son significativos en cualquier nivel.
* Tasa óptima de gasto público que garantiza una senda de crecimiento balanceado del consumo, el capital físico, el gasto público y el producto a una misma tasa per cápita, es decir, $\gamma_c^* = \gamma_k = \gamma_g = \gamma_y$. Los parámetros estimados son estadísticamente significativos en cualquier nivel.

GRÁFICA 7.
CRECIMIENTO ÓPTIMO ESTIMADO *VERSUS* GRADO DE
AVERSIÓN AL RIESGO, 1950-2010



Fuente: cálculos de los autores.

La Gráfica 7 compara los resultados de los Cuadros 1 y 2 y se deduce por tendencia que las tasas máximas de crecimiento del PIB per cápita son superadas cuando el gasto público tiene como regla ser equivalente al nivel de ingresos tributarios, en lugar del gasto del GNC para cada nivel de grado de aversión al riesgo. Esta diferencia se incrementa de 0,1% a 0,6% en la tasa de crecimiento de la renta per cápita, en la medida en que θ desciende de 4 a 1,542. Aunque esta diferencia en la tasa de crecimiento es pequeña, es claro que sí son sostenidas durante largos períodos de tiempo y generan grandes diferencias en los niveles de ingreso per cápita de largo plazo. Además, estas tasas óptimas superan las tasas promedio observadas de crecimiento de la renta y el consumo per cápita de 2,2% y 1,7%, respectivamente, durante el período de análisis.

La relación inversa entre el grado de aversión al riesgo y la tasa de gasto público óptima que maximiza la tasa de crecimiento puede explicarse por el comportamiento del ahorro de los hogares. El mecanismo es el siguiente: en la medida en que el grado de aversión al riesgo de los hogares disminuye, ellos están dispuestos a permitir variaciones en el nivel de consumo porque la utilidad marginal de su consumo disminuye lentamente. Esto permite que se liberen recursos privados para estimular actividades productivas que tienen como consecuencia un incremento en la tasa de crecimiento económico. Además, este mayor nivel de producto permite capturar un mayor nivel de ingresos, el cual garantiza la financiación del aumento del gasto público, incluso del consumo, debido al efecto de sustitución del consumo privado por el público. Este resultado verifica los efectos no neutra-

les del gasto público con respecto al consumo, la inversión privada y la producción a través de la oferta (Aschauer, 1989; Barro, 1981, 1990).

CONCLUSIONES

El modelo teórico y la evidencia de Barro (1990, 1991) sugieren que el tamaño del gasto en consumo público está relacionado con el crecimiento económico de manera negativa cuando sobrepasa cierto tamaño óptimo; el caso contrario ocurre con el componente de inversión pública y las medidas de estabilidad política que llevan a que el gasto público sea más productivo y, por tanto, aumente el crecimiento económico. Para el caso colombiano, se observa que la evolución del gasto público desde los años cincuenta ha tenido una tendencia creciente, que se aceleró desde la década de los noventa, cuando se incrementó el consumo público en detrimento de la inversión pública y aumentó el pago de intereses por el financiamiento del exceso de gasto a través de deuda pública, lo que implica que está frenando el crecimiento económico.

En efecto, las estimaciones sugieren que a partir de la mitad de los años noventa el gasto se volvió excesivo, con fuertes resultados para 1994, lo que sugiere que el gasto adicional podría estar obstaculizando en parte el logro de obtener mayores tasas de crecimiento del PIB per cápita. De la misma forma, los resultados sugieren la tendencia que las tasas de crecimiento son mayores cuando el nivel de gasto público utilizado es por regla equivalente al nivel de ingresos públicos, es decir, sin déficits primarios. Si bien estas diferencias en las tasas de crecimiento son pequeñas, sostenidas en el tiempo pueden generar diferencias importantes en los niveles de renta per cápita de largo plazo. Por ello, se deduce que el Estado colombiano presente grandes dificultades para transformar lo que percibe por ingresos públicos en una relación uno a uno con la actividad productiva, muy seguramente por temas relacionados con la ineficiencia y la corrupción en la asignación de los recursos públicos, que terminan obstaculizando el crecimiento económico.

