Vol. 12 (núm. 1) pp. 43-53
Enero-Junio 2021

https://doi.org/10.19053/01217488.v12.n1.2021.11283

Conjuntos Pre regular *pc*-*I*-abiertos vía ideales sobre espacios topológicos

Pre Regular *pc*-*I*-Open Sets in Ideal Topological Spaces

Carlos Granados

Resumen

En este artículo, se introduce y estudia la noción de conjunto pre regular *pc*-*I*-abierto sobre un espacio topológico dotado de un ideal. Además, se muestran algunas de sus propiedades. Por otro lado, se definen nuevas variantes de continuidad y contra-continuidad, en efecto se muestran algunas caracterizaciones y se prueban algunos resultados sobre espacios pre regular *pc*-*I*-conexo, pre regular *pc*-*I*-T_1, pre regular *pc*-*I*-T_2 y pre regular *pc*-*I*-normal.

***Palabras clave*:** conjunto pre regular *pc*-*I*-abierto, función pre regular *pc*-*I*-continua, función contra pre regular *pc*-*I*-continua, espacio pre regular *pc*-*I*-conexo, espacio pre regular *pc*-*I*-T_1, espacio pre regular *pc*-*I*-T_2, espacio pre regular *pc*-*I*-normal

Abstract

In this paper, we introduce and study the notion of pre regular *pc*-*I*-open set on an ideal topological space. Besides, we show some of its properties. On the other hand, we define new variants of continuity and contra-continuity, indeed we show some characterizations and we prove some results on pre regular *pc*-*I*-connected, pre regular *pc*-*I*-T_1, pre regular *pc*-*I*-T_2 and pre regular *pc*-*I*-normal spaces.

***Keywords*:** pre regular *pc*-*I*-open set, pre regular *pc*-*I*-continuous function, contra pre regular *pc*-*I*-continuous function, pre regular *pc*-*I*-connected space, pre regular *pc*-*I*-T_1 space, pre regular *pc*-*I*-T_2 space, pre regular *pc*-*I*-normal space

Recepción: 26-jun-2020
Aceptación: 22-oct-2020

Universidad del Atlántico. Correo electrónico: `carlosgranadosortiz@outlook.es`

1 Introducción

En 1933, Kuratowski [12] utilizó la teoría de ideales sobre espacios topológicos para introducir una generalización de la clausura de un conjunto, denominada la función local de un conjunto con respecto a un ideal y a una topología. Dado un espacio topológico (X,τ) e I un ideal topológico sobre X, para cada subconjunto A de X se define la función local de A con respecto a I y τ, como el conjunto $A^\star = \{x \in X : U \cap A \notin I$ para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U\}$. Esta generalización fue de gran utilidad para definir el concpeto de operador clausura de Kuratowski $Cl^\star$, el cual induce una topología $\tau^\star$ que es más fina que la topología τ. En 1992, Jankovic y Hamlett [9], introducen la noción de conjunto $\mathscr{I}$-abierto vía función local $A \to A^\star$, la cual es independiente de la noción de conjunto abierto y es una generalización del concepto de conjunto pre-abierto dado por Mashhour et al. [15]. El estudio de conjuntos abiertos o cerrados mediante la noción de espacios topológicos dotado de ideales es un tema que los topologistas han estudiado y todavia siguen estudiando sobre diferentes campos de la topología general. En el 2019, Granados [5] estudió una variante de continuidad a través de los conjuntos Λ_{AI}-abiertos en espacios topológicos dotado de ideales. En el año 2020, se estudiaron e introducieron nuevos conjuntos y conceptos sobre espacios topológicos dotados de ideales, Nestor Pachon [17] introducieron las nociones de espacios $\mathbb{P}$- Hausdorff, $\mathbb{P}$-regular y $\mathbb{P}$-normal sobre espacios de idales. Por otro lado, Premkumar y Rameshpandi [18], definen nuevos conjuntos generalizados sobre espacios nano topológicos ideales.

Por otro lado, el estudio de conjuntos pre regulares inició en el 2018 cuando Jeyanthi y Nalayini [11] definieron en su artículo el conjunto pre regular sp-abierto, donde posteriormente en el 2020, Granados [4] introduce y estudia las nociones de conjuntos pre regular pc-abiertos. En este artículo, se define una nueva noción de conjuntos pre regulares sobre espacios topológicos dotados de ideales, los cuales se llamarán conjuntos pre regular pc-I-abiertos. Además, se muestran algunas de sus propieades y relaciones existentes entre algunos conjuntos ya conocidos en la literatura. Adicionalmente, se definen nuevas variantes de continuidad y contra-continuidad, y se prueban algunas caracterizaciones sobre espacios pre regular pc-I-conexos, pre regular pc-I-T_1, pre regular pc-I-T_2 y pre regular pc-I-normal.

2 Conceptos preliminares

En esta sección, se muestran algunas definiciones, proposiciones, lemas y/o teoremas, necesarios para el desarrollo de este artículo, es por esto que las demostraciones de estos mismos seran obviados ya que pueden ser encontradas en las referencias citadas.

