

# Estudio de correlaciones cuánticas de qubits en cavidades remotas: procesos bifotónicos vs unifotónicos en cada cavidad

## Study of quantum correlations of qubits in remote cavities: biphotonic vs uniphotonic processes in each cavity

Francisco González <sup>a,\*</sup>  
Vitalie Eremeev <sup>b,\*</sup>  
Pablo Villamil <sup>c,\*</sup>

Fecha de Recepción: 14.9.2019

Fecha de Aceptación: 25.12.19

Doi: <https://doi.org/10.19053/01217488.v11.n1.2020.8419>

### Resumen

En este trabajo se estudian las correlaciones cuánticas, entrelazamiento y discordia, de dos qubits ubicados cada uno en su respectiva cavidad, las cuales interactúan con un reservorio común. Cada qubit interactúa con su respectiva cavidad mediante la emisión/absorción de dos fotones correlacionados (bi-fotón). Inicialmente, los átomos se consideran en un estado tipo Bell diagonal y las cavidades en estado vacío. Se calcula la evolución de las correlaciones y, para el modelo con interacciones bifotónicas sin pérdidas de fotones a través de la cavidad, se encuentra el efecto de congelamiento de las correlaciones. Cuando hay pérdidas unifotónicas o bifotónicas hacia el reservorio se evidencia un decaimiento de las correlaciones. Se nota que los qubits se encuentran entrelazados en un lapso de tiempo más largo cuando se considera interacciones y pérdidas bifotónicas.

**Palabras clave:** Correlaciones cuánticas, Bi-fotón, Qubit, Entrelazamiento, Discordia cuántica.

### Abstract

The aim of this work is to study the quantum correlations, entanglement and discord, of two qubits, each one located in its respective cavity, which interact with a common reservoir. Each qubit interacts with its own respective cavity through the emission/absorption of two correlated photons (bi-photon). Initially, the atoms are considered in a type of Bell-diagonal state and the cavities in the empty state. The evolution of the correlations is calculated and, for the model with biphotonic interactions without losses of photons through the cavity, the freezing effect of the correlations is found. When there are uniphotonic or biphotonic losses toward the reservoir, a decay of the correlations is evidenced. It is observed that qubits are entanglement over a longer period of time when biphotonic interactions and losses are considered.

**Key words:** Quantum correlations, Bi-photon, Qubit, Entanglement, Quantum discord.

---

<sup>a</sup>Universidad de Sucre, Departamento de Física, Sincelejo, Colombia.

\*Correo electrónico: frank20132309@gmail.com

<sup>b</sup>Universidad Diego Portales, Facultad de Ciencias e Ingenierías, Santiago Chile, Chile

\*Correo electrónico: vitalie.ermeev@udp.cl

<sup>c</sup>Universidad de Sucre, Departamento de Física, Sincelejo, Colombia.

\*Correo electrónico: pablo.villamil@unisucra.edu.co

## 1. Introducción

Las correlaciones cuánticas se han convertido en una herramienta clave para el estudio de la información, la criptografía y la teleportación cuántica, entre otras. Los estados cuánticos proporcionan nuevas formas de procesamiento de la información y comunicación sin análogos en la información clásica. El recurso esencial para la mayoría de estas aplicaciones son los estados entrelazados [1]. Sin embargo, el entrelazamiento es una propiedad difícil de alcanzar e incluso, cuando se logra, suelen ser estados cuánticos muy inestables, vulnerables bajo los efectos de cualquier proceso disipativo como resultado del acoplamiento al medio ambiente [2].

La dinámica de la decoherencia clásica y cuántica ha estimulado un gran interés en la investigación de los fenómenos de cambios repentinos en las correlaciones para diferentes sistemas físicos. Durante los últimos años, un esfuerzo intenso se ha centrado en explicar la naturaleza de las transiciones repentinas y los efectos de congelación de las correlaciones cuánticas y las condiciones bajo las cuales ocurren tales transiciones. Además, desde la perspectiva de las aplicaciones, la eficiencia con la que se podrían diseñar estos fenómenos en tecnologías cuánticas también es una cuestión de interés [3].

