

## Estudio de los modos de oscilación en un Péndulo Físico Simétrico usando el potencial efectivo

### Study of the oscillation modes in a Symmetric Physical Pendulum using the effective potential

José Hernández<sup>a\*</sup>  
Hector Maya<sup>b\*</sup>

Fecha de Recepción: 05.07.18

Fecha de aceptación: 08.05.19

DOI: <https://doi.org/10.19053/01217488.v10.n2.2019.8180>

#### Resumen

En este artículo presentamos un estudio unificado de la dinámica del péndulo físico simétrico en el espacio de fase de los distintos modos de oscilación que se presentan en este sistema: modo plano, modo elíptico y modo cónico, usando un potencial efectivo que va a depender de la coordenada de nutación y depende también paramétricamente de la energía y del momento angular del sistema. Presentamos también una deducción formal de la aproximación de Allais para la precesión ápsidal del péndulo físico simétrico usando la teoría de pequeñas oscilaciones alrededor del movimiento estacionario o modo de oscilación cónico.

**Palabras claves:** Péndulo físico simétrico, oscilación, nutación, precesión, ápsidal, modos de oscilación, precesión, ápsidal.

#### Abstract

In this paper we present a unified study of the dynamics of the symmetrical physical pendulum in the phase space of the different oscillation modes presented in this system: plane mode, elliptic mode and conic mode, using an effective potential that will depend on the nutation coordinate and also depends parametrically on the energy and angular momentum of the system. We also present a formal deduction of the Allais approximation for the apsidal precession of the symmetrical physical pendulum using the theory of small oscillations around the steady motion or conic oscillation mode.

**Keyword:** Pendulum, Symmetrical physical pendulum, nutation, apsidal precession, oscillation modes, precession.

---

a Universidad de Córdoba, Departamento de Física, Montería, Colombia.

\* Correo electrónico: joseherosso2015@gmail.com,

b Universidad de Córdoba, Departamento de Física, Montería, Colombia.

\* Correo electrónico: Hrmaya@hotmail.com

## 1. INTRODUCCIÓN

El péndulo físico en su versión más simple es un sólido rígido de forma arbitraria que puede oscilar en un plano vertical que contenga a su centro de masa, alrededor de un eje perpendicular a dicho plano. El punto de intersección del eje con el plano es el punto de suspensión. Cuando el punto de suspensión se sustituye por un soporte que le permita al péndulo oscilar en todo el ángulo sólido que rodea al eje del cuerpo que pasa por su centro de masa y el punto de suspensión, y le permita además rotar alrededor de dicho eje, tenemos un péndulo físico con tres grados de libertad [1]. Debido a la rotación de la tierra, es claro que en un sistema inercial de referencia la precesión y el espín inicial son muy pequeños, del orden de  $10^{-4}$  rad/s, esto hace que la nutación se constituya en el movimiento dominante. En estas condiciones iniciales el péndulo describe trayectorias aproximadamente elípticas que precesan muy lentamente en un sistema de referencia inercial. A esta precesión la denominaremos precesión de Allais [2] y los resultados de este estudio representan una primera aproximación a la dinámica del péndulo físico asimétrico que es usado actualmente por muchos investigadores en el estudio de anomalías gravitacionales durante los eclipses [3, 4, 5].

Como veremos en este caso se distinguen tres modos de oscilación: el modo plano, el modo elíptico y el modo cónico.

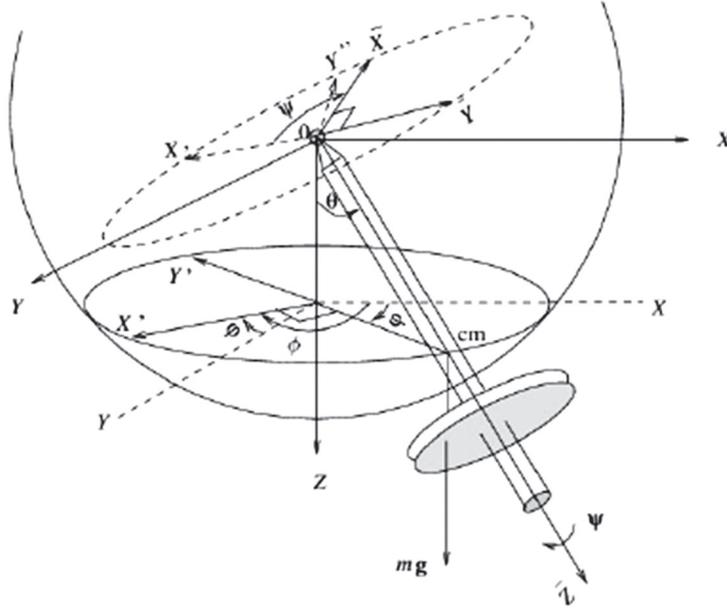
En el modo plano el péndulo es soltado desde su posición inicial, sin ninguna velocidad transversal de manera que su momento angular es cero y el cuerpo describe su trayectoria sobre un arco de círculo vertical. En el modo elíptico el péndulo se mueve entre dos planos

horizontales, se caracteriza porque el momento angular es distinto de cero y la trayectoria que describe es elíptica oblicua entre dos alturas [6]. Finalmente el péndulo se encuentra en su modo cónico cuando describe un movimiento circular uniforme a una altura fija, se distingue porque el momento angular es constante diferente de cero y el péndulo describe una trayectoria circular en un plano horizontal.