Definición 2.1. *([12]) Un ideal I sobre un espacio topológico (X,τ) es una colecció no vacía de subconjuntos de X que sastisface las siguientes propiedades:*

1. *Si $A \in I$ y $B \subset A$, entonces $B \in I$. (Propiedad hereditaria).*
2. *Si $A \in I$ y $B \in I$, entonces $A \cup B \in I$. (Propiedad aditiva).*

Observación 1. *Observe que si I es un ideal, entonces $\emptyset \in I$, puesto que $\emptyset \subset A$ para cualquier $A \in I$.*

Ejemplo 2.1. *Sea X un conjunto no vacío. Las siguientes colecciones son ideales sobre X:*

1. *La colección de todos los subconjuntos finitos de X, denotada por $\mathscr{F}$.*
2. *La colección de todos los subconjuntos contables de X, denotada por $\mathscr{C}$, donde $\mathscr{C} = \mathscr{F} \cup \{A : A$ es enumerable$\}$.*
3. *La colección de todos los subconjuntos nunca densos de X, denotada por $\mathscr{N}$.*
4. *La colección de todos los subconjuntos cerrados y discretos de X, denotada por $\mathscr{CD}$.*
5. *La colección de todos los subconjuntos magros (o de primera categoría) de X, denotada por $\mathscr{M}$.*

Observación 2. *La terna (X,τ,I) dotado por un ideal I, lo llamaremos espacio topológico ideal o espacio topológico dotado de un ideal.*

Definición 2.2. *([12]) Un espacio topológico ideal (X,τ,I) es llamado espacio Hayashi samuels (E.H.S.) si $\tau\cap I=\{\emptyset\}$.*

Definición 2.3. *([12]) Sea (X,τ,I) un espacio topológico ideal. Para cada subconjunto A de X, se define la función local de A con respecto al ideal I y τ de la siguiente manera:*

$$A^\star(I,\tau)=\{x\in X: U\cap A\notin I,\ para\ cada\ U\in\tau(x)\},$$

donde $\tau(x)=\{U\in\tau: x\in U\}$

Observación 3. *En el desarrollo de este artículo, escribiremos $A^\star$ en vez de $A^\star(I,\tau)$.*

Definición 2.4. *([10]) Sea (X,τ,I) un espacio topológico ideal. Para cada subconjunto A de X, se define $Cl^\star(A)$ como la unión de A con $A^\star$, es decir $Cl^\star(A)=A\cup A^\star$.*

Teorema 2.1. *([10]) $Cl^\star$ es un operador clausura de Kuratowski.*

Observación 4. *En virtud del teorema 2.1, si (X,τ,I) es un espacio topológico ideal, denotamos por $\tau^\star$ a la topología generada por $Cl^\star$, esto es, $\tau^\star=\{U\subset X: Cl^\star(X-U)=X-U\}$. Los elementos de $\tau^\star$ son llamados $\tau^\star$-abiertos y el complemento de un $\tau^\star$-abierto es llamado $\tau^\star$-cerrado.*

Además, todo conjunto abierto en τ es un conjunto $\tau^\star$-abierto, pero lo contrario no se cumple siempre.

Teorema 2.2. *([10]) Sea (X,τ,I) un espacio topológico ideal y $A\subset X$, donde $I=\{\emptyset\}$, entonces $Cl^\star(A)=Cl(A)$.*

Definición 2.5. *Sea A un subconjunto del espacio topológico (X,τ), entonces A es:*

1. *Semi-abierto [13], si $A\subseteq Cl(Int(A))$.*
2. *Semi-I-abierto [8], si $A\subseteq Cl^\star(Int(A))$.*
3. *b-abierto [3], si $A\subseteq Cl(Int(A))\cup Int(Cl(A))$.*
4. *b-I-abierto [6], si $A\subseteq Cl^\star(Int(A))\cup Int(Cl^\star(A))$.*
5. *β-abierto [14], si $A\subseteq Cl(Int(Cl(A)))$.*
6. *β-I-abierto [7], si $A\subseteq Cl(Int(Cl^\star(A)))$.*
7. *Almost I-abierto [1], si $A\subseteq Cl(Int(A^\star))$.*
8. *$pclA=A\cup Cl(Int(A))$ [2] .*
9. *$spintA=A\cap Cl(Int(Cl(A)))$ [2] .*
10. *$pcl(spintA)=(A\cup Cl(Int(A)))\cap Cl(Int(Cl(A)))$ [2].*

Proposición 2.1. *Para cualquier espacio topológico ideal (X,τ,I), los siguientes enunciados siempre son verdaderos:*

1. *[8] Todo conjunto semi-I-abierto es semi-abierto.*
2. *[7] Todo conjunto β-I-abierto es β-abierto.*
3. *[3] Todo conjunto semi-abierto es b-abierto.*
4. *[6] Todo conjunto semi-I-abierto es b-I-abierto.*

Definición 2.6. *[4] Sea A un subconjunto del espacio topológico (X,τ), A es pre regular pc-abierto si $A=pcl(spintA)=(A\cup Cl(Int(A)))\cap Cl(Int(Cl(A)))$. El complemento de un conjunto pre regular pc-abierto es un conjunto pre regular pc-cerrado.*
La colección de todos los conjuntos pre regular pc-abiertos y pre regular pc-cerrados de (X,τ) son denotados por $PCO(X,\tau)$ y $PCC(X,\tau)$, respectivamente.

3 Conjuntos pre regular *pc*-*I*-abiertos

En esta sección, definimos y probaremos algunas propiedades de los conjuntos pre regular *pc-I*-abiertos, además se muestran algunas relaciones entre los conjuntos definidos en la seccón anterior.

Definición 3.1. *Sea (X,τ,I) un espacio topológico ideal y $A\subset X$, A es un conjunto pre regular pc-I-abierto, si $A=pcl^\star(spintA)=(A\cup Cl^\star(Int(A)))\cap Cl^\star(Int(Cl^\star(A)))$. El complemento de un conjunto pre regular pc-I-abierto es un conjunto pre regular pc-I-cerrado.*
La colección de todos los conjuntos pre regular pc-I-abiertos y pre regular pc-I-cerrados son denotados por $PCIO(X,\tau,I)$ y $PCIC(X,\tau,I)$.

