

Efecto de la concentración de Aluminio sobre la generación del segundo armónico en un punto cuántico de $AsGa/AsGa_{1-x}Al_x$

Effect of the Aluminum Concentration on the Second Harmonic Generation in a Quantum Dot of $AsGa/AsGa_{1-x}Al_x$

A. Montes¹, L. E. Cano² y A. A. Portacio³

Resumen

Se estudia teóricamente el efecto de la concentración de aluminio sobre la generación del segundo armónico (SHG) en un punto cuántico cilíndrico (CQD), usando el formalismo de la matriz densidad y un procedimiento perturbativo. Los niveles de energía y las funciones de onda de un electrón en el CQD se obtuvieron solucionando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en el marco de la aproximación de masa efectiva. Los cálculos numéricos se efectúan para un CQD de $AsGa/AsGa_{1-x}Al_x$. Se encontró que el aumento de la concentración de aluminio produce una disminución de la intensidad de la SHG y un corrimiento al azul en los picos resonantes de la respuesta óptica objeto de estudio.

Palabras clave: Punto cuántico cilíndrico, Generación de segundo armónico.

Abstract

The effect of aluminum concentration on the second harmonic generation (SHG) in a cylindrical quantum dot (CQD) is studied theoretically, using the density matrix formalism and a perturbative procedure. The energy levels and wave functions of an electron in the CQD were obtained by solving the time-independent Schrödinger equation in the framework of the effective mass approximation. Numerical calculations are performed for a CQD of $GaAs/Al_{1-x}Ga_xAs$. It was found that the increase in the aluminum concentration produces a decrease in the intensity of the SHG and a blue shift in the resonant peaks of the optical response of the object of study.

Keywords: Cylindrical quantum dot, Second harmonic generation.

Recepción: 1-Ago-2021

Aceptación: 10-Nov-2021

¹Centro de Ciencias Básicas, Universidad Pontificia Bolivariana, Circular 1 no. 70-01 Campus Laureles, Bloque 11, 4to piso Oficina Ciencias Básicas, Medellín, COLOMBIA. Correo electrónico: alexandermontes250@gmail.com

²Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas, ICEX, Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos, 6627, Belo Horizonte Minas Gerais, Brasil. Correo electrónico: lecanof@gmail.com

³Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad de los Llanos, sede Barcelona, km.12 vía Puerto López Villavicencio, Meta, Colombia. Correo electrónico: aportacio@unillanos.edu.co

1 Introducción

Con el rápido desarrollo de la nanoelectrónica, en las últimas décadas diversos investigadores han realizado estudios relacionados con puntos cuánticos (QD's), los cuales son estructuras semiconductoras con aplicaciones en la industria y la nanotecnología contemporánea. Esto ha motivado el crecimiento de QD's con diferentes formas [1]. Los QD's poseen la característica de tener grandes elementos de matriz de transición entre diferentes niveles cuánticos y un espectro de energía, similar a los sistemas atómicos o moleculares. Por lo tanto, manipular estos sistemas con pequeñas perturbaciones es la clave de muchas aplicaciones, como transistores de células solares, LED, imágenes médicas y computación cuántica [2]. Las propiedades ópticas de los puntos cuánticos en especial la rectificación óptica (OR), la generación del segundo armónico (SHG) y la generación tercer armónico (THG) han sido ampliamente investigadas. El estudio de estas propiedades ópticas es de importancia porque la susceptibilidad óptica de estas nanoestructuras se puede ajustar cambiando su tamaño, su forma o el entorno circundante [3]. Sin embargo, en los QD's, los efectos cuánticos inducidos por el tamaño y la forma alteran los espectros de energía de los portadores de carga y controlan sus propiedades ópticas y electrónicas, así la elección del confinamiento y los factores geométricos son aspectos cruciales para diseñar los dispositivos optoelectrónicos más efectivos [4]. Dentro las propiedades ópticas no lineales de segundo orden, la SHG se considera una de las más importantes y la más estudiada en la actualidad, porque solo se manifiesta en sistemas cuánticos asimétricos, además la generación de segundo armónico es una propiedad óptica no lineal utilizada para generar radiaciones con longitudes de ondas diferentes, en aquellos sistemas en los cuales no se cuentan con una fuente de excitación externa como lo son los láseres [5].

El propósito de este trabajo es estudiar el efecto de la concentración de aluminio sobre la SHG en un punto cuántico cilíndrico de $AsGa/AsGa_{1-x}Al_x$ con potencial de confinamiento asimétrico. El artículo

está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta el modelo matemático que permite obtener las energías y funciones propias del sistema cuántico usando la aproximación masa efectiva. En la Sección 3 se presenta la interpretación de los resultados del modelo teórico en estudio y por último en la sección 4 se presentan las conclusiones de esta investigación.

