ARTÍCULO

VALORACIÓN DE DERIVADOS EUROPEOS CON MIXTURA DE DISTRIBUCIONES WEIBULL

Andrés Mauricio Molina
José Alfredo Jiménez

Molina, A. M., & Jiménez, J. A. (2015). Valoración de derivados europeos con mixtura de distribuciones Weibull. *Cuadernos de Economía, 34*(65), 279-298.

El modelo Black-Scholes para valoración de opciones europeas se usa bastante en el mercado por su fácil ejecución. Sin embargo, empieza a ser poco preciso en diferentes activos cuya dinámica no es de una distribución lognormal, por lo que se necesita buscar nuevas distribuciones para valorar opciones emitidas sobre diferentes activos subyacentes. Varios investigadores han trabajado en nuevas fórmulas de valoración de derivados suponiendo diferentes distribuciones ya sea para el precio

A. M. Molina
Matemático y Magíster en Matemática Aplicada. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, D. C. (Colombia).
Correo electrónico: ammolinaba@unal.edu.co.

J. A. Jiménez
Profesor Asociado del Departamento de Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, D. C. (Colombia).
Correo electrónico: josajimenezm@unal.edu.co.

Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de los evaluadores asignados por la revista *Cuadernos de Economía* a la versión inicial de este artículo, ya que permitieron mejorar y clarificar la notación y metodología planteada en él.

Sugerencia de citación: Molina, A. M., & Jiménez, J. A. (2015). Valoración de derivados europeos con mixtura de distribuciones Weibull. *Cuadernos de Economía*, *34*(65), 279-298. doi: 10.15446/cuad.econ.v34n65.48656

Este artículo fue recibido el 28 de marzo de 2014, ajustado el 01 de julio de 2014 y su publicación aprobada el 8 de agosto de 2014.

del activo subyacente o para su retorno. Este artículo presenta dos fórmulas para valoración de activos: una modifica la fórmula usando una distribución de Weibull de dos parámetros propuesta por Savickas (2002) añadiendo dos nuevos parámetros (escala y localización) y otra supone que la distribución del activo es una mixtura de distribuciones de Weibull. Se presentan también comparaciones de estos modelos con otros ya existentes como Black-Scholes y el modelo de Savickas con distribución Weibull simple.

Palabras clave: distribución Weibull, mixtura de Weibull, valoración, opciones.
JEL: C15, C69, G13.

Molina, A. M., & Jiménez, J. A. (2015). Valuation for European derivatives with mixture-Weibull distributions. ***Cuadernos de Economía, 34*****(65), 279-298.**

The Black-Scholes valuation model for European options is widely used in the stock markets due to its easy implementation. However, the model is not accurate for different assets whose dynamics do not follow those of a lognormal distribution, so it is necessary to investigate new distributions to price different options written on various underlying assets. Several researchers have worked on new valuation formulas, assuming different distributions for either the price of the underlying asset or for the return of the same. This paper presents two methods for European derivatives valuation, one of them, modifying the formula using a Weibull distribution with two parameters given by Savickas (2002) adding two new parameters (scale and location), and another assuming that the underlying distribution is a Weibull mixture. Comparisons are also presented with these models against existing models such as the Black-Scholes model and Savickas with a simple Weibull distribution.

Keywords: Weibull distribution, mixture of Weibull, valuation, European options.
JEL: C15, C69, G13.

Molina, A. M., & Jiménez, J. A. (2015). Évaluation de dérivés européens avec mélange de distributions de Weibull. ***Cuadernos de Economía, 34*****(65), 279-298.**

Le modèle Black-Scholes pour l'évaluation d'options européennes est largement utilisé sur le marché en raison de son utilisation facile. Cependant, il perd de sa précision dans divers actifs dont la dynamique n'est pas celle d'une distribution log-normale, raison pour laquelle il convient de chercher de nouvelles distributions pour évaluer des options émises sur divers actifs sous-jacents. Plusieurs chercheurs ont travaillé sur de nouvelles formules d'évaluation de dérivés en supposant des distributions différentes que ce soit pour le prix de l'actif sous-jacent ou pour son retour. Cet article présente deux formules pour évaluer les actifs : l'une modifie la formule en utilisant une distribution de Weibull de deux paramètres proposée par Savickas (2002) en incluant deux nouveaux paramètres (échelle et localisation) et l'autre suppose que la distribution de l'actif est un mélange de distributions de Weibull. Des comparaisons de ces modèles avec d'autres déjà existants comme

Black-Scholes et le modèle de Savickas avec distribution de Weibull simple sont également présentées.

Mots-clés : distribution de Weibull, mélange de Weibull, évaluation, options.
JEL : C15, C69, G13.

Molina, A. M., & Jiménez, J. A. (2015). Avaliação de derivados europeus com mistura de distribuições Weibull. ***Cuadernos de Economía, 34*****(65), 279-298.**

O modelo Black-Scholes para avaliação de opções europeias é muito utilizado no mercado por sua fácil execução. No entanto, começa a ser pouco preciso em diferentes ativos cuja dinâmica não é de uma distribuição log-normal, pelo que é preciso procurar novas distribuições para avaliar opções emitidas sobre diferentes ativos subjacentes. Vários pesquisadores têm trabalhado em novas fórmulas de avaliação de derivados supondo diferentes distribuições, seja para o preço do ativo subjacente ou para o seu retorno. Este artigo apresenta duas fórmulas para avaliação de ativos: Uma modifica a fórmula utilizando uma distribuição de Weibull de dois parâmetros, proposta por Savickas (2002), acrescentando dois novos parâmetros (escala e localização), e outra supõe que a distribuição do ativo é uma mistura de distribuições de Weibull. Também são apresentadas comparações destes modelos com outros já existentes como Black-Scholes e o modelo de Savickas com distribuição Weibull simples.