## 2. Modelo

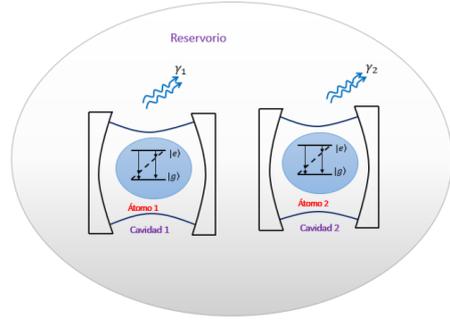
Se consideran dos átomos de dos niveles localizados cada uno, en cavidades no interactuantes, las cuales interactúan con un reservorio común. Cada átomo interactúa con dos modos del campo electromagnético de frecuencias  $\omega_0$  y  $\omega_1$  en su respectiva cavidad. En este sistema se tienen en cuenta las pérdidas bi-fotónicas a través de cada cavidad, como se muestra en la figura 1.

El Hamiltoniano del sistema cerrado qubits-cavidades se escribe como

$$\hat{H}_s = \hat{H}_0 + \hat{H}_i \quad (1)$$

donde  $\hat{H}_0$  es el Hamiltoniano libre de interacciones y está dado por,

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^2 \left( \hbar\omega_0 \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hbar\omega_1 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_j^z \right) \quad (2)$$



**Figura 1.** Dos cavidades distantes y no interactuantes, cada una con un átomo en su interior, inmersas en un baño térmico. En la figura  $\gamma$  es la tasa de decaimiento de bifotones en cada cavidad.

Donde  $\hat{a}_j(\hat{a}_j^\dagger)$  y  $\hat{b}_j(\hat{b}_j^\dagger)$  son los operadores aniquilación (creación) de los modos en cada cavidad,  $\omega$  es la frecuencia de transición de cada átomo,  $\hat{\sigma}_j^z$  es el operador de inversión de población del átomo  $j$ .

$\hat{H}_i$  corresponde al Hamiltoniano de interacción de cada átomo con los dos modos de la cavidad,

$$\hat{H}_i = \hbar g \sum_{j=1}^2 (\hat{\sigma}_j^+ \hat{b}_j \hat{a}_j + \hat{\sigma}_j^- \hat{a}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger) \quad (3)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento entre los modos del campo de la cavidad y los átomos,  $\hat{\sigma}_j^\pm$  son los operadores de transición entre los niveles de energía del átomo  $j$  [4].

Para determinar las correlaciones cuánticas de los átomos se encuentra la solución de la ecuación maestra Lindblad del operador densidad atómico  $\hat{\rho}(t)$ , que viene expresada como,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = & \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_s, \hat{\rho}(t)] \\ & + \sum_{j=1}^2 \left( \hat{C}_j \hat{\rho}(t) \hat{C}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}(t) \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \right) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\hat{C}_1 = \sqrt{\kappa(\langle n_{th} \rangle + 1)} \hat{s}$  y  $\hat{C}_2 = \sqrt{\kappa \langle n_{th} \rangle} \hat{s}^\dagger$ , son los operadores colapso y  $\hat{s} = \hat{a}\hat{b}$  corresponde a un operador colectivo del campo electromagnético.  $\kappa$  es la constante de acoplamiento de las cavidades al baño térmico.  $\langle n_{th} \rangle = 1/(e^{\hbar\omega/K_b T} - 1)$  es el número de fotones térmicos a la temperatura  $T$ .  $H_s$  es el

Hamiltoniano del sistema qubits-cavidades [5].

Por último se encuentran los elementos de matriz del operador densidad atómico en una base escogida y se calculan las correlaciones cuánticas (entrelazamiento y discordia).