El siguiente ejemplo muestra que las nociones de conjuntos pre regular *pc*-abiertos y pre regular *pc-I*-abiertos son independientes:

Ejemplo 3.1. *Sea* $X = \{a,b,c\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}\}$ *y el ideal* $I = \{\emptyset, \{b\}\}$, *entonces la colección de conjuntos pre regular pc-abiertos son* $PCO(X,\tau) = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a,c\}\}$ *y la colección de conjuntos pre regular pc-I-abiertos son* $PCIO(X,\tau,I) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,c\}\}$. *Entonces, podemos observar que el conjunto* $\{b\}$ *es un conjunto pre regular pc-I-abierto, pero no es un conjunto pre regular pc-abierto y el conjunto* $\{b,c\}$ *es un conjunto pre regular pc-abierto, pero no es un conjunto pre regular pc-I-abierto.*

Para que los conjuntos pre regular *pc*-abiertos y pre regular *pc-I*-abiertos se encuentren relacionados, debe de cumplirse la siguiente condición:

Teorema 3.1. *Sea* (X,τ,I) *un espaco topológico ideal. Si* $I = \{\emptyset\}$, *entonces si A es un conjunto pre regular pc-I-abiert, si y solo si, A es un conjunto pre regular pc-abierto.*

Proof. Sea A un subconjunto del espacio topológico ideal (X,τ,I) tal que $I = \{\emptyset\}$, entonces por el teorema 2.2, $Cl^\star(A) = Cl(A)$, esto implica que si A es un conjunto pre regular *pc*-abierto, entonces $A = (A \cup Cl(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl(A))) = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))$, así tenemos que A también sera un conjunto pre regular *pc-I*-abierto. □

Observación 5. *Teniendo en cuenta el teorema anterior, es importante que* $I = \{\emptyset\}$ *para que los conjuntos pre regular pc-abiertos y pre regular pc-I-abiertos este relacionados, de lo contrario ocurrirá lo propuesto en el ejemplo 3.1.*

Teorema 3.2. *Sea* (X,τ,I) *un espaco topológico ideal, entonces los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *Todo pre regular pc-I-abierto es* β*-I-abierto.*
2. *Todo pre regular pc-I-abierto es* β*-abierto.*

Proof. 1. Sea A un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en (X,τ), esto implica que $A = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^\star(A))) \subset Cl(Int(Cl^\star(A)))$, esto prueba que A es un conjunto β-*I*-abierto.

2. Dado que todo conjunto β-*I*-abierto es β-abierto y por la parte (1) de este teorema, tenemos que todo conjunto pre regular *pc-I*-abierto es β-abierto.

□

El reciporco del teorema anterior no siempre es verdadero, a continuación podemos ver un ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Sea* $X = \{a,b,c\}$, *con la topología* $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ *y el ideal* $I = \{\emptyset\}$, *entonces* $\{a,b\}$ *es un conjunto* β*-I-abierto y consecuentemente es* β*-abierto, pero no es un conjunto pre regular pc-I-abierto.*

Teorema 3.3. *Si A es un conjunto pre regular pc-I-abierto del espacio topológico ideal* (X,τ,I), *tal que* $Int(A) = \emptyset$ *y* $Cl^\star(A) = A$, *entonces A es un conjunto semi-abierto.*

Proof. Sea A un conjunto pre reular *pc-I*-abierto, tal que $Int(A) = \emptyset$ y $Cl^\star(A) = A$, entonces tenemos que $A = (A \cup \emptyset) \cap Cl(Int(A)) = A \cap Cl(Int(A)) \subset Cl(Int(A))$, por lo tanto A es un conjunto semi-abierto. □

Proposición 3.1. *Si A es un conjunto pre regular pc-I-abierto del espacio topológico ideal* (X,τ,I), *tal que* $Int(A) = \emptyset$ *y* $Cl^\star(A) = A$, *entonces A es un conjunto b-abierto.*

Proof. Dado que todo conjunto semi-abierto es *b*-abierto, y por el teorema 3.3, A es un conjunto semi-abierto, esto implica que A es un conjunto *b*-abierto. □

Teorema 3.4. *Si A es un conjunto pre regular pc-I-abierto del espacio topológico ideal* (X,τ,I), *tal que* $A \subset A^\star$, *entonces A es un conjunto almost I-abierto.*

Proof. Sea A un conjunto pre regular *pc-I*-abierto, entonces $A = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^\star(A))) = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(A \cup A^\star))$, dado que $A \subset A^\star$, tenemos que $A = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap$

$Cl(Int(A^\star)) \subset Cl(Int(A^\star))$, por lo tanto esto implica que A es un conjunto almost I-abierto. $\square$

Teorema 3.5. *Sea A un conjunto abierto y pre regular pc-I-abierto del espacio topológico ideal (X,τ), entonces A es un conjunto semi-I-abierto.*

Proof. Dado que A es un conjunto prer regular pc-I-abierto, tenemos que $A = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^\star(A))) \subset A \cup Cl^\star(Int(A))$, como A es un conjunto abierto, entonces $A \subseteq Cl^\star(Int(A))$, por lo tanto $A \cup Cl^\star(Int(A)) = Cl^\star(Int(A))$, y así $A \subset Cl^\star(Int(A))$, esto prueba que A es un conjunto semi-I-abierto. $\square$

Proposición 3.2. *Sea A un conjunto abierto y pre regular pc-I-abierto del espacio topológico ideal (X,τ), entonces A es un conjunto b-I-abierto.*

Proof. Por el teorema 3.5 tenemos que A es un conjunto semi-I-abierto, por la proposición 2.1, parte (4), tenemos que A es un conjunto b-I-abierto. $\square$

Definición 3.2. *Sea A un subconjunto del espacio topológico ideal. Entonces A es un conjunto:*

1. $pcl^\star A = A \cup Cl^\star(Int(A))$.
2. $(spintA)^\star = A \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))$.