Palavras-chave: distribuição Weibull, mistura de Weibull, avaliação, opções.
JEL: C15, C69, G13.

INTRODUCCIÓN

La fórmula de valoración de opciones europeas de Black-Scholes (1973) se utiliza bastante en el mercado gracias a su simplicidad. Sin embargo, este modelo empieza a ser poco preciso al valorar opciones por los supuestos sobre el comportamiento de los precios de los activos subyacentes cuyas deficiencias han sido estudiadas por diferentes autores como Das y Sundaram (1999) o Jondeau, Poon y Rockinger (2007). Se considera también que la volatilidad es constante, motivo por el cual han surgido modelos más sofisticados en los que se supone que la distribución de probabilidad para los precios de los activos subyacentes presenta asimetría y exceso de curtosis, o bien se le asigna una dinámica a la volatilidad como proceso estocástico como el modelo de Heston (1993). Savickas (2002) selecciona una distribución de Weibull para la distribución del activo subyacente. Según este autor, la propiedad más importante por la cual se puede emplear la distribución de Weibull en la valoración de opciones es la asimetría negativa para casi todos los parámetros de la distribución, siendo mayor esta que la del modelo lognormal. Así, usando la expansión generalizada de Edgeworth, con los tres primeros momentos se aproxima mejor con una distribución Weibull que con una lognormal, como plantea el modelo de Black-Scholes (MBS). Se realizaron experimentos con datos del índice S&P 500 y se observó que no siempre se obtenía una mejor valoración que con el modelo Black-Scholes; de aquí se propuso usar dos parámetros de localización y escala en la distribución de Weibull para mejorar la valoración obtenida, sin afectar el signo del tercer momento (Groeneveld y Meeden, 1984), como se había planteado. Por otro lado, Bahra (1997) introduce la mixtura de distribuciones normales para valorar opciones y obtiene una ponderación de dos valoraciones con Black-Scholes que considera cinco parámetros para esta mixtura. En este artículo se usa esta metodología pero con mixtura de distribuciones Weibull para observar los cambios con respecto al modelo ya planteado. El costo computacional para estimar parámetros de una mixtura de distribuciones Weibull es alto, pero puede presentar características deseadas con respecto a la forma funcional de la distribución del activo subyacente, como bimodalidad, asimetría negativa y exceso de curtosis. Desde este punto de vista, efectos causados por eventos inesperados modelados con procesos de saltos pueden modelarse de manera simple por esta mixtura de distribuciones no lognormales.

El artículo primero muestra las propiedades básicas de la distribución de Weibull y mixtura de dos distribuciones Weibull y luego se presentan las fórmulas para valorar opciones europeas. En la sección correspondiente se muestra cómo se estiman los parámetros y en la siguiente (resultados numéricos) se muestra un ejemplo comparativo de los modelos descritos.

DISTRIBUCIÓN DE WEIBULL

En esta sección se presentan brevemente las distribuciones que se usarán para calcular los precios de derivados.

Distribución Weibull de dos parámetros

Una variable aleatoria continua tiene una distribución de Weibull (Rinne, 2009) de parámetros c (forma) y b (escala) si su función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{c}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right\} \qquad x \geq 0$$

En este caso se denota $X \sim \mathrm{Wei}(b, c)$, donde $c > 0$ es el parámetro de forma y $b > 0$ es el de escala.

Su función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right\} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Su media y varianza están dadas por

$$E(X) = b\Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right)$$

$$Var(X) = b^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{c} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{c} + 1\right)\right]$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma definida por

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt$$

Mixtura de distribuciones Weibull

Se considera una distribución de mixturas de Weibull con cuatro parámetros: dos parámetros de escala y dos de forma, como se presenta en Falls (1970). Decimos que una variable aleatoria se distribuye con mixtura de Weibull y la notamos $X \sim MWei(\alpha, c_1, c_2, b_1, b_2)$ si su función de densidad es:

$$f(x) = \alpha f_1(x) + (1 - \alpha) f_2(x) \qquad 0 < \alpha < 1$$

con

$$f_i(x) = \frac{c_i}{b_i}\left(\frac{x}{b_i}\right)^{c_i - 1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b_i}\right)^{c_i}\right\} \qquad x \geq 0$$

donde $c_i > 0$ y $b_i > 0$ son los parámetros de forma y escala respectivamente, para $i = 1, 2$. Es inmediato que su función de acumulación también es una ponderación de las funciones de acumulación para cada una de las componentes de la mixtura, es decir:

$$F(x) = \alpha F_1(x) + (1 - \alpha) F_2(x)$$

donde cada $F_i(x)$ es la función de acumulación para cada una de las componentes de la mixtura. Otra propiedad importante de la mixtura de distribuciones está en el cálculo de su media, ya que también resulta como la ponderación de las medias de cada una de sus componentes. Esto es:

$$E(X) = \alpha E(X_1) + (1-\alpha)E(X_2)$$

donde $X_i \sim Wei(c_i, b_i)$ para $i = 1,2$.