En este artículo estudiaremos la dinámica del péndulo físico simétrico cuando es suspendido bajo condiciones iniciales similares a las que experimentaría cuando éste es soltado cerca de la superficie de la tierra con pequeñas amplitudes iniciales, sin ninguna componente de la velocidad transversal ni de espín; utilizando el potencial efectivo, en el cual este va a depender de la coordenada de la nutación y depende también paraméricamente de la energía y del momento angular del sistema. Además con este potencial efectivo realizaremos y analizaremos un estudio unificado en el espacio de fase de los distintos modos de oscilación mencionados anteriormente.

## 2. PÉNDULO FÍSICO SIMÉTRICO

Un péndulo físico simétrico (PFS) es un caso muy particular del trompo simétrico en el cual tiene un eje de simetría que puede girar libremente alrededor de un punto fijo o un soporte ubicado en un extremo del eje de simetría y el centro de masa se encuentra por debajo del punto fijo; por lo tanto los movimientos de precesión y espín se pueden considerar como pequeñas perturbaciones al movimiento de nutación dominante [1]. El ejemplo más simple consiste de una varilla cilíndrica colgada de uno de sus extremos, como se muestra en la Figura 1.



**Figura 1.** Péndulo Físico Simétrico. En la orientación del sistema de ejes inerciales XY Z:  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  son los ángulos de Euler usados en la descripción del movimiento.

### A. Hamiltoniano del PFS

La energía cinética y potencial del sistema está dadas respectivamente por:

$$T = \frac{1}{2} I_x (w_x^2 + w_y^2) + \frac{1}{2} I_z w_z^2 \quad (1)$$

$$V = -mgl \cos\theta \quad (2)$$

Donde su energía potencial es negativa, debida a que el péndulo está por debajo del punto fijo (soporte).

Por último, el Lagrangiano del sistema lo podemos escribir en términos de los ángulos de Euler como:

$$L = \frac{1}{2} [I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_z (\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2)] + mgl \cos\theta \quad (3)$$

Donde  $I_x$  y  $I_z$  son los momentos de inercia del péndulo con respecto a los ejes X y Z fijado al cuerpo. Las coordenadas  $\phi$  y  $\psi$  son cíclicas, por lo tanto sus momentos generalizados asociados son constantes de movimiento:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_x \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_z \dot{\phi} \cos\theta (\psi + \phi \cos\theta) \quad (4)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_z (\phi \cos\theta + \psi) \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5) podemos llegar a:

$$\psi = \frac{p_\psi}{I_z} - \phi \cos\theta \quad (6)$$

$$\phi = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{I_x \sin^2 \theta} \quad (7)$$

Dado que el sistema es conservativo, la energía mecánica del sistema es:

$$E = \frac{1}{2} [I_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_z (\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2)] - mgl \cos\theta \quad (8)$$

En términos de variables canónicas tenemos:

$$E = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_\theta^2}{I_x} + \frac{(p_\psi \cos\theta - p_\phi)^2}{I_x \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{I_z} \right] - mgl \cos\theta \quad (9)$$

O en unidades adimensionales se tiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 + (P_\psi \cot\theta - P_\phi \csc\theta)^2 + \alpha P_\psi^2] - \cos\theta \quad (10)$$

Donde hemos utilizado las definiciones:

$$\Omega_0 \equiv \sqrt{\frac{mgl}{I_x}}; \tau \equiv \Omega_0 t; \varepsilon = \frac{E}{mgl}; P_{\psi, \phi} \equiv \frac{P_{\psi, \phi}}{\sqrt{mglI_x}}; \alpha \equiv \frac{I_x}{I_z} \quad (11)$$

### 3. POTENCIAL EFECTIVO

Para un análisis cualitativo de la física involucrada en este sistema, es conveniente introducir un potencial efectivo asociado a la coordenada  $\theta$ . Para ello despejamos  $\theta^2$  en la ecuación (10), esto es:

$$\theta^2 = 2 \cos \theta - [P_\psi \cot \theta - P_\phi \csc \theta]^2 + \alpha P_\psi^2 + 2\varepsilon \quad (12)$$

Introduciendo la variable adimensional  $\zeta = \frac{z}{l} = \cos \theta$  en la ecuación (12); tenemos:

$$\zeta^2 = (1 - \zeta^2)(2\varepsilon - \alpha P_\psi^2 + 2\zeta) - (P_\phi - P_\psi \zeta)^2 \quad (13)$$