Esto se debe a que en la actualidad el Estado está comprometido constitucionalmente y debe asumir un volumen creciente de servicios públicos, acompañado de un incremento de los pagos por intereses por la necesidad de financiar el faltante, lo que genera distorsiones en el mercado. Se deduce que una asignación más eficiente de los recursos públicos estimularía una mayor tasa de crecimiento económico que los aumentos en el gasto público *per se*. Por tal razón, se sugiere que ante la inflexibilidad constitucional de reducir los niveles elevados actuales de gasto público, se deben hacer esfuerzos en mejorar la recomposición con la cual se ha venido ejecutando dicho gasto, con el fin de armonizar mejor los objetivos entre la financiación, la eficiencia y la capacidad redistributiva del gasto público, lo que representa un reto para las finanzas públicas futuras.

Los resultados sugieren que el grado de aversión al riesgo es elevado para el caso colombiano y está relacionado de manera inversa con el tamaño óptimo del gasto

público que maximiza la tasa de crecimiento de la economía. En este escenario el parámetro estimado de aversión al riesgo es elevado, lo cual sugiere que la EIS es baja y, en consecuencia, los individuos no están dispuestos a permitir cambios bruscos en su senda de consumo a través del tiempo por cambios en la tasa de rendimiento del ahorro. En el otro escenario, con análisis de sensibilidad se obtuvo que el grado de aversión al riesgo está inversamente relacionado con el tamaño óptimo del gasto público y la tasa de crecimiento del producto, lo que implica que en este escenario, ante cambios en la tasa de interés, los individuos estarían dispuestos a permitir variaciones en el consumo para que su utilidad marginal intertemporal se mantenga inalterada. Por tanto, las decisiones sobre el gasto público deberían tener en cuenta el grado de aversión al riesgo, para determinar el tamaño óptimo que permita alcanzar la mejor tasa de crecimiento de la economía.

Finalmente, las propiedades asintóticas de la metodología GMM posibilitaron la modelación con resultados robustos, en un escenario no lineal con desenlace satisfactorio, teniendo en cuenta que las estimaciones son consistentes con algunos parámetros ya establecidos para la estructura de la economía colombiana. Lo anterior implica que mediante esta metodología se pueden abordar los modelos de equilibrio general dinámico estocástico (EGDE), por cuanto permite tener en cuenta todas las variables económicas que se determinan de forma simultánea.

REFERENCIAS

1. Acemoglu, D. (2005). Politics and economics in weak and strong states. *Journal of Monetary Economics*, 52, 1199-1226.
2. Alexiou, C. (2009). Government spending and economic growth: Econometric evidence from the South Eastern Europe (SEE). *Journal of Economic and Social Research*, 11(1), 1-16.
3. Armev, D. (1995). *The freedom revolution*. Washington, D. C.: Regnery.
4. Aschauer, D. (1989). Is public expenditure productive? *Journal of Monetary Economics*, 23, 177-200.
5. Avella, G. (2008). Perspectivas del crecimiento del gasto público en Colombia, 1925-2003 (Borrador de Economía 544). Banco de la República.
6. Barro, R. (1981). Output effects of government spending. *National Bureau of Economic Research*, 89, 1086-1121.
7. Barro, R. (1990). Government spending in a simple model of endogenous growth. *Journal of Political Economy*, 98(5), 103-125.
8. Barro, R. (1991). Economic growth in a cross section of countries. *Quarterly Journal of Economics*, 106, 407-444.
9. Barro, R., & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic growth* (2nd ed.). Cambridge: MIT Press.
10. Burnside, C. (1999). *Real business cycle models: Linear approximation and GMM estimation*. The World Bank.