FÓRMULAS DE VALORACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS

En esta sección se mostrarán las fórmulas de valoración para opciones europeas. Las fórmulas se desarrollaron para opciones europeas de compra, y se supone que se cumple la paridad *put-call*. De esta manera se pueden deducir los precios para ambos tipos de opciones. Sea S_t el precio del subyacente en el tiempo t, $C_t(K)$ denota el precio de una opción de compra con precio de ejercicio K y fecha de madurez $T = t + \tau$. Se da por sentado que la tasa de interés r es libre de riesgo. De acuerdo con Harrison y Pliska (1981), en ausencia de arbitraje el precio de una opción europea de compra es:

$$C(t,\tau;K) = \mathbb{E}[e^{-rt}\text{máx}\{S_T - K, 0\}] = e^{-r\tau}\mathbb{E}\left[\text{máx}\{S_T - K, 0\}\right]$$

$$C_t(K) = e^{-r\tau}\int_K^{\infty}(S_T - K)f(S_T)dS_T \tag{1}$$

donde $\mathbb{E}[\cdot]$ es el operador de esperanza neutral al riesgo, condicional a cualquier información disponible en el momento t y $f(S_T)$ es la función de densidad neutral al riesgo (RND) del subyacente en la fecha de madurez. La forma de la distribución $f(S_T)$ es fundamental; de ahí la importancia que adquieren los coeficientes de asimetría y curtosis (en MBS se supone que es lognormal). En ausencia de arbitraje, el valor esperado futuro descontado a la tasa de interés libre de riesgo es una martingala (Neftci, 2000), esto es:

$$\mathbb{E}[e^{-r\tau}S_T] = S_t \tag{2}$$

y la desviación estándar de $\ln(S_t)$ es $\sigma\sqrt{\tau}$, donde σ es la volatilidad del activo. En el artículo de Savickas (2002) se usa la distribución de Weibull con dos parámetros para modelar la distribución del subyacente S_T.

Modelo Weibull de valoración

En Savickas (2005) se dio la siguiente fórmula de valoración para una opción europea de compra con fecha de madurez en T, precio de ejercicio K y tasa de interés libre de riesgo r:

$$C_t(K) = S_t[1 - F_{2(1+1/\beta)}(2\omega)] - Ke^{-r\tau}e^{-\omega} \tag{3}$$

donde $F_d(a)$ es la función de acumulación en el punto a de un variable aleatoria χ^2 con d grados de libertad y:

$$\omega = \alpha K^{\beta} e^{-\beta r\tau} \quad \beta = 1/(p-1)$$

$$\alpha = \left[\frac{\Gamma(1+1/\beta)}{S_t}\right]^{\beta}$$

Esta fórmula la desarrolla suponiendo que la función de densidad para el precio del subyacente es una Weibull de dos parámetros, y la construye a partir de medidas de martingalas equivalentes en tiempo discreto donde usa un algoritmo numérico para obtener el valor de p, que depende de la volatilidad, la media y la tasa libre de riesgo (Savickas, 2005).

Ajuste de la fórmula

Para modelar la variable aleatoria S_T se introducen dos parámetros adicionales, A (localización) y B (escala) (Jiménez, Arunachalam y Serna, 2014), y se propone la siguiente transformación

$$S_T = A + BY_T \quad \text{con} \quad Y_T \sim Wei(c,b) \tag{4}$$

Para la nueva variable aleatoria S_T, su valor esperado es:

$$E(S_T) = A + BE(Y_T) = S_t e^{r\tau} \tag{5}$$

Con la transformación anterior y la valoración neutral al riesgo, el precio de una opción europea de compra con precio inicial del subyacente S_t, precio de ejercicio K, tasa de interés libre de riesgo r y madurez T, viene dado por:

$$C_t(K) = \frac{S_t - Ae^{-r\tau}}{b\Gamma(1+1/c)}\left[b[\Gamma(1+1/c) - \Gamma_{\omega}(1+1/c)] - ke^{-\omega}\right] \tag{6}$$

donde

$$k = \frac{K-A}{B} \qquad \omega = \left(\frac{k}{b}\right)^{c}$$

$\Gamma_d(\cdot)$ representa la función gamma incompleta definida como:

$$\Gamma_d(a) = \int_0^d t^{a-1} e^{-t}\, dt$$

(Véase anexo para la demostración). La similitud con la fórmula de Savickas con esta nueva fórmula se puede observar cuando $A = 0$ y $B = 1$, pero en Savickas

(2002) con esta fórmula la estimación de parámetros se hace por medio igualación de momentos centrales (véase siguiente sección).

Mixtura de Weibull

Se considera la misma transformación (4). La fórmula de valoración de opciones de compra europeas con los parámetros de la distribución de mixtura de Weibull está dada por:

$$C_t^{mix}(k) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^{2} \alpha_i B\left[b_i \left(\Gamma(1+1/c_i) - \Gamma_{\omega_i}(1+1/c_i) \right) - ke^{-\omega_i} \right] \tag{7}$$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Obsérvese que si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, la fórmula queda reducida al modelo de Savickas con parámetros de localización y escala $A = 0$ y $B = 1$, respectivamente. La demostración puede encontrarse en el anexo.

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Para modelar el precio de las opciones europeas se consideran los datos actuales del mercado. Se estima el valor de los parámetros de dos maneras, a saber: por minimización de errores cuadráticos en la formula o calculando estimadores para utilizarlos directamente en la función de distribución neutral al riesgo. Los modelos propuestos se prueban con datos de los precios del índice S&P 500. Se debe tener en cuenta que incluso el precio del subyacente puede estar mal calculado por el mercado, y por tanto también el precio de la opción será incorrecto.