En función de los nuevos parámetros, la ecuación (13) nos queda:

$$\varepsilon \equiv \frac{\zeta^2}{2} + \zeta^3 + \varepsilon \zeta^2 - (1 + p_1)\zeta + p_2^2 \quad (14)$$

Donde

$$\varepsilon = \varepsilon + \frac{(1-\alpha)}{2} P_\psi^2; p_1 = P_\phi P_\psi; p_2^2 = \frac{1}{2}(P_\phi^2 + P_\psi^2) \quad (15)$$

Introduciendo en la ecuación (14) el potencial efectivo asociado a la variable  $\zeta$ :

$$\varepsilon = \frac{\zeta^2}{2} + V_{efe}(\zeta; \varepsilon; p_1; p_2) \quad (16)$$

Donde  $V_{efe}(\zeta; \varepsilon; p_1; p_2)$  es una función de  $\zeta$  que depende de los parámetros  $\zeta; \varepsilon; p_1$  y  $p_2$ . Es decir:

$$V_{efe}(\zeta; \varepsilon; p_1; p_2) = \zeta^3 + \varepsilon \zeta^2 - (1 + p_1)\zeta + p_2^2 \quad (17)$$

Nótese también que estas raíces de esta ecuación  $V_{efe}(\zeta; \varepsilon; p_1; p_2) = \varepsilon$ , corresponden a los ceros del polinomio cúbico de la ecuación (17) y físicamente representa los puntos de retornos en la coordenada  $\zeta$ .

Los puntos críticos de este potencial se obtienen derivando e igualando a cero, estos es:

$$\frac{\partial V_{efe}(\zeta; \varepsilon; p_1; p_2)}{\partial \zeta} = 3\zeta^2 + 2\varepsilon \zeta - (1 + p_1) = 0 \quad (18)$$

Esta ecuación nos va a permitir obtener un criterio para las energías que son físicamente aceptadas, cuando variamos las condiciones iniciales y al parámetro  $\varepsilon$ .

Las raíces de esta ecuación son:

$$\zeta_{\min}^{\max} = -\frac{1}{3}(\varepsilon \pm \sqrt{3 + 3p_1 + \varepsilon^2}) \quad (19)$$

Lo cual nos muestra que  $\zeta_{\max} < 0$  y  $\zeta_{\min} > 0$ ; estos puntos dependen de las energías y de los momentos con respecto a  $\phi$  y  $\psi$ .

Los valores del potencial efectivo asociado a estos puntos críticos son:

$$V_{efe}(\zeta_{\min}; \varepsilon; p_1; p_2) = \zeta_{\min} \quad (20a)$$

$$V_{efe}(\zeta_{\max}; \varepsilon; p_1; p_2) = \zeta_{\max} \quad (20b)$$

Donde:

$$\varepsilon_{\min}^{\max} = \frac{1}{27}[27p_2^2 + 9p_1\varepsilon + 2\varepsilon^3 \pm (6p_1 + 2\varepsilon^2)\sqrt{3p_1 + \varepsilon^2}] \quad (21)$$

Con  $p = 1 + p_1$ .

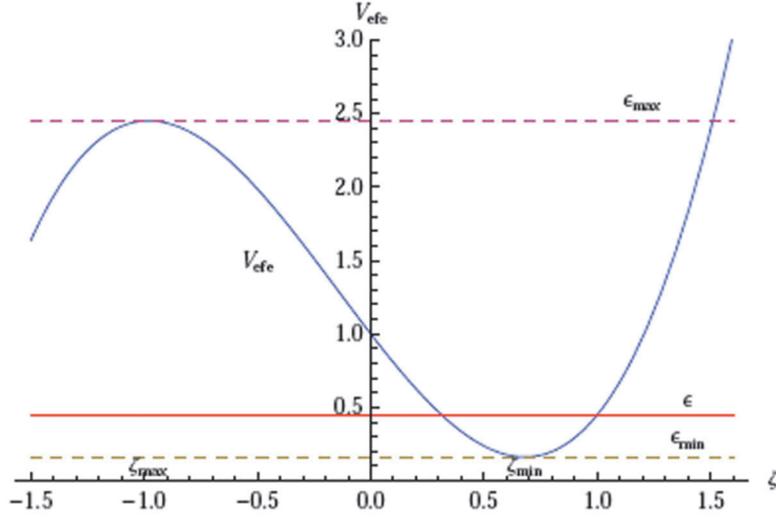


Figura 2. Potencial efectivo  $V_{efe}$  en función de  $\zeta$ .

En la figura 2 se muestra el péndulo que se mueve con  $\epsilon = 0,45$ ;  $p_1 = 1$ ;  $p_2 = 1$ . También podemos observar que con el fin de mantener el movimiento siempre acotado y en la región de interés físico se cumple que:

$$0 \leq \zeta_{\min} \leq 1 \quad -1 \leq \zeta_{\max} \leq 0 \quad \epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max} \quad (22)$$

De la figura se puede notar que  $\epsilon_{\max} > \epsilon$  para toda  $\epsilon$ ;  $p_1$  y  $p_2$  luego podemos concluir que las energías y las condiciones iniciales físicamente aceptadas satisfacen:

$$\epsilon_{\min}(\epsilon) \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}(\epsilon) \quad (23)$$

Donde  $\epsilon_{\max}$  no es una cota superior, es una función que depende de la energía total del sistema.