### 3. Correlaciones Cuánticas

Con el fin de comprender el comportamiento de las correlaciones cuánticas, entrelazamiento y discordia, se describe el cálculo del grado de entrelazamiento de un sistema el cual se mide a partir de la concurrencia y se define la discordia cuántica como una medida alternativa de las correlaciones.

Existe una fórmula explícita de la concurrencia de un estado mixto arbitrario de dos qubits [7, 8]:

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0) \quad (5)$$

los  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  son valores propios, en orden decreciente de la matriz densidad no hermítica  $\mathbf{R}$ , con

$$\mathbf{R} = \hat{\rho}_{AB}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)\hat{\rho}_{AB}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \quad (6)$$

Para los estados separables  $C = 0$  y para los máximamente entrelazados  $C = 1$ .

El entrelazamiento no es la única medida de las correlaciones cuánticas, por lo tanto se estudia un enfoque que cuantifica todas las correlaciones no clásicas presentes en un sistema además del entrelazamiento, la *Discordia Cuántica* es dada por la diferencia de información mutua y las correlaciones clásicas así [9, 10]:

$$\bar{\mathcal{D}} = I(\hat{\rho}_{AB}) - \mathcal{C}(\hat{\rho}_{AB}) \quad (7)$$

Se define la información mutua como

$$I(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B) \quad (8)$$

donde  $S(\hat{\rho}_A) = -\text{Tr}\hat{\rho}_A(\log_2 \hat{\rho}_A)$  es la entropía de von Neumann para el sistema  $A$  y,  $S(\hat{\rho}_A|\hat{\rho}_B) = S(\hat{\rho}_{AB}) - S(\hat{\rho}_B)$  es la entropía condicional de  $A$  con respecto a  $B$ .

y las correlaciones clásicas se calculan mediante,

$$\mathcal{C}(\hat{\rho}_{AB}) = \text{Max}_{\{\Pi_B^j\}} \left( S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_{AB}|\{\Pi_B^j\}) \right) \quad (9)$$

donde  $\{\Pi_B^j\} = \{|b_j\rangle\langle b_j|\}$  es un conjunto de proyectores, que describen una medición realizada localmente en el sistema  $B$ .

La discordia proporciona información sobre la naturaleza cuántica de las correlaciones entre dos sistemas, de modo que es cero para los estados que únicamente tienen correlaciones clásicas y distinto de cero para los estados con correlaciones cuánticas. La discordia cuántica es igual al entrelazamiento de estados puros, y son distintos para estados mixtos, ya que algunos estados presentan una discordia cuántica finita incluso sin enredos [11].

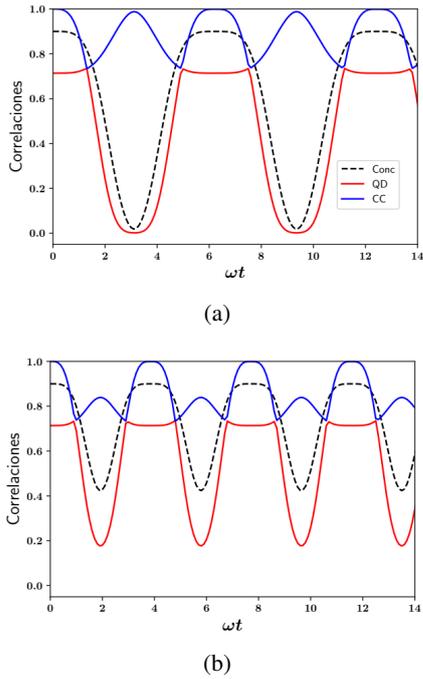
### 4. Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos del sistema estudiado. Todos los parámetros aquí son adimensionales, normalizados a la frecuencia del qubit (átomo de dos niveles). Como valores de referencia se podría considerar:  $\omega = 2\pi \times 1 \text{ GHz}$ ,  $\gamma/\omega = 10^{-3}$ ,  $g/\omega = 0.5$  y  $\omega_0 + \omega_1 = 0.9\omega$ , parecidos a los de Ref. [3], y que están relacionados con experimentos modernos en cavity-QED [12]. Se ha considerado que los dos modos del campo electromagnético son iguales para realizar los cálculos numéricos. El estado inicial de las cavidades es el estado vacío. Los dos átomos inicialmente se consideran en un estado descrito por una matriz densidad tipo  $X$  en forma de Bloch como