11. Caballero, C. y Posada, C. (2003). Una nota sobre los elementos coyunturales y estructurales del déficit fiscal en el caso colombiano (Borrador de Economía 235). Banco de la República.
12. Campbell, J., & Mankiw, G. (1989). Consumption, income, and interest rates: Reinterpreting the time series evidence. En O. Blanchard y S. Fischer (eds.), *NBER Macroeconomics Annual* (vol. 4, pp. 185-246). US: MIT Press.
13. Cárdenas, M., Mejía, C., & Olivera, M. (2006). La economía política del proceso presupuestal en Colombia (Documento de Trabajo 31). Fedesarrollo.
14. Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies*, 32, 233-240.
15. Christiano, L., & Eichenbaum, M. (1992). Current real-business-cycle theories and aggregate labor-market fluctuations. *The American Economic Review*, 82(3), 430-450.
16. Cochrane, J., & Hansen, L. (1992). Asset pricing explorations for macroeconomics. En O. Blanchard y S. Fischer (eds.), *NBER Macroeconomics Annual* (vol. 7, pp. 115-182). US: MIT Press.
17. Dar, A., & AmirKhalkhali, S. (2002). Government size, factor accumulation, and economic growth: Evidence from OECD countries. *Journal of Policy Modeling*, 24, 679-692.
18. De Witte, K., & Moesen, W. (2010). Sizing the government. *Public Choice*, 145, 39-55.
19. Fischer, R. (1925). Theory of statistical estimation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 22, 700-725.
20. Fölster, S., & Henrekson, M. (2001). Growth effects of government expenditure and taxation in rich countries. *European Economic Review*, 45, 1501-1520.
21. Godambe, V. (1960). An optimum property of regular maximum likelihood estimation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31(4), 1208-1211.
22. Gómez, W. (2004). Gasto público... ¿y crecimiento económico?: una reflexión sobre el gasto público en Colombia y sus efectos sobre el crecimiento económico. *Perfil de Coyuntura Económica*, 3, 66-74.
23. Gómez, W. & Posada, C. (2005). Un choque del activo externo neto y el ciclo económico colombiano 1994-2001. *Lecturas de Economía*, 62, 35-74.
24. Gómez, W., Mahadeva, L., & Rhenals, R. (2011). Una estimación del papel de los bienes durables en la transmisión de la política monetaria. En M. Jalil y L. Mahadeva (eds.), *Mecanismos de transmisión de la política monetaria en Colombia* (pp. 297-347). Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

25. Gómez, W., & Rhenals, R. (2007). Un cálculo del déficit fiscal estructural: Análisis y una propuesta metodológica. *Perfil de Coyuntura Económica*, 10, 47-70.
26. Greene, W. (2002). *Econometric analysis* (5th ed.). Nueva Jersey: Prentice Hall.
27. Grupo de Estudios del Crecimiento Económico (Greco). (2004). *El crecimiento económico colombiano en el siglo xx*. Bogotá: Fondo de Cultura Económica.
28. Hansen, L. (1982). Large sample properties of generalized moments estimators. *Econometrica*, 50(4), 1029-1054.
29. Harashima, T. (2005). An estimate of the elasticity of intertemporal substitution in a production economy (Working Paper 508030). Cabinet Office of Japan, University of Tsukuba.
30. Inada, K. (1963). On a two-sector model of economic growth: Comments and a generalization. *Review of Economic Studies*, 30, 119-127.
31. Iregui, A., & Melo, L. (2009). La transmisión de la política monetaria sobre el consumo en presencia de restricciones de liquidez (Borrador de Economía 547). Banco de la República.
32. Johnston, J., & Dinardo, J. (1997). *Econometric methods* (4th ed.). Singapur: McGraw-Hill.
33. Junguito, R., & Rincón, H. (2007). La política fiscal en el siglo xx en Colombia. En J. Robinson, & M. Urrutia (eds.), *Economía colombiana del siglo XX: un análisis cuantitativo* (pp. 239-312). Bogotá: Fondo de Cultura Económica.
34. Kandel, S., & Stambaugh, R. (1991). Asset returns and intertemporal preferences. *Journal of Monetary Economics*, 27, 39-71.
35. Koopmans, T. (1965). On the concept of optimal economic growth. *The econometric approach to development planning*. Ámsterdam: North Holland.
36. Liu, F., & Sercu, P. (2008). *Estimating the intertemporal substitution elasticity: An international study* (Working Paper). University of Leuven. Bruselas Bélgica.
37. Lizardo, R., & Mollick, A. (2006). Can Latin America prosper by reducing the size of government? *Cato Journal*, 29(2), 247-266.
38. Lucas, R. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22, 3-42.
39. Mauro, P. (1997). The effects of corruption on growth, investment, and government expenditure. En K. Elliot (ed.), *Corruption and the world economy* (pp. 83-107). Institute of International Economics.
40. Novales, A., Fernández, E., & Ruiz, J. (2009). *Economic growth theory and numerical solution methods*. España: Springer.