#### 4. MODOS DE OSCILACIÓN

Nos restringiremos ahora a las condiciones iniciales propias de un PFS que es soltado cerca de la superficie de la tierra con condiciones iniciales propias del modo plano, vemos que  $P_\psi \approx P_\phi \approx 10^{-2}$

y  $P_1 \approx 10^{-2}$ , por lo tanto la precesión y el espín son solo pequeñas perturbaciones al movimiento de nutación dominante ( $\theta \approx 10^{-1}$ ).

#### 4.1 Modo plano

El modo plano se origina cuando el centro de masa del péndulo es soltado desde una posición inicial sin ninguna velocidad transversal, su característica principal es que  $\phi = 0$ . Para este modo tenemos:

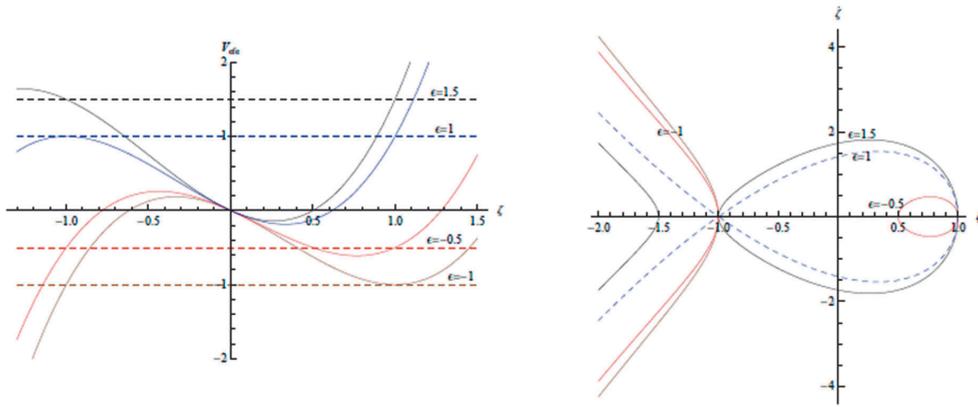
$$\dot{\zeta}^2 = -2(\zeta^3 + \epsilon \zeta^2 - \zeta + \frac{P_\psi^2}{2} - \epsilon) \quad (24)$$

$$V_{efe}(\zeta; \epsilon; p_1; P_\psi) = \zeta^3 + \epsilon \zeta^2 - \zeta + \frac{P_\psi^2}{2} \quad (25)$$

Los puntos críticos y sus correspondientes energías son:

$$\zeta_{\min}^{\max} = -\frac{1}{3}(\epsilon \pm \sqrt{3 + \epsilon^2}) \quad (26)$$

$$\epsilon_{\min}^{\max} = \frac{1}{27}[27p_2^2 + 9\epsilon + 2\epsilon^3 \pm (6 + 2\epsilon^2)\sqrt{3 + \epsilon^2}] \quad (27)$$



**Figura 3. A:** Potencial efectivo  $V_{efe}$  en función de  $\zeta$  para  $\epsilon = -1, -0.5, 1, 1.5$

**B:** Curvas de fase  $\dot{\zeta}$  en función de  $\zeta$  para los mismos valores de energías.

En la figura 3A, si la energía está en el intervalo  $-1 < \epsilon < 1$  el movimiento es acotado y oscilatorio en la región de interés físico. Para  $\epsilon > 1$  el péndulo produce un movimiento acotado en el intervalo  $-1 < \zeta < 1$  pasando por los puntos  $\zeta = \pm 1$ .

En la figura 3B todas las curvas de fase pasan por el punto  $\dot{\zeta} = 1$  que corresponden a la posición más baja de todas las trayectorias posibles.

Observemos también que si  $\epsilon = -1$  entonces  $\zeta = 1$ , por lo tanto el péndulo está colgando en su posición más baja en el punto  $(1,0)$ , en este caso las energías menores no son físicamente aceptadas.

Si  $\epsilon = 1$  entonces  $\zeta = -1$ , luego el péndulo está en su posición más alta en el punto  $(-1,0)$  en