Teorema 3.6. *Para cualquier subconjunto A del espacio topológico ideal (X,τ), los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es pre regular pc-I-abierto.*
2. $A = pcl^\star A \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))$.
3. $A = (spintA)^\star \cup Cl^\star(Int(A))$.

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2): Sea A un conjunto pre regular pc-I-abierto, entonces $A = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))$, por la definición 3.2, parte (1), tenemos que $pcl^\star A = A \cup Cl^\star(Int(A))$, por lo tanto $A = pcl^\star A \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))$.
(2)$\Longrightarrow$(3): Sea $A = pcl^\star A \cap Cl(Int(Cl^\star(A))) = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^\star(A))) = (A \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))) \cup (Cl(Int(Cl^\star(A))) \cap Cl^\star(Int(A)))$, por la parte (2) de la dfinición 3.2, $(spintA)^\star = A \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))$. Además, $Cl^\star(Int(A)) \subseteq Cl(Int(Cl^\star(A)))$, esto implica que $Cl(Int(Cl^\star(A))) \cap Cl^\star(Int(A)) = Cl^\star(Int(A))$, en consecuncia esto prueba que $A = (spintA)^\star \cup Cl^\star(Int(A))$.
(3)$\Longrightarrow$(1): Sea $A = (spintA)^\star \cup Cl^\star(Int(A)) = (A \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))) \cup Cl^\star(Int(A)) = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap (Cl^\star(Int(A)) \cup Cl(Int(Cl^\star(A))))$, pero $Cl^\star(Int(A)) \subseteq Cl(Int(Cl^\star(A)))$, esto implica que $Cl(Int(Cl^\star(A))) \cup Cl^\star(Int(A)) = Cl(IntCl^\star(A)))$, en efecto tenemos que $A = (A \cup Cl^\star(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^\star(A)))$, por lo tanto A es un conjunto pre regular pc-I-abierto $\square$

A continuación mostraremos algunos resultados hallados de los conjuntos pre regular pc-I-abiertos.

Iniciaremos mostrando un contraejemplo donde podemos ver que todo conjunto abierto no es necesariamente un conjunto pre regular pc-I-abierto.

Ejemplo 3.3. *Sea $X = \{a,b,c\}$, con el ideal $I = \{\emptyset,\{c\}\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$. Entonces la colección de todos los conjuntos pre regular pc-I-abiertos son $PCIO(X,\tau,I) = \{\emptyset, X\}$, podemos ver que los conjuntos $\{a\}$ y $\{a,b\}$ no son pre regular pc-I-abiertos.*

Ahora mostraremos dos contraejemplos que muestran que la unión, la intersección y la diferencia arbitraria de dos conjuntos pre regular pc-I-abiertos no es un conjunto pre regular pc-I-abierto.

Ejemplo 3.4. *Sea $X = \{a,b,c\}$, con el ideal $I = \{\emptyset,\{a\}\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Entonces, la colección de todos los conjuntos pre regular pc-I-abierto son $PCIO(X,\tau,I) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$, podemos ver que $\{a\}$ y $\{b\}$ son conjuntos pre regular pc-I-abiertos, pero $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$ no es un conjunto pre regular pc-I-abierto.*

Ejemplo 3.5. *Sea $X = \{a,b,c\}$, con el ideal $I = \{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$. Entonces, la colección de todos los conjuntos pre regular pc-I-abierto son $PCIO(X,\tau,I) = \{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a,c\}\}$, podemos* *ver que $\{b,c\}$ y $\{a,c\}$ son conjuntos pre regular pc-I-abiertos, pero $\{a,c\} \cup \{b,c\} = \{c\}$ no es un conjunto pre regular pc-I-abierto.*

Por otro lado, podemos ver que $\{b,c\} - \{a,c\} = \{c\}$, por el enunciado anterior, concluimos que $\{c\}$ no es un conjunto pre regular pc-I-abierto.

Teorema 3.7. *Sea (X,τ,I) un espacio topológico ideal y $A \subset X$. Si A es un conjunto pre regular pc-I abierto donde $I = \{\emptyset\}$, entonces el conjunto vacío es el único conjunto que es nunca denso y pre regular pc-I-abierto.*

Proof.

Sea A un conjunto pre regular *pc-I*-abierto, como $I = \{\emptyset\}$ esto implica que $Cl^{\star}(A) = Cl(A)$, y tenemos que, $A = (A \cup Cl^{\star}(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl^{\star}(A))) = (A \cup Cl(Int(A))) \cap Cl(Int(Cl(A))) = \emptyset$, si y solo si, $A = \emptyset$. □

4 Continuidad vía conjuntos pre regular *pc-I*-abiertos

En esta sección, se introducen y estudian algunas variantes de continuidad sobre los conjuntos pre regular *pc-I*-abiertos, además se muestran algunas carectizaciones. En esta sección, τ, σ y ω denotaran espacios topológicos. Además, I, J y K denotaran ideales.