Minimización de errores cuadráticos

Está técnica se usó en Bahra (1997) para estimar los parámetros de su fórmula de valoración con mixtura de normales. Se considera una función con los parámetros de la fórmula de valoración y los precios observados en el mercado. Se usa un método de optimización en varias variables, que puede ser el método de Newton o gradiente conjugado. Se supone que la tasa de interés r se conoce y así se puede reducir la dimensionalidad del problema. Dado que tanto las opciones de compra como las de venta tienen la misma distribución para el activo subyacente, estas se incluyen en la función objetivo para mejorar la estimación de los parámetros. También la media de la distribución neutral al riesgo debe igualarse con el precio del subyacente al vencimiento de la opción (Bahra, 1997). De esta manera se trata el activo subyacente como una opción con precio de ejercicio cero que incluye el precio futuro como información adicional para el problema de minimización. El problema para la fórmula (11), y considerando su media, se describe a continuación. Sean $\tilde{C}_i$ y $\tilde{P}_i$ los precios observados de compra y venta, respectivamente.

$$\min_{A,B,b,c} \quad \sum_{i=1}^{n} (C_t(K_i) - \tilde{C}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (P_t(K_i) - \tilde{P}_i)^2 + (A + Bb\Gamma(1+1/c) - S_t e^{r\tau})^2 \tag{8}$$

para $-\infty < A, B < \infty$ y $b, c > 0$. Se hacen las mismas consideraciones para la fórmula de valoración con mixtura de Weibull, que sería un problema con cinco parámetros $0 < \alpha < 1$, $c_1, c_2, b_1, b_2 > 0$.

$$\begin{aligned}\min_{\alpha, c_1, c_2, b_1, b_2} \quad & \sum_{i=1}^{n}(C_t(K_i) - \tilde{C}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(P_t(K_i) - \tilde{P}_i)^2 \\ & +(\alpha b_1 \Gamma(1+1/c_1) + (1-\alpha) b_2 \Gamma(1-1/c_2) - S_t e^{r\tau})^2\end{aligned} \tag{9}$$

Estimación de parámetros por método de momentos

Para la fórmula de Weibull modificada y la mixtura de Weibull, la estimación de parámetros se realiza con el método de los momentos centrales. Dada la transformación de la variable aleatoria Y que se obtiene de la ecuación (4), se tienen que estimar cuatro parámetros A, B, b, c y siete para el caso de la mixtura $A, B, \alpha, b_1, b_2, c_1, c_2$, de los cuales se tiene que plantear el mismo número de ecuaciones. Dados los momentos centrales muestrales, se igualan con los momentos centrales poblacionales. Sea $\mu_x = E(X)$ y $\mu_y = E(Y)$, entonces se plantea el siguiente sistema de ecuaciones.

$$E(X) = A + BE(Y)$$

Luego,

$$E(X - \mu_x)^k = B^k E(Y - \mu_y)^k$$

Al expandir el polinomio y aplicando las propiedades de linealidad del valor esperado, se tiene:

$$E(X - \mu_x)^k = B^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \mu_y^{k-i} \left(\alpha b_1^i \Gamma(1 + i/c_1) + (1-\alpha) b_2^i \Gamma(1 + i/c_2)\right) \tag{10}$$

para $k = 2, \ldots, 7$

RESULTADOS NUMÉRICOS

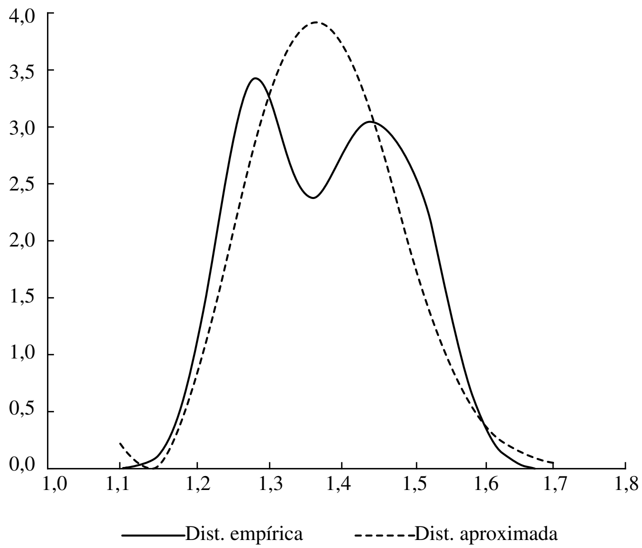
Para una serie de precios del índice S&P500, con los precios diarios tomando 503 datos[1], se analiza primero la distribución empírica asociada a estos.

[1] Datos tomados de http://finance.yahoo.com/

N	503
Media	1,3857
Des.estándar	0,0978
Asimetría	0,0971
Curtosis	4,6031

Para el método de los momentos para una distribución Weibull modificada, se tiene que el parámetro de localización $A = 1{,}1465$, parámetros de escala $B = 0{,}0909$, de escala de la distribución de Weibull $b = 2{,}9606$ y de forma $c = 2{,}6360$. En la Gráfica 1 se pueden ver ambas distribuciones:

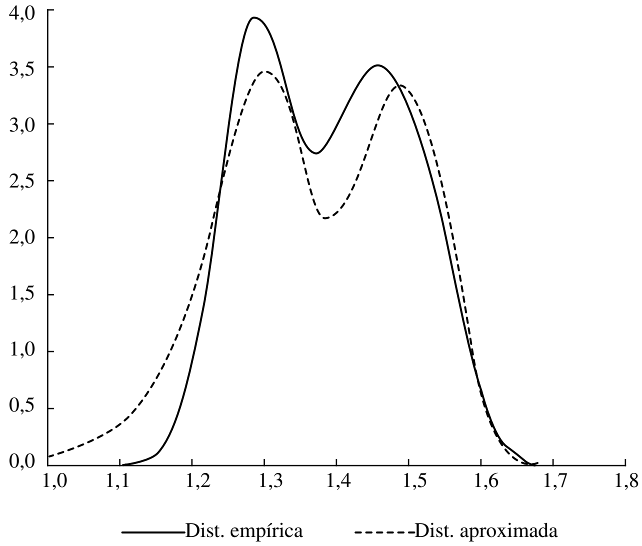
GRÁFICA 1.
DISTRIBUCIÓN APROXIMADA CON WEIBULL Y REAL PARA PRECIOS DEL S&P 500



Fuente: elaboración propia.

Como se observa, la distribución empírica tiene un comportamiento bimodal, por lo que una mixtura de Weibull ajustaría mejor los datos de los precios que una distribución lognormal o incluso una Weibull de dos parámetros. Para la mixtura de Weibull, los parámetros escala y localización son respectivamente: $A = 0{,}9566$, $B = 0{,}3539$, el parámetro de mixtura $\alpha = 0{,}8795$, los parámetros de forma $c_1 = 3{,}8745$, $c_2 = 4{,}7006$ y los de escala $b_1 = 1{,}2246$ y $b_2 = 2{,}1585$. La Gráfica 2 presenta la distribución con los parámetros estimados y la distribución empírica.

GRÁFICA 2.
DISTRIBUCIÓN APROXIMADA POR MIXTURA DE WEIBULL Y REAL PARA PRECIOS DEL S&P 500



Fuente: elaboración propia.

Al observar la Gráfica anterior de la función de densidad, se concluye que fue más adecuado utilizar una mixtura de Weibull, gracias a la forma bimodal de la distribución.

En los cuadros 1 a 4 se muestra el cálculo del precio de opciones de compra para los modelos de Black Scholes, Savickas, Weibull y mixtura de Weibull. Se consideró la tasa de interés libre de riesgo $r = 6\%$, precio inicial del subyacente $S_0 = 1.400$, volatilidad para Black Scholes y Savickas $\sigma = 0,1297$

CUADRO 1.
MODELO DE BLACK SCHOLES

Strike	Madurez			
(K)	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1.200	217,9845	236,4379	254,9747	273,2350
1.300	122,7235	146,2137	168,1804	188,9433
1.400	47,3225	73,8093	96,9744	118,4220
1.500	10,5793	29,0349	47,9057	66,5672
1.600	1,2814	8,75491	20,1546	33,4801
1.700	0,0855	2,0391	7,2591	15,1265

Fuente: cálculos propios.

CUADRO 2.
MODELO DE SAVICKAS

Strike	Madurez			
(K)	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1.200	219,0827	239,1920	258,9961	278,2887
1.300	125,5481	150,2280	173,1020	194,7371
1.400	47,0916	74,3895	98,5936	121,1987
1.500	5,8629	23,453	20,1546	33,4801
1.600	0,0305	3,03168	12,1433	25,1613
1.700	0.0023	0,0656	1,6181	6,6267

Fuente: cálculos propios.

CUADRO 3.
MODELO MODIFICADO DE WEIBULL

Strike	Madurez			
(K)	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1.200	210,2709	223,3386	236,2118	248,8932
1.300	107,0839	113,7389	120,2947	126,7530
1.400	37,3064	39,6249	41,9088	44,1588
1.500	7,7310	8,2115	8,6848	9,1510
1.600	0,8309	0,8826	0,9335	0,9836
1.700	0,0407	0,0432	0,0457	0,0481

Fuente: cálculos propios.

CUADRO 4.
MODELO MIXTURAS DE WEIBULL

Strike	Madurez			
(K)	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,75$	$\tau = 1$
1.200	227,3166	237,8262	248,4947	259,3243
1.300	122,4712	128,1334	133,8813	139,7160
1.400	53,2106	55,6707	58,1679	60,7030
1.500	21,1859	22,1654	23,1597	24,1690
1.600	9,6468	10,0928	10,5455	11,0051
1.700	4,3859	4,5887	4,7945	5,0034

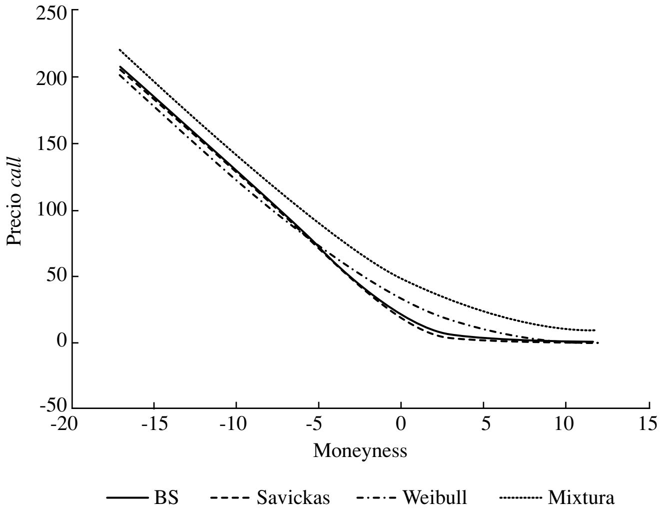
Fuente: cálculos propios.