41. Obstfeld, M. (1994). Risk-taking, global diversification, and growth. *The American Economic Review*, 84(5), 1310-1329.
42. Ocampo, J. (2007). *Historia económica de Colombia*. Bogotá: Planeta.
43. Olivera, M., Pachón, M., & Perry, G. (2010). **The political economy of fiscal reform: The case of Colombia, 1986-2006** (Working Paper 181). Inter-American Development Bank.
44. Posada, C. (1996). ¿Por qué ha crecido el gasto público? (Borrador de Economía 51). Banco de la República.
45. Posada, C., & Escobar, J. (2003). Crecimiento económico y gasto público: Un modelo para el caso colombiano (1982-1999) (Borrador de Economía 258). Banco de la República.
46. Posada, C., & Gómez, W. (2002). Crecimiento económico y gasto público: un modelo para el caso colombiano. *Ensayos sobre Política Económica*, 41-42, 5-86.
47. Posada, C., & Rojas, A. (2008). El crecimiento económico colombiano: Datos nuevos y modelos viejos para interpretar el período de 1925-2000 (Borrador de Economía 480). Banco de la República.
48. Prada, J., & Rojas, L. (2009). La elasticidad de Frisch y la transmisión de la política monetaria en Colombia. En M. Jalil, & L. Mahadeva (eds.), *Mecanismos de transmisión de la política monetaria en Colombia* (pp. 643-699). Bogotá: Universidad Externado de Colombia.
49. Ramsey, F. (1928). A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, 38, 543-559.
50. Rebelo, S. (1991). Long-run policy analysis and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 99, 500-521.
51. Romer, D. (2006). *Macroeconomía avanzada* (2ª ed.). España: McGraw-Hill.
52. Romer, P. (1990). Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, 98, part 2, S71-S102.
53. Sala-i-Martin, X. (2000). *Apuntes de crecimiento económico* (2ª ed.). Barcelona: Antoni Bosch.
54. Solow, R. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.
55. Swan, T. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32, 334-361.
56. Vedder, R., & Gallaway, L. (1998). *Government size and economic growth*. Paper prepared for the Joint Economic Committee, Washington, D. C.

ANEXOS

Anexo 1.

Modelo de crecimiento endógeno en tiempo discreto

Barro (1990) introduce una versión del modelo AK que incluye los servicios provistos por el gasto público, g_t , como un factor adicional productivo:

$$y_t = Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{A1})$$

El Gobierno sigue una restricción presupuestaria y así el gasto público se vuelve endógeno por la estructura del financiamiento del gasto:

$$g_t = \tau y_t = \tau Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha} = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} k_t \quad (\text{A2})$$

El gasto público se acumula a lo largo del tiempo y es proporcional al capital privado. La función de producción se puede escribir como una versión del modelo AK estándar y, por ello, carece de transición dinámica:

$$y_t = A^{\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} k_t \quad (\text{A3})$$