$$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{4} [\hat{I} \otimes \hat{I} + \hat{c} \cdot (\hat{\sigma} \otimes \hat{\sigma})] \quad (10)$$

donde  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$  es un vector dado por las matrices de Pauli,  $\hat{I}$  es la matriz identidad y el vector  $\hat{c} = (c_1, c_2, c_3)$  definen completamente el estado, con  $-1 \leq c_i \leq 1$ . A continuación se muestran los resultados numéricos cuando no se tienen en cuenta las pérdidas de fotones (figura 2), y cuando se tienen en cuenta las pérdidas unifotónicas y bifotónicas (figura 3).

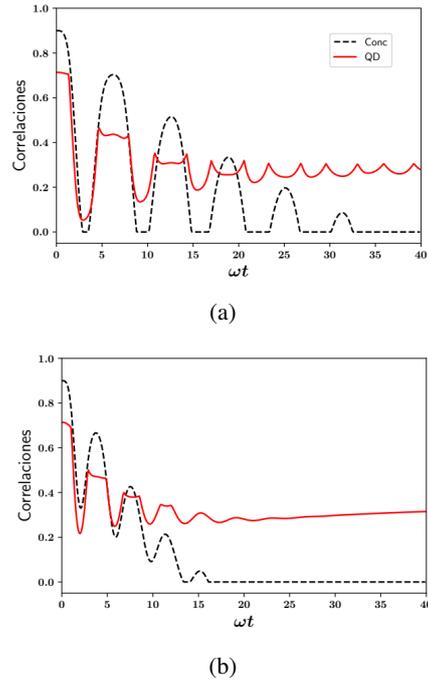
En las figuras 2(a-b) se observa el efecto de congelamiento, durante períodos de tiempos finitos, de la discordia cuántica con la dinámica unifotónica (figura 2 a) y bifotónica (figura 2 b) sin pérdidas.



**Figura 2.** Dinámica de las correlaciones sin pérdidas: (a) unifotónicas y (b) bifotónicas. Concurrencia (negro), Discordia (rojo) y Correlaciones clásicas (azul). El número promedio de fotones térmicos  $\bar{n}_{th} = 20$ . El estado inicial de los qubits está definido por  $\vec{c} = (1, -0.9, 0.9)$

Este efecto es similar al que se obtuvo en [3] donde consideran interacción unifotónica. La evolución de la concurrencia (línea de color negro discontinua) es periódica pero se mantiene constante en lapsos de tiempos cortos, indicando que los qubits se encuentran entrelazados de forma constante en esos intervalos de tiempo. Para la dinámica unifotónica (figura 2 a) el ancho de tiempo de congelamiento de las correlaciones es más grande que en la dinámica bifotónica (figura 2 b). Sin embargo, cuando en nuestro sistema se consideran pérdidas unifotónicas o bifotónicas hacia el reservorio desde las cavidades, la amplitud disminuye tanto para la discordia como para el entrelazamiento como se muestra en la figura 3.