En Corrado y Su (1996) se define el grado de dinero *(moneyness)* como la variación de la diferencia entre el precio *stock* y el precio *strike* descontado de la tasa de interés libre de riesgo. Muchos autores solo consideran el *moneyness* la razón entre el precio actual del subyacente y el precio de ejercicio, pero no se considera una buena medida para el precio de opciones, ya que se comparan dos valores que en realidad no están en el mismo tiempo. Por eso, mejor se optó por tomar el *moneyness* según Corrado y Su (1996):

$$Moneyness(\%) = \frac{Ke^{-r\tau} - S_t}{Ke^{-r\tau}} \times 100$$

En la Gráfica 3 se encuentran los precios de una opción se compra con precio del subyacente $S_0 = 1.400$ con vencimiento $\tau = 0{,}0833$ (1 mes) para diferentes precios de ejercicio que varían desde 1.200 hasta 1.700. En el eje x se encuentra el *moneyness* de estas opciones. Se comparan los modelos de Black Scholes, el modelo de Weibull de Savickas y los dos modelos de Weibull, modificado y mixtura de Weibull.

GRÁFICA 3.
PRECIOS DE OPCIONES *CALL* CON DIFERENTES MODELOS

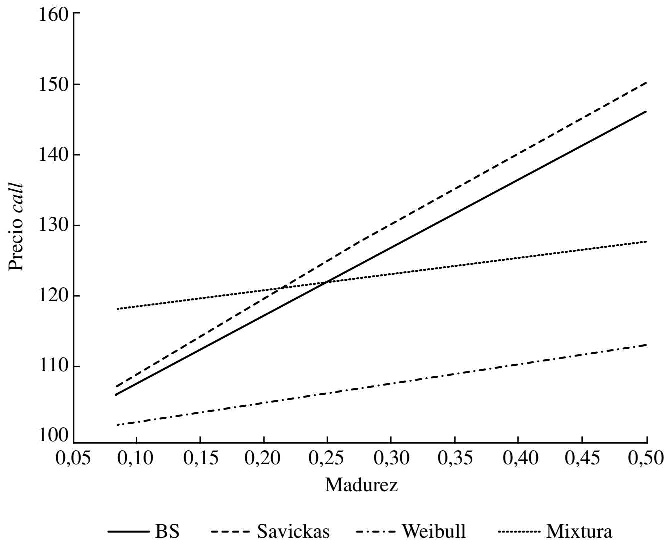


Fuente: Elaboración propia.

Para el anterior ejemplo, el modelo Black Scholes y el modelo de Savickas tienen un comportamiento muy similar para todos los tipos de opciones, ya sea dentro del dinero (ITM: *in the money, moneyness* negativo), en el dinero (ATM: *at the* *money, moneyness* nulo) y fuera del dinero (OTM: *out the money, moneyness* positivo). En cambio, con el modelo de Weibull propuesto, para opciones ITM vemos que el precio es menor que en los tres modelos y solo supera a esta valoración al aumentar el *moneyness;* el modelo de mixtura de Weibull siempre se encuentra por arriba de los anteriores modelos.

Ahora, en la Gráfica 4 se varía el vencimiento desde un mes hasta un año, para un precio de ejercicio fijo de $K = 1.300$.

GRÁFICA 4.
PRECIOS DE OPCIONES *CALL* PARA DIFERENTES FECHAS DE MADUREZ

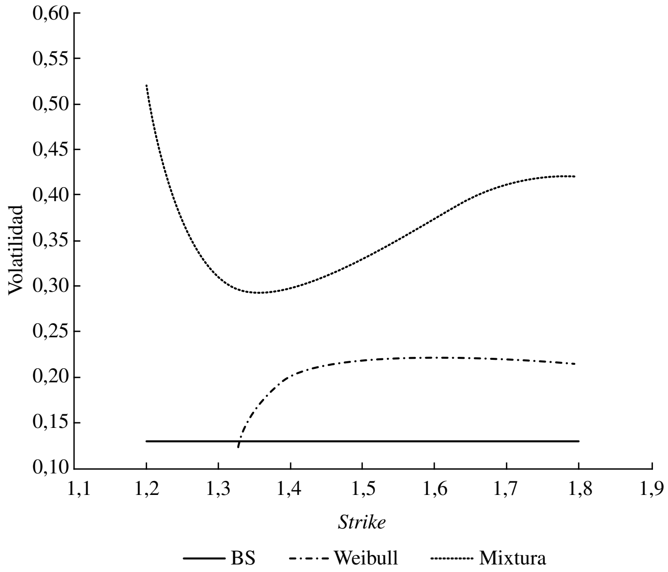


Fuente: cálculos propios.

Se puede observar que el modelo propuesto de Weibull se encuentra por debajo de todos los modelos estudiados y es menos preciso para mayor plazo de vencimiento del derivado; aunque la valoración por mixtura para plazos cortos de vencimiento valora por encima de Black Scholes y Savickas, a lo largo del tiempo también se valora el derivado por debajo de lo que hacen dichos modelos.

Ahora se estudia la volatilidad implícita. Puesto que Black Scholes considera en su modelo la volatilidad constante durante la vida de la opción, es claro que en la Gráfica 5 se muestre como una línea recta. El modelo modificado de Weibull muestra una mueca y la mixtura una sonrisa, modelos que implican que no son de volatilidad constante.

GRÁFICA 5.
PRECIOS DE OPCIONES *CALL* PARA DIFERENTES FECHAS DE MADUREZ



Fuente: cálculos propios.