La restricción de recursos del agente representativo con gobierno:

$$\begin{aligned} S_t &= I_t \\ Y_t - C_t - G_t &= K_{t+1} - K_t + \delta K_t \end{aligned}$$

Expresada en términos per cápita y teniendo en cuenta que $N_{t+1} = (1+n)N_t$:

$$(1-\tau)Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha} - c_t + (1-\delta)k_t = (1+n)k_{t+1} \quad (\text{A4})$$

Se asume la función de utilidad CRRA y, además, que la oferta de trabajo es inelástica. Por tanto, el problema del agente representativo es:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} - \lambda_t \left[(1+n)k_{t+1} - (1-\tau)Ak_t^\alpha g_t^{1-\alpha} + c_t - (1-\delta)k_t \right] \right\} \quad (\text{A5})$$

Las condiciones de primer orden o ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t (c_t^{-\theta} - \lambda_t) = 0 \quad (\text{A6})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = E_t \left[-\beta^t \lambda_t (1+n) + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left((1-\tau) A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right) \right] = 0 \quad (A7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = (1+n)k_{t+1} - (1-\tau) A k_t^\alpha g_t^{1-\alpha} + c_t - (1-\delta)k_t = 0 \quad (A8)$$

De la ecuación [6], en función del multiplicador de Lagrange o precio sombra del consumo e iterando hacia adelante:

$$1 + \gamma_{c_{t+1}} \equiv \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (A9)$$

Recordando que $g_{t+1} = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} k_{t+1}$:

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} = \frac{\beta \left[(1-\tau) A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} g_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right]}{(1+n)} = \frac{\beta \left[(1-\tau) \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (1-\delta) \right]}{(1+n)}$$

Luego la tasa óptima de crecimiento del consumo:

$$\gamma_{c_{t+1}} = E_t \left[\frac{\beta \left[(1-\tau) \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (1-\delta) \right]}{(1+n)} \right]^{\frac{1}{\theta}} - 1 \quad (A10)$$

Usando esta condición, la restricción global de recursos (ecuación [4]) y la condición de transversalidad: $\lim_{t \rightarrow \infty} (1+n) \beta^t \lambda_t k_{t+1} = 0$, donde λ_t es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción global de recursos. La condición de Euler muestra que la tasa de crecimiento del consumo c_t es constante en el tiempo. Desde que el gasto público sea proporcional al capital privado en cada período, ambos factores comparten la misma tasa de crecimiento en todos los puntos del tiempo:

$$\frac{c_t}{k_t} = (1-\tau) A \left(\frac{k_t}{g_t} \right)^{\alpha-1} + (1-\delta) - (1+n)(1 + \gamma_{k_{t+1}}) \quad (A11)$$

Como $k_t / g_t = 1 / (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}}$ es una constante, existe una senda de crecimiento balanceada hacia el equilibrio con el consumo y el capital creciendo a la misma tasa, la cual hace que c_t / k_t sea una constante, π , lo que es equivalente a que $c_t = \pi k_t$, y tomando el diferencial total en proporción del consumo y el capital, respectivamente: $\Delta c_t / c_t = \Delta k_t / k_t$, tenemos, por tanto: $\gamma_c = \gamma_k$. El mismo procedimiento se aplica con $k_t = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} g_t$, para llegar a $\gamma_k = \gamma_g$ y, de igual forma, se aplica desde la producción con $y_t = A (k_t / g_t)^\alpha g_t = A \left((\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha g_t$, para llegar a $\gamma_y = \gamma_g$. De esta

forma se demuestra que en estado estacionario en este modelo *AK* las diferentes variables per cápita crecen a la misma tasa: $\gamma_c = \gamma_k = \gamma_g = \gamma_y = \gamma^*$.

Anexo 2.