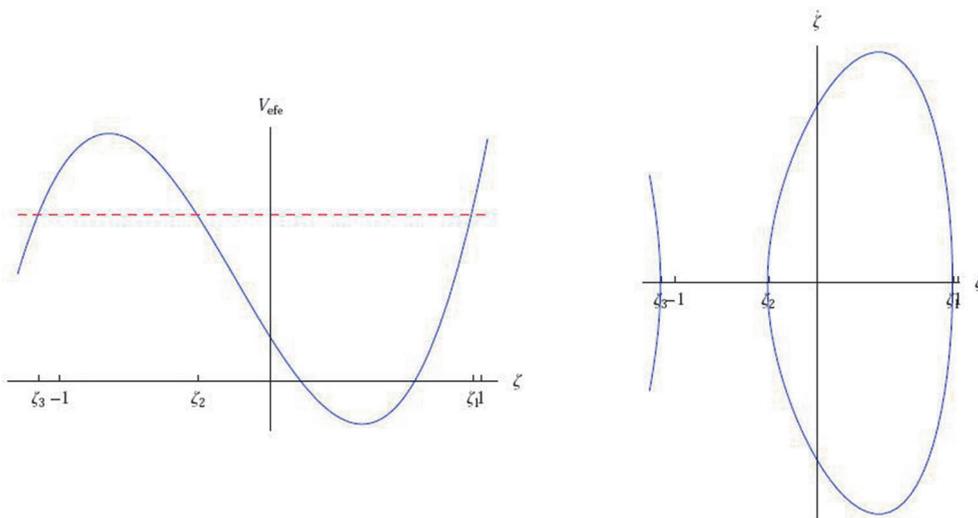
donde se presenta un punto de bifurcación; en este caso hay un punto de equilibrio inestable y con cualquier pequeña perturbación por mínima que sea, el péndulo se caer.

#### 4.2 Modo elíptico

En este modo de oscilación el centro de masa del péndulo se mueve entre dos planos horizontales  $\zeta = \zeta_2$  y  $\zeta = \zeta_1$  donde  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  son los puntos de retornos del potencial efectivo (17) o raíces de (13). Este modo se caracteriza por  $p_1 \neq 0$  y:

$$-1 \leq p_1 \leq 2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(p_1 - 2) \leq \epsilon \quad (28)$$

Estas condiciones implican que  $\zeta_3 < -1 < \zeta_2 < \zeta_1 < 1$  como se muestran en la figura 4.



**Figura 4. A:** Potencial efectivo  $V_{efe}$  en función de  $\zeta$

**B:** Curvas de fase  $\dot{\zeta}$  en función de  $\zeta$ .

En la parte A de esta figura hemos graficado el comportamiento genérico del potencial efectivo, mientras que en la parte B su correspondiente diagrama de fase.

En el comportamiento genérico la raíz  $\zeta_3$  viola la ligadura de modo que el movimiento periódico del péndulo es acotado y se cumple que  $\zeta_2 < \zeta_1 < 1$ ; por otro lado en el eje horizontal de esta grafica se muestran los puntos de retornos  $\zeta_3 < \zeta_2 < \zeta_1$  y el movimiento es acotado y físicamente aceptable para  $\zeta_3 - 1 < \zeta_2 \leq \zeta < \zeta_1 < 1$ .

### 4.3 Modo cónico

En el modo cónico el centro de masa del péndulo describe un movimiento circular uniforme a una altura fija en un plano horizontal.

Se caracteriza por las siguientes condiciones:

$$\zeta = \zeta_{\min} = \frac{1}{3}(-\epsilon + \sqrt{3 + 3p_1 + \epsilon^2}) \quad (29)$$

$$\phi = \text{const} \tan te \quad (30)$$

En este caso  $\zeta$  se mantendrá constante y por lo tanto podemos definir:

$$\zeta(\tau) = \zeta_{\min} \equiv \zeta_e \quad \forall \tau \quad \dot{\phi}(\tau) = \dot{\phi}_e \quad (31)$$

La energía  $\epsilon$  de este modo en función de las variables originales: es:

$$\epsilon = \frac{1}{2\zeta_e^2} [1 + P_\phi P_\psi + P_\psi^2 \zeta_e (\alpha - 1) - 3\zeta_e^2] \quad (32)$$

La frecuencia angular del movimiento circular es:

$$\dot{\Phi}_e = \frac{P_\psi \pm \sqrt{P_\psi^2 + 4\zeta_e}}{2\zeta_e} \quad (33)$$

Notemos que hay dos frecuencias asociadas a la misma altura y al mismo espín; en este caso  $\Phi_+$  representa la frecuencia angular del movimiento circular en sentido anti horario, es decir, hay una precesión rápida; mientras que  $\Phi_-$  es la frecuencia en sentido horario, en este caso hay una precesión lenta.

El espín con que está rotando el péndulo en este modo es:

$$\dot{\Psi}_e = \frac{1}{2} [P_{\psi_e} (2\alpha - 1) \pm \sqrt{P_{\psi_e}^2 + 4\zeta_e}] \quad (34)$$