Definición 4.1. *Una función $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma,J)$ es pre regular pc-I-continua, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular pc-I-abierto en (X,τ,I) para cada conjunto V abierto en (Y,σ,J).*

Definición 4.2. *Una función $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ y X es sweca-pre regular pc-I-continua si $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular pc-I-abierto en (X,τ,I) para cada conjunto V $\sigma^{\star}$-abierto en (Y,σ,J).*

Teorema 4.1. *Toda función sweca-pre regular pc-I-continua es pre regular pc-I-continua.*

Proof. Sea A un conjunto abierto en (Y,σ,J), entonces A es un conjunto $\sigma^{\star}$-abierto en (Y,σ,J), dado que f es una funciòm sweca-pre regular *pc-I*-continua, entonces $f^{-1}(A)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en (X,τ,I), por lo tanto f es una función pre regular *pc-I*-continua. □

Observación 6. *El reciproco del teorema anterior no se cumple de forma general, pues todo conjunto $\sigma^{\star}$-abierto no es necesariamente un conjunto abierto, entonces podra existir un conjunto $\sigma^{\star}$-abierto en (Y,σ,J) que no sea pre regular pc-I-abierto en (X,τ,I).*

Teorema 4.2. *Sea $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ y $g : (Y,\sigma,J) \to (Z,\omega,K)$ dos funciones, con τ,σ y ω espacios topológicos e I,J y K ideales, entonces los siguientes enunciados son verdaderos:*

1. *$g \circ f$ es pre regular pc-I-continua, si f es pre regular pc-I-continua y g es continua.*
2. *$g \circ f$ es sweca-pre regular pc-I-continua, si f es sweca-pre regular pc-I-continua y g continua.*

Proof. 1. Sea V un conjunto abierto en Z, como g es una función continua, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en Y, dado que f es una función pre regular *pc-I*-continua, tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en X, pero $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$, esto muestra que $g \circ f$ es una función pre regular *pc-I*-continua.

La demostración del punto (2), se realiza de manera similar al punto (1). □

Teorema 4.3. *Para cualquier función $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$, tal que la unión arbitraria de conjuntos pre regular pc-I-abiertos en X es un conjunto pre regular pc-I-abierto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es pre regular pc-I-continua.*
2. *$f^{-1}(B)$ es un conjunto pre regular pc-I-cerrado en X para cada conjunto cerrado B en Y.*
3. *Para cada $x \in X$ y cada conjunto V abierto en Y conteniendo a $f(x)$ existe un conjunto pre regular pc-I-abierto U en X conteniendo a x y $f(U) \subset V$.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea B cualquier subconjunto cerrado en Y, entonces $V = Y - B$ es un conjunto abierto en Y y dado que f es una función pre regular *pc-I*-continua, $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto de X, pero $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B)$, por lo tanto $f^{-1}(B)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-cerrado de X.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sea V cualquier conjunto abierto en Y, then $B = Y - V$ es un conjunto cerrado en Y y por hipótesis, tenemos que $f^{-1}(B)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-cerrado de X, pero $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - V) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V)$, por lo tanto $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto de X. Esto muestra que f es una función pre regular *pc-I*-continua.
(1) $\Rightarrow$ (3): Sea $x \in X$ y B un conjunto abierto en Y tal que $f(x) \in B$, entonces $x \in f^{-1}(B)$ y dado que f es una función pre regular *pc-I*-continua, $f^{-1}(B)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en X. Si $U = f^{-1}(B)$, entonces U es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto de X tal que $x \in U$ y $f(U) = f(f^{-1}(B)) \subset B$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sea B cualquier conjunto abierto en Y y $x \in f^{-1}(B)$, entonces $f(x) \in B$ y por la parte (3) de este teorema, existe un conjunto pre regular *pc-I*-abierto U_x de X tal que $x \in U_x$ y $f(U_x) \subset B$. por lo tanto, $x \in U_x \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(F)$, en consecuencia $f^{-1}(B) = \bigcup\{U_x : x \in f^{-1}(B)\}$. En conclusión tenemos que $f^{-1}(B)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto de X. □

Teorema 4.4. *Para cualquier función $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$, tal que la unión arbitraria de conjuntos pre regular pc-I-abiertos en X es un conjunto pre regular pc-I-abierto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es sweca-pre regular pc-I-continua.*
2. *$f^{-1}(B)$ es un conjunto pre regular pc-I-cerrado en X para cada conjunto $\sigma^\star$-cerrado B en Y.*
3. *Para cada $x \in X$ y cada conjunto V $\sigma^\star$-abierto en Y conteniendo a $f(x)$ existe un conjunto pre regular pc-I-abierto U en X conteniendo a x y $f(U) \subset V$.*

Proof. La demostración de este teorema se realiza de manera similar al teorema 4.3. □

Definición 4.3. *Un espacio topológico ideal (X,τ,I) es pre regular pc-I-T_1 si para cada par de puntos x,y con $x \neq y$, exite al menos un conjunto pre regular pc-I-abierto que contiene a x o y, pero no a ambos.*

Definición 4.4. *Una función $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma,J)$ es pre regular pc-I-irresoluta, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular pc-I-abierto en (X,τ,I) para cada conjunto V pre regular pc-I-abierto en (Y,σ,J).*

Teorema 4.5. *Sea $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ una función pre regular pc-I-irresoluta, con X un espacio pre regular pc-I-T_1, entonces Y es un espacio pre regular pc-I-T_1*

Proof. Supongamos que Y no es un espacio pre regular *pc-I-T_1*. Si para cada par de puntos x,y con $x \neq y$ tal que U y V son conjuntos pre regular *pc-I*-abiertos con $U \cap V \neq \emptyset$ con $x \in U$ y $y \in V$, dado que f es una función pre regular *pc-I*-irresoluta, $f^{-1}(U \cap V) \neq \emptyset$ en X y esto contradice que X es un espacio pre regular *pc-I-T_1*. □

Definición 4.5. *Un espacio topológico ideal (X,τ,I) es pre regular pc-I-T_2, si para cada par de puntos diferentes $x,y \in X$, existen conjuntos pre regular pc-I-abiertos U y V de X tal que $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.*

Teorema 4.6. *Si $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ es una función abierta, inyectiva y pc-I-continua, donde (Y,σ) es un espacio pre regular pc-I-T_2, entoncs (X,τ,I) es un espacio pre regular pc-I-T_2*