CUADRO A2.1.
RESULTADOS ESTADÍSTICOS DEL MODELO^a

θ	9,10 (-0,002)	10,3 (0,002)	7,39 (0,000)	7,93 (0,000)	12,1 (0,496)	9,66 (0,381)
$\ln(A_0)$	-0,15 (0,071)	-0,13 (0,108)	-0,31 (0,001)	-0,34 (0,000)	-0,49 (0,000)	-0,52 (0,000)
ρ_A	0,76 (0,000)	0,79 (0,000)	0,55 (0,000)	0,51 (0,000)	0,10 (0,000)	0,10 (0,000)
σ_A^2	0,00 (0,000)	0,00 (0,001)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,004)	0,00 (0,001)
A_y	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	14,3 (0,000)	14,3 (0,000)
$\ln(\gamma_x)$	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,01 (0,000)	0,01 (0,000)
α	0,89 (0,000)	0,90 (0,000)	0,92 (0,000)	0,93 (0,000)	0,84 (0,000)	0,86 (0,000)
σ_y	0,03 (0,000)	0,03 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,03 (0,000)	0,03 (0,000)
σ_c / σ_y	1,10 (0,000)	1,09 (0,000)	1,18 (0,000)	1,18 (0,000)	1,10 (0,000)	1,11 (0,000)
σ_i / σ_y	6,29 (0,000)	6,31 (0,000)	5,31 (0,000)	5,32 (0,000)	5,41 (0,000)	5,41 (0,000)
$\ln(\bar{A})$	-0,59 (0,000)	-0,62 (0,000)	-0,67 (0,000)	-0,70 (0,000)	-0,54 (0,000)	-0,57 (0,000)
n	0,021 (0,000)	0,021 (0,000)	0,025 (0,000)	0,025 (0,000)	0,016 (0,000)	0,016 (0,000)

^a Los datos entre paréntesis son los p-valores para cada parámetro.

CUADRO A2.2.
RESULTADOS ESTADÍSTICOS DEL MODELO^a

$\ln(A_0)$	-0,23 (0,001)	-0,22 (0,003)	-0,21 (0,004)	-0,19 (0,016)	-0,18 (0,024)	-0,25 (0,000)	-0,24 (0,002)	-0,23 (0,003)	-0,20 (0,018)	-0,19 (0,028)
ρ_A	0,56 (0,000)	0,59 (0,000)	0,60 (0,000)	0,65 (0,000)	0,67 (0,000)	0,54 (0,000)	0,57 (0,000)	0,58 (0,000)	0,64 (0,000)	0,67 (0,000)
σ_A^2	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)	0,00 (0,000)
A_y	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)	13,3 (0,000)
$\ln(\gamma_x)$	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)
α	0,86 (0,000)	0,87 (0,000)	0,87 (0,000)	0,87 (0,000)	0,87 (0,000)	0,87 (0,000)	0,88 (0,000)	0,88 (0,000)	0,89 (0,000)	0,89 (0,000)
σ_y	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)
σ_c / σ_y	1,16 (0,000)	1,15 (0,000)	1,15 (0,000)	1,14 (0,000)	1,13 (0,000)	1,16 (0,000)	1,15 (0,000)	1,15 (0,000)	1,13 (0,000)	1,13 (0,000)
σ_i / σ_y	5,98 (0,000)	6,00 (0,000)	6,01 (0,000)	6,05 (0,000)	6,08 (0,000)	6,01 (0,000)	6,02 (0,000)	6,03 (0,000)	6,06 (0,000)	6,08 (0,000)
$\ln(\bar{A})$	-0,52 (0,000)	-0,53 (0,000)	-0,54 (0,000)	-0,55 (0,000)	-0,56 (0,000)	-0,54 (0,000)	-0,55 (0,000)	-0,55 (0,000)	-0,57 (0,000)	-0,58 (0,000)
n	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)	0,02 (0,000)

^a Los datos entre paréntesis son los p-valores para cada parámetro.

GRÁFICA A2.1.
RESIDUALES DEL MODELO