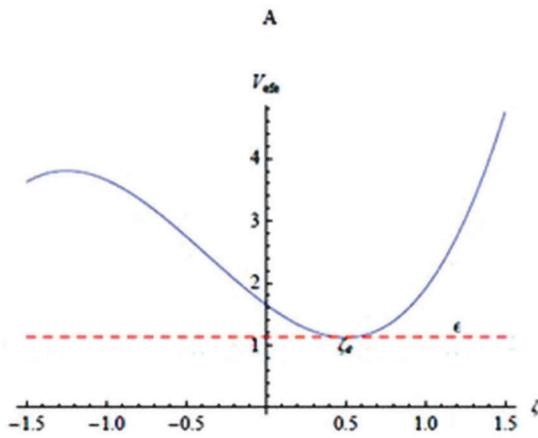
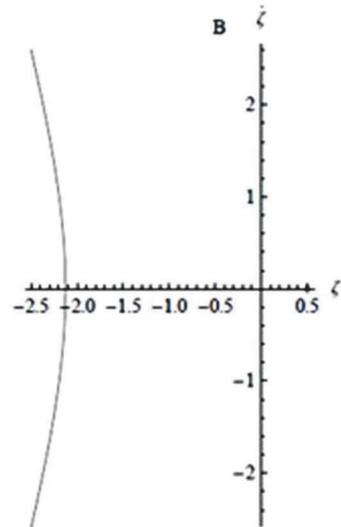


Figura 5. A: Potencial efectivo  $V_{efe}$  en función de  $\zeta$  para  $\epsilon = 0.5$



B: Curvas de fase  $\zeta$  en función de  $\zeta$  para el mismo valor de energía.

En la figura 5 graficamos el potencial efectivo y su correspondiente diagrama de fase en función de  $\zeta$  para  $\epsilon = 0.5$  en donde la región de interés físico está en el punto  $(0.69, 0)$ .

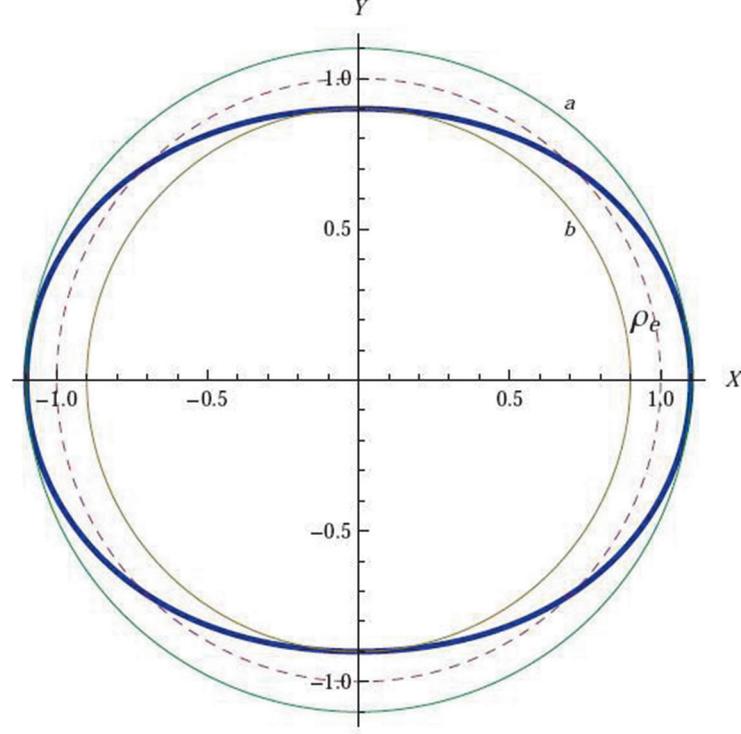
## 5. PRECESIÓN APSIDAL DEL PFS

La deducción está basada en la teoría de pequeñas oscilaciones alrededor del movimiento estacionario, en este caso la trayectoria perturbada resulta de aplicar una pequeña perturbación al

modo cónico o estacionario como se muestra en la figura 6.

En esta figura el modo cónico está representado por la trayectoria circular de radio

$\rho_e$  (línea a trazos), mientras que la trayectoria perturbada (línea continua gruesa) es la elipse que está inscrita entre los círculos de radio  $a = \rho_e + x_0$  y  $b = \rho_e - x_0$  donde  $x_0 \ll 1$  es la perturbación.



**Figura 6:** La trayectoria perturbada (línea continua gruesa) está inscrita entre los círculos de radio  $a = \rho_e + x_0$  y  $b = \rho_e - x_0$ . La trayectoria estacionaria (línea a trazos) es circular y de radio  $\rho_e$ .

Las coordenadas horizontales  $x(\tau)$  y  $y(\tau)$  de este modo estacionario se pueden expresar como:

$$x(\tau) = \rho_e \cos(\Omega_c \tau) \quad y(\tau) = \rho_e \sin(\Omega_c \tau) \quad (35)$$

Y las correspondientes coordenadas de la trayectoria son:

$$x(\tau) = \rho \cos(\Omega_c \tau) \quad y(\tau) = \rho \sin(c\tau) \quad (36)$$

Donde  $\rho(\tau) = \rho_e + x_0 \cos(\Omega^* \tau)$

$\Omega_c$  es la frecuencia circular del modo estacionario es:

$$\Omega_c = \dot{\phi}_e = \frac{P_{\psi e} \pm \sqrt{P_{\psi e}^2 + 4\zeta_e}}{2\zeta_e} \quad (37)$$

La frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor del movimiento estacionario está dada por:

$$\dot{\Omega} = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 V_{efe}}{\partial z^2}} \quad (38)$$

En unidades adimensionales tenemos:

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\Omega_0} = \sqrt{\frac{\partial^2 V_{efe}}{\partial \zeta_e^2}} \quad (39)$$

Derivando el potencial efectivo (17) y realizando las respectivas sustituciones en la ecuación (39) tenemos:

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{1}{\zeta_e} (1 + P_\phi P_\psi + 3\zeta_e^2)} \quad (40)$$

En este punto debemos recordar que el signo de  $\Omega_c$  da lugar a dos constantes  $P_\phi$  y por lo tanto a dos frecuencias  $\Omega^*$  para pequeñas alrededor del movimiento estacionario.