Proof. Sea A y B dos conjuntos abiertos diferentes en X. Como f es una función abierta e inyectiva, entonces $f(A)$ y $f(B)$ son conjuntos abiertos disyuntos en Y y como (Y,σ,J) es un espacio pre regular *pc-I-T_2*, existen dos conjuntos abiertos G y H de Y tales que $f(A) \subset G$, $f(B) \subset H$ y $G \cap H = \emptyset$. Ahora, dado que f es una función pre regular *pc-I*-continua, $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son conjuntos pre regular *p-I*-abiertos de X, aunque $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(G)$, $B \subset f^{-1}(f(B)) \subset f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Esto prueba que (X,τ,I) es un espacio *pc-I-T_2*. □

Definición 4.6. *Un espacio topológico ideal (X,τ,I) es pre regular pc-I-conexo, si X no puede escribirse* *como una unión disyunta de dos conjuntos pc-I-abiertos diferentes de vacío.*

Teorema 4.7. *Para un espacio topológico ideal (X,τ,I), los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *(X,τ,I) es pre regular pc-I-conexo.*
2. *$\emptyset$ y X son los únicos conjuntos de X que son al mismo tiempo pre regular pc-I-abiertos y pre regular pc-I-cerrados.*
3. *Cada función pre regular pc-I-continua de X es un espacio discreto en Y con al menos dos puntos, es un función constante.*

Proof. $(1) \Longrightarrow (2)$: Sea B un conjunto de X que es pre regular *pc-I*-abierto y pre regular *pc-I*-cerrado, entonces $X-B$ es pre regular *pc-I*-abierto y pre regular *pc-I*-cerrado, así $X = B\cup(X-B)$, como X es conexo, entonces $B=\emptyset$ o $B=X$.
$(2) \Longrightarrow (1)$: Supongamos que X no es pre regular *pc-I*-conexo y $X=U\cup B$, entonces $U=X-B$, por hipótesis, se tiene que $U=\emptyset$ o $U=X$, lo que contradice el hecho de que U y V son no vacíos.
$(2) \Longrightarrow (3)$: Sea $f(X,\tau,I)\rightarrow Y$ una función pre regular *pc-I*-continua donde Y es un espacio topológico discreto y contiene al menos dos puntos, entonces X se puede escribir como una colección de conjuntos que son a la vez pre regular *pc-I*-abiertos y pre regular *pc-I*-cerrados de la forma que $\{f^{-1}(y): y\in Y\}$, de esto, se concluye que existe un $y_0\in Y$ tal que $f^{-1}(\{y_0\})=X$ y así, f es una función constante.
$(3) \Longrightarrow (2)$: Sea Z un conjunto de X que es pre regular *pc-I*-abierto y pre regular *pc-I*-cerrado. Supongamos que $W\neq\emptyset$ y sea $f:(X,\tau,I)\rightarrow Y$ una función pre regular *pc-I*-continua definida por $f(Z)=\{y_1\}$ y $f(X-Z)=\{Y_2\}$ para $y_1\neq y_2$, con $y_1,y_2\in Y$. Puesto que f es una función constante, se concluye que $X=Z$. $\square$

Definición 4.7. *Una función $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ se dice:*

1. *Contra pre regular pc-I-continua, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular pc-I-cerrado en X para cada onjunto abierto V en Y.*
2. *Contra sweca-pre regular pc-I-continua, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular pc-I-cerrado en X para cada conjunto $\sigma^\star$-abierto V en Y.*

Teorema 4.8. *Toda función contra sweca-pre regular pc-I-continua es contra pre regular pc-I-continua.*

Proof. Sea V un conjunto abierto en Y, entonces V es un conjunto $\sigma^\star$-abierto en Y y puesto que f es contra sweca-pre regular *pc-I*-continua, tenemos que $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-cerrado de X. Por lo tanto, f es contra pre regular *pc-I*-continua. $\square$

Observación 7. *El reciproco del teorema anterior no se cumple de forma general, pues todo conjunto $\sigma^\star$-abierto no es necesariamente un conjunto abierto, entonces puede existir un conjunto $\sigma^\star$-abierto en (Y,σ,J) que no sea pre regular pc-I-cerrado en (X,τ,I), como se puede ver en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 4.1. *Sea $X=\{q,w,e\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{q\},\{q,w\}\}$, $\sigma=\{\emptyset,X,\{e\},\{w,e\}\}$, $I=\{\emptyset,\{e\}\}$ y $J=\{\emptyset,\{e\},\{w,e\},\{w\}\}$. Entonces, la colección de todos los subconjuntos $\sigma^\star$-abiertos de X es $\{\emptyset,X,\{e\},\{w,e\},\{q\},\{q,w\},\{q,w\}\}$ y la colección de todos los subconjuntos pre regular pc-I-cerrados de X es $\{\emptyset,X,\{e\},\{w,e\},\{q,e\},\{w\}\}$. La función identidad $f:(X,\tau,I)\rightarrow(X,\sigma,J)$ es contra pre regular pc-I-continua, pero no es contra sweca-pre regular pc-I-continua.*

Teorema 4.9. *Sea $f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma,J)$ una función, tal que la unión arbitraria de conjuntos pre regular pc-I-abiertos en X es un conjunto pre regular pc-I-abierto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es contra pre regular pc-I-continua.*
2. *$f^{-1}(F)$ es un conjunto pre regular pc-I-abierto en X para cada conjunto cerrado F de Y .*
3. *Para cada $x\in X$ y cada conjunto cerrado F de Y que contiene a $f(x)$, existe un conjunto pre regular pc-I-abierto U de X que contiene a x y $f(U)\subset F$.*