Al realizar la minimización de errores cuadráticos con los precios de las opciones *call* del índice S&P 500 con vencimiento a un mes de los precios observados del mercado[2], tenemos los siguientes parámetros para cada una de los modelos propuestos.

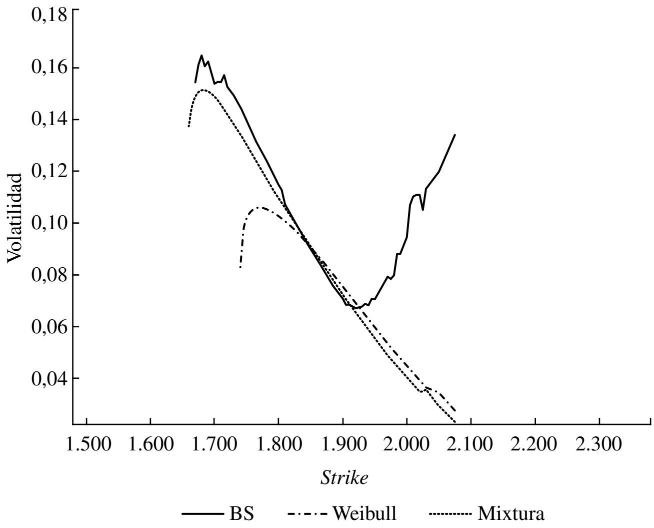
Weibull modificada: Localización A = 0,471, Escala B = 4,7781, Forma $c = 49{,}7913$, Escala de la distribución $b = 396{,}5333$.

Mixtura de Weibull: Localización $A = 282{,}9966$, Escala $B = 4{,}2987$, Proporción de mixtura $\alpha = 0{,}1294$, Forma $c_1 = 45{,}6737$, $c_2 = 1.836{,}3407$, Escala de la distribución $b_1 = 374{,}9432$, $b_2 = 224{,}9453$.

Se consideró el precio *mid* (promedio entre el *bid* y el *ask*) como el precio de la opción observada, y se tomó como tasa de interés el retorno de los bonos del tesoro de Estados Unidos a la fecha $r = 0{,}11\%$. Al inspeccionar los parámetros de la Weibull, la minimización da como resultado el parámetro de localización, que se puede despreciar para estos datos. En la Gráfica 6 se representa la volatilidad implícita de Black-Scholes y los modelos propuestos:

[2] Datos tomados http://www.nasdaq.com/

GRÁFICA 6.
VOLATILIDAD PARA DIFERENTES *STRIKES*



Fuente: cálculos propios.

Como se puede observar, la volatilidad presenta *smile* o sonrisa, indicando que esta no es constante. En los modelos propuestos se puede observar un comportamiento inicial de una *smirk* o mueca y luego, donde Black Scholes incrementa, ambos modelos decrecen en volatilidad.

CONCLUSIONES

A partir de los trabajos de Savickas (2002), en los cuales se usa la distribución de Weibull para valorar opciones de tipo europeo, y la metodología dada en Jiménez *et al.* (2014), en la cual se introducen parámetros de escala y localización, se modela la distribución del activo subyacente mediante una mixtura de Weibull enfocada en el aporte de Bahra (1997) y se obtienen dos fórmulas de valoración de opciones de compra tipo europeo. Bahra (1997) introduce la mixtura de distribuciones lognormales para modelar el subyacente, porque la distribución de este puede presentar comportamiento bimodal. Así, se decidió implementar una mixtura de distribuciones Weibull que presenta esta característica. Al realizar los experimentos numéricos se puede apreciar que la mixtura siempre valora por encima las opciones con vencimiento a corto plazo. También se observa que la volatilidad en estas dos nuevas fórmulas no se mantiene constante pero no presenta la *smile* que se observa al comparar estos precios con los de Black-Scholes. La implementación no es rápida al tener que estimar siete parámetros, pero captura efectos deseados como la bimodalidad. A futuro se pretende trabajar con distribuciones de Weibull generalizadas que permiten otras nuevas fórmulas de valoración para darle más flexibilidad al problema, medir la sensibilidad de los modelos propuestos con respecto a sus parámetros, estudiar las griegas para cada uno de los modelos y conseguir una fórmula explícita para la volatilidad implícita.

REFERENCIAS

1. Bahra, B. (1997). Implied risk-neutral probability density functions from option prices: A Central Bank perspective. In J. Knight & S. Satchell (Eds.), *Forecasting volatility in the financial markets* (3th ed., pp. 201-226). Elsevier Finance. London: Bank of England.
2. Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 637-654. The University of Chicago Press
3. Corrado, C. J., & Su, T. (1996). Skewness and kurtosis in S&P 500 index returns implied by option prices. *Journal of Financial Research, 19,* 175-192.
4. Das, S. R., & Sundaram, R. K. (1999). Of smiles and smirks: A term structure perspective. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 34*(02), 211-239.
5. Falls, L. W. (1970). Estimation of parameters in compound Weibull distributions. *Technometrics, 12*(2), 399-407.
6. Groeneveld, R. A., & Meeden, G. (1984). Measuring skewness and kurtosis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician), 33*(4)*,* 391-399.
7. Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications 11*(3), 215-260.
8. Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studie*s, *6*(2), 327-343.
9. Jiménez, J. A., Arunachalam, V., & Serna, G. M. (2014). Option pricing based on the generalised Tukey distribution. *International Journal of Financial Markets and Derivatives, 3*(3), 191-221.
10. Jondeau, E., Poon, S. H., & Rockinger, M. (2007). *Financial modeling under non-Gaussian distributions of Springer Finance*. London: Springer-Verlag.
11. Neftci, S. N. (2000). *An introduction to the mathematics of financial derivatives.* San Diego, CA Elsevier Science.
12. Rinne. H. (2009). *The Weibull distribution: A handbook.* Boca Raton, CL Chapman & Hall, CRC Press-Taylor & Francis Group, LLC.