Si  $\Omega_c > 0$

$$P_\phi = \frac{P_\psi(1+\zeta_e^2) + \sqrt{P_\psi^2 + 4}\zeta_e(1-\zeta_e^2)}{2\zeta_e} \quad (41)$$

Luego la ecuación (40) nos queda:

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{1}{2\zeta_e^2} [P_\psi^2(1+\zeta_e^2) + P_\psi\sqrt{P_\psi^2 + 4}\zeta_e(1-\zeta_e^2) + 2(\zeta_e + \zeta_e^3)]} \quad (42)$$

La razón entre las dos frecuencias  $\Omega_c/\Omega$  la podemos expresar en términos de  $\delta_e = \rho_e/l = \sqrt{1-\zeta_e^2} \ll 1$  y la expandimos en series de potencia de  $\delta_e$  hasta segundo orden.

$$\frac{\Omega_c}{\Omega^*} = \frac{1}{2} + \frac{P_\psi}{2\sqrt{P_\psi^2 + 4}} + \frac{3(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4})}{4(P_\psi^2 + 4)^{3/2}} \delta_e^2 \quad (43)$$

Que la órbita sea cerrada o precese depende de esta razón, es claro que esta orbita precesará, pues la razón anterior será en general mayor que  $1/2$ . El tiempo que tarda  $\rho$  para ir de su eje mayor valor  $a = \rho_e + x_0$  a su valor mínimo  $b = \rho_e - x_0$  es  $\tau_n = \pi / \Omega^*$  y en ese tiempo el ápside avanza un ángulo:

$$\phi = \Omega_c \tau_n = \frac{\Omega_c}{\Omega^*} \pi = \pi \left( \frac{1}{2} + \frac{P_\psi}{2\sqrt{P_\psi^2 + 4}} + \frac{3(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4})}{4(P_\psi^2 + 4)^{3/2}} \delta_e^2 \right) \quad (44)$$

Cuando  $\tau_n = \pi / \Omega^*$  el ápside avanza un ángulo un poco mayor que  $\pi / 2$  de modo que el exceso de  $\phi$  sobre  $\pi / 2$  es:

$$\Delta\phi = \pi \left( \frac{P_\psi}{2\sqrt{P_\psi^2 + 4}} + \frac{3(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4})}{4(P_\psi^2 + 4)^{3/2}} \delta_e^2 \right) \quad (45)$$

Entonces la velocidad angular de precesión de Allais en unidades adimensionales es:

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\tau_n} = \frac{\Delta\phi}{\pi} \Omega^* = \left( \frac{P_\psi}{2\sqrt{P_\psi^2 + 4}} + \frac{3(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4})}{4(P_\psi^2 + 4)^{3/2}} \delta_e^2 \right) \Omega^* \quad (46)$$

Podemos ahora suponer que  $\Omega^* \approx 2\Omega_c$  esto equivale a exigir que la trayectoria del movimiento perturbado sea aproximadamente elíptica. Luego la velocidad angular de precesión en unidades adimensionales es:

$$\Omega = \left( \frac{P_\psi}{2\sqrt{P_\psi^2 + 4}} + \frac{3(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4})}{4(P_\psi^2 + 4)^{3/2}} \delta_e^2 \right) 2\Omega_c \quad (47)$$

Usamos nuevamente la expresión (37) en términos de  $\delta_e$ .

$$\Omega_c = \frac{P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4}\sqrt{1-\delta_e^2}}{2\sqrt{1-\delta_e^2}} \approx \frac{1}{2}(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4}) \quad (48)$$

En donde hemos expandido es serie de potencia de  $\delta_e$  y retenido sólo términos menores o iguales que  $\delta_e^2$ , esto es debido a que la ecuación (47) es cuadrático en  $\delta_e$  y este es el orden hasta el cual queremos aproximar. Sustituyendo este resultado en (47) y usando las unidades estándar, tenemos para la precesión ápsidal de Allais:

$$\Omega_{allais} = \Omega \Omega_0 \quad \Omega_{Allais} = \Omega_0 \quad (49)$$

$$\Omega_{Allais} = \Omega_0 \left( \frac{P_\psi}{2\sqrt{P_\psi^2 + 4}} + \frac{3(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4})}{4(P_\psi^2 + 4)^{3/2}} \delta_e^2 \right) (P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4}) \quad (50)$$