Proof. $(1) \Rightarrow (2)$: Sea F cualquier conjunto cerrado en Y, entonces $V = Y - F$ es un conjunto abierto en Y y puesto que f es contra pre regular *pc-I*-continua, $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-cerrado de X, pero $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - F) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(F) = X - f^{-1}(F)$ y por lo tanto, $f^{-1}(F)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en X.
$(2) \Rightarrow (1)$: Sea V cualquier conjunto abierto de Y, entonces $F = Y - V$ es un conjunto cerrado de Y y por hipótesis, tenemos que $f^{-1}(F)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en X, pero $f^{-1}(F) = f^{-1}(Y - V) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V)$ y por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-cerrado en X. Esto demuestra que f es contra pre regular *pc-I*-continua.
$(1) \Rightarrow (3)$: Sea $x \in X$ y F un conjunto cerrado en Y tal que $f(x) \in F$, entonces $x \in f^{-1}(F)$ y puesto que f es una función contra pre regular *pc-I*-continua, $f^{-1}(F)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en X. Si $U = f^{-1}(F)$, entonces U es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en X tal que $x \in U$ y $f(U) = f(f^{-1}(F)) \subset F$.
$(3) \Rightarrow (1)$: Sea F cualquier conjunto cerrado en Y y $x \in f^{-1}(F)$, entonces $f(x) \in F$ y por la parte (3) de este teorema, existe un conjunto pre regular *pc-I*-abierto U_x de X tal que $x \in U_x$ y $f(U_x) \subset F$. Así, $x \in U_x \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(F)$ y por lo tanto, $f^{-1}(F) = \bigcup\{U_x : x \in f^{-1}(F)\}$. Por lo tanto, concluimos que $f^{-1}(F)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto en X. ☐

Teorema 4.10. *Sea $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ una función, tal que la unión arbitraria de conjuntos pre regular pc-I-abiertos en X es un conjunto pre regular pc-I-abierto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es contra sweca-pre regular pc-I-continua.*
2. *$f^{-1}(F)$ es un conjunto pre regular pc-I-abierto en X para cada conjunto $\sigma^{\star}$-cerrado F de Y .*
3. *Para cada $x \in X$ y cada conjunto $\sigma^{\star}$-cerrado F de Y que contiene a $f(x)$, existe un conjunto pre regular pc-I-abierto U de X que contiene a x y $f(U) \subset F$.*

Proof. La demostración de este teorema se realiza de manera similar al teorema 4.9. ☐

Teorema 4.11. *Si $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ es una función sobreyectiva contra pre regular pc-I-continua y (X,τ,I) es un espacio pre regular pc-I-conexo, entonces el espacio (Y,σ,J) no es discreto.*

Proof. Supongamos que (Y,σ,J) es un espacio discreto y sea A cualquier conjunto propio no vacío en Y. Entonces, A es un conjunto abierto y cerrado en Y y como f es contra pre regular *pc-I*-continua, tenemos que $f^{-1}(A)$ es un conjunto pre regular *pc-I*-abierto y pre regular *pc-I*-cerrado en X. Puesto que (X,τ,I) es un espacio pre regular *p-I*-conexo, por el Teorema 4.7, los únicos conjuntos de X que son a la vez pre regular *pc-I*-abiertos y pre regular *pc-I*-cerrados son $\emptyset$ y X. Así, $f^{-1}(A) = \emptyset$ ó $f^{-1}(A) = X$. Si $f^{-1}(A) = \emptyset$, entonces esto contradice el hecho que $A \neq \emptyset$ y f es sobreyectiva. Si $f^{-1}(A) = X$, entonces f no es una función. Por lo tanto, (Y,σ,J) no es un espacio discreto. ☐

Teorema 4.12. *Un espacio topológico ideal (X,τ,I) es pre regular pc-I-conexo, si cada función contra pre regular pc-I-continua $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$, donde (Y,σ,J) es un espacio T_0, es una función constante.*

Proof. Supongamos que (X,τ,I) no es un espacio pre regular *pc-I*-conexo y cada función contra pre regular *pc-I*-continua $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$, donde (Y,σ,J) es un espacio T_0 , es una función constante. Puesto que (X,τ,I) no es un espacio pre regular *pc-I*-conexo, por el Teorema 4.7, existe un subconjunto propio no vacío A de X que es a la vez pre regular *pc-I*-abierto y pre regular *pc-I*-cerrado. Sea $Y = \{a,b\}$ y $\sigma = \{Y,\emptyset,\{a\},\{b\}\}$ una topología para Y. Sea $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ una función tal que $f(A) = \{a\}$ y $f(X - A) = \{b\}$, entonces f es una función no constante y contra pre regular *pc-I*-continua tal que (Y,σ,J) es un espacio T_0, que es una contradicción. Por lo tanto, (X,τ,I) es un espacio pre regular *pc-I*-conexo. ☐

Teorema 4.13. *Si $f : (X,\tau,I) \to (Y,\sigma,J)$ es una función contra pre regular pc-I-continua y (Y,σ,J) es un espacio regular, entonces f es pre regular pc-I-continua.*

Proof. Sean $x \in X$ y V un conjunto abierto en Y tal que $f(x) \in V$. Puesto que (Y, σ, J) es regular, existe un conjunto abierto W de Y tal que $f(x) \in W \subset Cl(W) \subset V$. Ahora, como f es una función contra pre regular *pc-I*-continua y $Cl(W)$ es un conjunto cerrado en Y que contiene a $f(x)$, entonces por el Teorema 4.9, existe un conjunto pre regular *pc-I*-abierto U en X tal que $x \in U$ y $f(U) \subset Cl(W) \subset V$. Entonces esto muestr que f es uan función pre regular *pc-I*-continua. □