13. Savickas, R. (2002). A simple option-pricing formula. *The Financial Review*, *37,* 207-226.
14. Savickas, R. (2005). Evidence on delta hedging and implied volatilities for the Black-Scholes, gamma, and weibull option pricing models. *The Journal of Financial Research, 28*(2), 299-317.

ANEXO

Fórmula de valoración con Weibull

Dada la variable aleatoria en (4), donde $Y \sim Wei(c,b)$, se tiene:

$$B = \frac{E(S) - A}{E(Y)}$$

como $E(Y) = b\Gamma(1+1/c)$ y S debe cumplir la condición de martingala dada en (2), $E(S_t) = S_t e^{r\tau}$, entonces:

$$B = \frac{S_t e^{r\tau} - A}{b\Gamma(1+1/c)}$$

De tal manera que el precio de una opción de compra con vencimiento τ y precio de ejercicio *K* es:

$$\begin{aligned}
e^{r\tau} C_t(K) &= E[\text{máx}\{A + BY - K, 0\}] = BE[\text{máx}\{Y - k, 0\}] \\
&= B\int_k^\infty (y-k) f_Y(y)dy \\
&= B\int_k^\infty y f_Y(y)dy + B\int_k^\infty k f_Y(y)dy \\
&= B\int_k^\infty y \frac{c}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{\left(\frac{y}{b}\right)^c\right\}dy \\
&\quad +B\int_k^\infty k \frac{c}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{\left(\frac{y}{b}\right)^c\right\}dy \\
&= B\int_k^\infty y \frac{c}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{\left(\frac{y}{b}\right)^c\right\}dy - Bk[1 - F(k)]
\end{aligned}$$

donde $k = \frac{K - A}{B}$. Al hacer la sustitución $v = (y/b)^c$ y $\omega = (k/b)^c$ se obtiene:

$$e^{r\tau} C_t(K) = Bb[\Gamma(1+1/c) - \Gamma_\omega(1+1/c)] - Bke^{-\omega}$$

Al reemplazar el valor de B en la anterior ecuación, se llega a la siguiente fórmula de valoración:

$$C_\tau(K) = \frac{S_t - Ae^{-r\tau}}{b\Gamma(1+1/c)}\left[b[\Gamma(1+1/c) - \Gamma_\omega(1+1/c)] - ke^{-r\tau}e^{-\omega}\right] \tag{11}$$

Fórmula de valoración con mixtura de Weibull

Supongamos que Y se distribuye con una mixtura de distribuciones Weibull de parámetros $\alpha, c_1, c_2, b_1, b_2$; entonces el valor de B dado por la transformación (4) está dado por:

$$B = \frac{S_t e^{r\tau} - A}{\alpha b_1 \Gamma(1+1/c_1) + (1-\alpha) b_2 \Gamma(1+1/c_2)}$$

Entonces el precio de una opción europea con vencimiento τ y precio de ejercicio K viene dado por:

$$\begin{aligned}
e^{r\tau} C_t^{mix}(K) &= E[\text{máx}\{A + BY - K, 0\}] = BE[\text{máx}\{Y - k, 0\}] \\
&= B\int_k^\infty (y-k) f_Y(y)\,dy \\
&= B\int_k^\infty y f_Y(y)\,dy + B\int_k^\infty k f_Y(y)\,dy \\
&= B\int_k^\infty y(\alpha f_1(y) + (1-\alpha) f_2(y))\,dy + B\int_k^\infty k f_Y(y)\,dy \\
&= B\int_k^\infty \alpha y \frac{c_1}{b_1}\left(\frac{y}{b_1}\right)^{c_1-1} \exp\left\{\left(\frac{y}{b_1}\right)^{c_1}\right\} dy \\
&+ B\int_k^\infty (1-\alpha) y \frac{c_2}{b_2}\left(\frac{y}{b_2}\right)^{c_2-1} \exp\left\{\left(\frac{y}{b_2}\right)^{c_2}\right\} dy \\
&+ B\int_k^\infty k y(\alpha f_1(y) + (1-\alpha) f_2(y))\,dy
\end{aligned}$$

Realizando las sustituciones $v_i = (y / b_i)^{c_i}$ y $\omega_i = (k / b_i)^{c_i}$ para $i = 1,2$ y agrupando términos, se tiene:

$$\begin{aligned}
e^{r\tau} C_t^{mix}(K) &= B\alpha b_1[\Gamma(1+1/c_1) - \Gamma_{w_1}(1+1/c_1)] - Bke^{-\omega_2} \\
&+ B(1-\alpha) b_2[\Gamma(1+1/c_2) - \Gamma_{\omega_2}(1+1/c_2)] - Bke^{-\omega_2}.
\end{aligned}$$

Al factorizar B, se obtiene:

$$C_t^{mix}(k) = e^{-r\tau} B \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \left[b_i \left(\Gamma(1+1/c_i) - \Gamma_{w_i}(1+1/c_i) \right) - ke^{-\omega_i} \right] \tag{12}$$