Por otra parte tenemos:

$$ab = (\rho_e + x_0)(\rho_e - x_0) = \rho_e^2 - x_0^2 \approx \rho_e^2 \quad (51)$$

La cual está perfectamente justificada si se tiene en cuenta que  $x_0 \ll 1$  por ser una pequeña perturbación. Usando este resultado en (50) tenemos:

$$\Omega_{Allais} = \Omega_0 \left( \frac{P_\psi}{2\sqrt{P_\psi^2 + 4}} + \frac{3(P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4})}{4(P_\psi^2 + 4)^{3/2} l^2} ab \right) (P_\psi + \sqrt{P_\psi^2 + 4}) \quad (52)$$

Esta ecuación es la aproximación hasta segundo orden en  $\delta_e$  para la frecuencia angular de precesión ápsidal de Allais para el modo elíptico y es válida para cuando las condiciones iniciales de este modo son  $\phi_0 > 0$ . Estamos interesados en aplicar esta aproximación al caso de un PFS fijo en la superficie de la tierra en cuyo caso, esto motiva a realizar una expansión adicional en serie de potencia en  $P_\psi$  y conservar solamente el término lineal.

$$\Omega_{Allais} = \frac{3ab}{8l^2} \Omega_0 + \left( \frac{1}{2} + \frac{3ab}{8l^2} \right) \Omega_0 P_\psi \quad (53)$$

Si  $\Omega_c < 0$

Entonces

$$P_\phi = \frac{P_\psi(1 + \zeta_e^2) - \sqrt{P_\psi^2 + 4\zeta_e(1 - \zeta_e^2)}}{2\zeta_e} \quad (54)$$

Repetiendo los mismos pasos del caso anterior obtenemos es:

$$\Omega_{Allais} = -\frac{3ab}{8l^2}\Omega_0 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3ab}{8l^2}\right)\Omega_0 P_\psi \quad (55)$$

Proponemos una última aproximación para el periodo de la coordenada  $\theta$ , este periodo del movimiento elíptico. Es claro que este periodo es 4 veces  $\tau_n$  y en unidades estándar es:

$$T = 4\tau_n\Omega_0^{-1} = \frac{4\pi}{\Omega^*} \sqrt{\frac{I_x}{mgl}} = \frac{4\pi\sqrt{\zeta_e}}{\sqrt{(1 + P_\phi P_\psi + 3\zeta_e^2)}} \sqrt{\frac{I_x}{mgl}} \quad (56)$$

Donde  $\zeta_e$  es la altura asociada al modo cónico estacionario:

$$\zeta_e = \cos\theta_e = \sqrt{1 - (ab/l)^2} \quad (57)$$

## CONCLUSIÓN

Hemos realizado un estudio unificado en el espacio de fase de los distintos modos de oscilación que se pueden presentar en la dinámica del PFS introduciendo un potencial efectivo, como una función que además de depender de la coordenada y el momento angular, también depende paramétricamente de la energía. Deducimos también la precesión ápsidal de Allais (53), considerando que el modo elíptico se puede obtener como el resultado de aplicar una pequeña perturbación al modo estacionario o modo cónico de este sistema. Esta deducción es conceptualmente más sencilla que la reportada en la literatura, pues se basa en la comparación de la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de este modo. Una ventaja de este enfoque

es que permite obtener expresiones analíticas aproximadas para el periodo del movimiento elíptico (56) y para la proyección de la trayectoria del modo de oscilación más general (58).

## REFERENCIAS

Maya, H., Dinámica del péndulo paracónico en un campo de fuerzas externo de origen gravitacional, Tesis de doctorado, Bogotá, (2014).

Allais, M., The Allais effect and my experiment with the paraconical pendulum, Nasa 1954-1960, París, (1999).

Pugach, A. Goodey, T. and Olenici, D., Correlated anomalous effects observed during the august 1st 2008 solar eclipse, Journal of Advanced Research in Physics, 1(2):021007, (2010).

Saxl, E. and Allen. M., 1970 Solar Eclipse as Seen by a Torsion Pendulum. Phys. Rev. D, 3(4), pag 823-825. (1971).

Murcov, N. Mihaila, I. and Pambuccian, V., On the movement of the Foucault pendulum and the Allais pendulum during the solar eclipse of 3 October 2005.

Ortega, M., Lecciones de Física, Monytex, (2006).

Brizard, A., A primer on elliptic functions with applications in classical mechanics, European Journal of Physics, Vol. 30, pag 729-750. (2009).

Maya, H. Diaz, R. and Herrera, W., Study of the Apsidal Precession of the Physical Symmetrical Pendulum, Journal of Applied Mechanics, Vol. 82, (2015).

Lagrange, J., Mécanique Analytique, 3 ed. Imprimeur-Libraire, Vol. 2, pag 168, Paris, (1885).

[10] Goldstein, H. Poole, C. and Safko, J., Classical Mechanics, 3rd Ed. Addison-Wesley, (2002).