Definición 4.8. *Un espacio topológico ideal* (X, τ, I) *se dice pre regular pc-I-normal, si para cada par de conjuntos cerrados disjuntos A y B de X, existen conjuntos pre regular pc-I-abiertos U y V tales que* $A \subset U$, $B \subset V$ *y* $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 4.14. *Si* $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ *es una función cerrada, inyectiva y contra pre regular pc-I-continua y* (Y, σ, J) *es un espacio ultra normal, entonces* (X, τ, I) *es un espacio pre regular pc-I-normal.*

Proof. Sean A y B dos conjuntos cerrados disjuntos en X. Puesto que f es cerrada e inyectiva, entonces $f(A)$ y $f(B)$ son conjuntos cerrados disjuntos en Y y como (Y, σ, J) es un espacio ultra normal, existen dos conjuntos cerrados y abiertos a la vez G y H en Y tales que $f(A) \subset G$, $f(B) \subset H$ y $G \cap H = \emptyset$. Ahora, como f es contra pre regular *pc-I*-continua, $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son conjuntos pre regular *pc-I*-cerrados en X y además, $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(G)$, $B \subset f^{-1}(f(B)) \subset f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Esto demuestra que (X, τ, I) es un espacio pre regular *pc-I*-normal. □

Teorema 4.15. *Si una función* $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ *es inyectiva contra pre regular pc-I-continua y* (Y, σ, J) *es un espacio Urysohn, entonces* (X, τ, I) *es un espacio pre regular pc-I-*T_2.

Proof. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Puesto que f es una función inyectiva, tenemos que $f(x) \neq f(y)$ y, como (Y, σ, J) es un espacio Urysohn, existen conjuntos abiertos U y V de Y tales que $f(x) \in U$, $f(y) \in V$ y $Cl(U) \cap Cl(V) = \emptyset$. Dado que $Cl(U)$ y $Cl(V)$ son conjuntos cerrados en Y tales que $f(x) \in Cl(U)$ y $f(y) \in Cl(V)$, la contra pre regular *pc-I*-continuidad de f garantiza, por el Teorema 4.9, la existencia de dos conjuntos pre regular *pc-I*-abiertos A y B en X tales que $x \in A$, $y \in B$, $f(A) \subset Cl(U)$ y $f(B) \subset Cl(V)$. Así, $f(A) \cap f(B) \subset Cl(U) \cap Cl(V) = \emptyset$, por lo que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = \emptyset$ y por lo tanto, $A \cap B = \emptyset$. Esto demuestra que (X, τ, I) es un espacio pre regular *pc-I-*T_2. □

Referencias

[1] M. Abd El-Monsef, A. Mahmoud y A. Nasef, "Almost *I*-opennes and almost *I*-continuity", *J. Egyptian Math. Soc.*, vol. 7, no. 2, pp. 191-200, 1999.

[2] D. Andrijević, "semi-preopen sets", *Mat. Vesnik.*, vol. 38, pp. 24-32, 1986.

[3] D. Andrijevi, "On *b*-open sets", *Mat. Vesnik*, vol. 48, pp. 59-64, 1996.

[4] C. Granados, "Pre regular *pc*-open sets in topological spaces and some variant of continuity", *South Asian Journal of Mathematics*, vol. 10, pp. 13-20, 2020.

[5] C. Granados, "Λ_{AI}-sets and Λ_{AI}-continuous functions", *South Asian Journal of Mathematics*, vol. 10, pp. 29-51, 2020.

[6] A. Guler y G. Aslim, "*b-I*-open sets and decomposition of continuity via idealization", *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, vol. 22, pp. 27-32, 2005.

[7] E. Hatir y T. Noiri, "On decompositions of continuity via idealization", *Acta Math. Hungar.*, vol. 96, no. 4, pp. 341-349, 2002.

[8] E. Hatir y T. Noiri, "On semi-*I*-open sets and semi-*I*-continuous functions", *Acta Math. Hungar.*, vol. 107, no. 4, pp. 345-353, 2005.

[9] D. Jankovic y T. Hamlett, "Compatible extensions of ideals", *Boll. Un. Mat. Ital.*, vol. 7, no. 6-B, pp. 453-465, 1992.

[10] D. Jankovic y T. Hamlett, "New topologies from old via ideals", *Amer. Math. Monthly*, vol. 97, pp. 295-310, 1990.

[11] P. Jeyanthi, P. Nalayini and T.Noiri, "Pre regular spopen sets in topological spaces", *CUBO A Mathematical Journal*, vol. 20, no. 1, pp. 31-39, 2018.

[12] K. Kuratowski "Topologie I", Monografie Matematyczne tom 3, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1933.

[13] N. Levine, "Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces", *Armer Math. Monthly*, vol. 70, pp. 36-41, 1963.

[14] A. Mashhour, I. Hasanein y S. El-Deeb," α-continuous and α-open mappings", *Acta Math. Hungar.*, vol. 41, no. 3-4, pp. 213-218, 1983.

[15] A. Mashhour, M. Abd El-Monsef y S. El-Deeb, "On precontinuous and weak precontinuous mappings", *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, vol. 53, pp. 47-53, 1982.

[16] T. Noiri y A. Keskin, "On Λ_I-sets and some weak separation axioms", *Int. J. Math. Anal.*, vol. 5, no. 11, pp. 539-548, 2011.

[17] N. Pachon, "The P-Hausdorff, P-regular and P-normal ideal spaces", *Proyecciones Journal of Mathematics*, vol. 39, no. 3, pp. 693-710, 2020.

[18] R. Premkumar y M. Rameshpandi, "New sets in ideal nano topological spaces", *Bulletin on the International Mathematical Virtual Institute*, vol. 10, no. 1, pp. 19-27, 2020.

[19] J. Sanabria, C. Granados, E. Rosas y C. Carpintero, "Contra-continuous functions defined through Λ_I-closed sets", *WSEAS Transactions on Mathematics*, vol. 19, pp. 632-638, 2020.