Los resultados de las figuras 3(a-b) evidencian el efecto de congelamiento de la discordia para la evolución temprana del sistema, sin embargo, por la decoherencia el efecto desaparece, llevando la discordia a un valor casi-estacionario por un tiempo finito y seguramente en un tiempo suficiente largo ésta correlación convergerá a cero. La concurrencia (línea de color negro discontinua) con pérdidas unifotónicas (figura 3 a) muere y nace súbitamente en diferentes



**Figura 3.** Dinámica de las correlaciones con interacción bifotónica, con pérdidas de fotones: (a) unifotónicas y (b) bifotónicas. concurrencia (negro), discordia (rojo). El número promedio de fotones térmicos  $\bar{n}_{th} = 20$ . El estado inicial de los qubits está definido por  $\vec{c} = (1, -0.9, 0.9)$

instantes de su evolución hasta que muere definitivamente en el tiempo en que la discordia oscila cercano de un valor finito. Cuando se consideran pérdidas bifotónicas (figura 3 b) la concurrencia disminuye su amplitud a medida que transcurre el tiempo hasta que se hace cero en el resto de su evolución. Es decir, los qubits logran estar más tiempo entrelazados cuando consideramos la dinámica con pérdidas bifotónicas antes de tener una muerte súbita.

## 5. Conclusiones

Se calcularon y se analizaron las correlaciones cuánticas con dinámica unifotónica y bifotónica sin pérdidas y se observó el efecto de congelamiento de la discordia cuántica, similar al que obtienen en [3], para otro modelo con dinámica unifotónica. Este efecto se manifiesta también para la dinámica bifotónica que puede ser útil para algunas aplicaciones que impliquen procesos multifotónicos. Cuando se tienen en cuenta las pérdidas unifotónica y bifotónicas el efecto de congelamiento se presenta para la evolución temprana del sistema y debido a la de-

coherencia el efecto desaparece. De acuerdo a los resultados de la Fig. 3 la concurrencia con interacción y pérdidas bifotónicas, no evidencia efectos de muerte y nacimientos súbitos durante su evolución oscilatoria. La demostración del efecto de congelamiento de la discordia es de utilidad potencial para realizar el procesamiento de la información cuántica, por ejemplo, diseñar sistemas cuánticos para preservar las correlaciones cuánticas durante un tiempo finito.

## 6. Citas bibliográficas

### Referencias

- [1] A. Acín, R. Gill, N. Gisin, “Optimal Bell Tests Do Not Require Maximally Entangled States”. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, 210402, 2005.
- [2] V. Eremeev, V. Montenegro, M. Orszag, “Thermally generated long-lived quantum correlations for two atoms trapped in fiber-coupled cavities”, *Phys. Rev. A*, vol. 85, 032315, 2012.
- [3] V. Eremeev, N. Ciobanu, M. Orszag “Thermal effects on sudden changes and freezing of correlations between remote atoms in a cavity quantum electrodynamics network”, *Opt. Lett.*, vol. 39, pp. 2668-2671, 2014.
- [4] L. Garbe, I. L. Egusquiza, E. Solano, C. Ciuti, T. Coudreau, P. Milman, S. Felicetti, “Superradiant phase transition in the ultrastrong-coupling regime of the two-photon Dicke model”, *Phys. Rev. A*, vol. 95, 053854, 2017.
- [5] S. Whalen, “Photon correlation functions and photon blockade in two-mode cavity QED”, Trabajo de grado para optar el grado de Magister en Ciencias Físicas. Nueva Zelanda. University of Auckland. Faculty of Science, Department of Physics, 2008.
- [6] M. Shi, F. Jiang, C. Sun, J. Du, “Geometric picture of quantum discord for two-qubit quantum states”, *New Journal of Physics*, vol. 13, 073016, 2011.
- [7] S. Hill, W. Wootters, “Entanglement of a pair of quantum bits”, *Phy. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 5022-5025, 1997.
- [8] W. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits”, *Phy. Rev. Lett.* vol. 80, pp. 2245-2248, 1998.
- [9] H. Ollivier, W. H. Zurek, “Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, 017901, 2001.
- [10] L. Henderson, V. Vedral, “Classical, quantum and total correlations”, *J. Phys. A*, vol. 34, 6899, 2001.
- [11] S. Luo, “Quantum discord for two-qubit systems”, *Phys. Rev. A*, vol. 77, 042303, 2008.
- [12] S. Haroche and J. M. Raimond, “Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons”, (Oxford University, 2006)