2 Teoría

2.1 Valores propios de energía y las funciones propias del sistema

El sistema cuántico en estudio consiste de un electrón confinado en un punto cuántico con geometría cilíndrica (ver figura 1). En el marco de la aproximación de masa efectiva el Hamiltoniano del sistema está dado por [6, 7]

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m^*} \hat{P}^2 + V_{conf}(r) \quad (1)$$

Donde m^* es la masa efectiva, \hat{P} es el operador momento, $V_{conf}(r)$ es el potencial de confinamiento asimétrico del CQD.

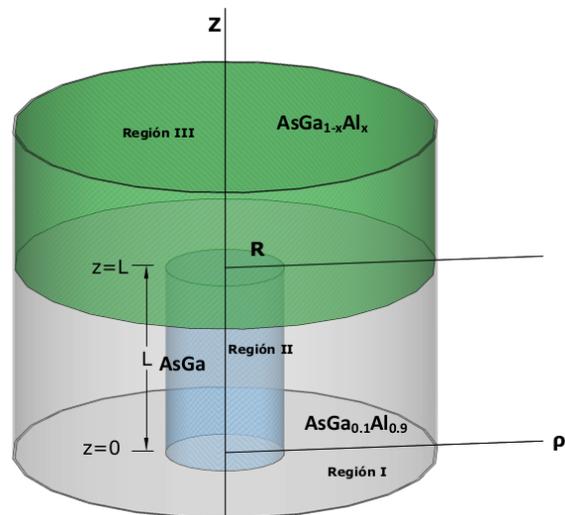


Figura 1. Esquema geométrica del CQD.

En la figura 1, se observa un esquema geométrico del CQD constituido por tres regiones, la región III es la región donde se presenta la variación de la concentración de aluminio, la región II solo está constituida por AsGa y la región I está constituida por $AsGa_{0,1}Al_{0,9}$. Además R es el radio del CQD

con un valor de 5 nm y L es la longitud del cilindro con valor de 20 nm. Éstos valores son arbitrarios. El CQD estudiado está constituido por dos perfiles de potencial confinamiento, uno en el eje ρ y otro en el eje Z , donde el perfil de potencial en ρ se encuentra definido como se muestra en la figura 2.

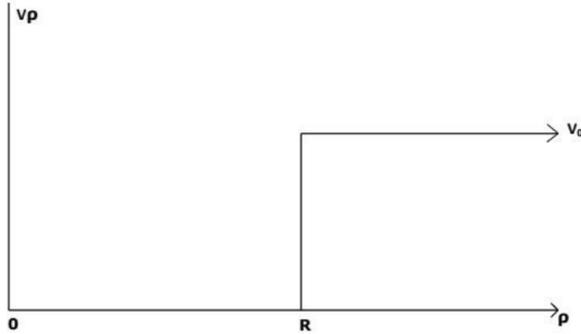


Figura 2. Perfil de potencial de confinamiento en ρ .

De la figura 2 se observa que, para la dirección ρ el valor de la energía potencial en la región II es cero y en la región I, la energía de potencial es V_0 , por lo cual se presenta el siguiente comportamiento;

$$V_\rho(\rho) = \begin{cases} V_0, & \text{si } \rho \geq R, \\ 0, & \text{si } \rho \leq R \end{cases} \quad (2)$$

Donde V_0 se encuentra determinada por $V_0 = (E_g^{AsGa_{1-x}Al_x} - E_g^{AsGa}) \times Q_C$, siendo E_g la energía de la banda prohibida y Q_C es la relación de desplazamiento de banda o factor de corrección de bandas [8]. El perfil de potencial de confinamiento en el eje Z está determinado como se muestra en la figura 3.

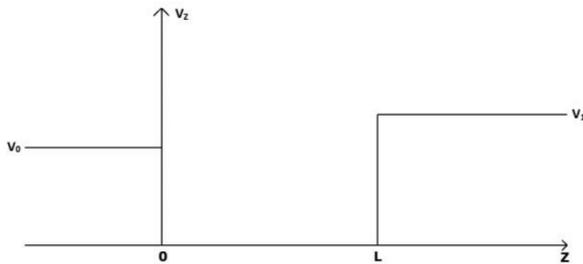


Figura 3. Perfil de energía potencial en el eje Z .

De la figura 3 se observa que la energía potencial dentro del CQD o en la región II es cero, la energía potencial fuera del CQD (región I) toma el valor V_0 y para la región III la energía potencial, debido a

la variación la concentración de aluminio, tomando el valor de V_1 , presentándose la siguiente condición matemática;

$$V_Z(Z) = \begin{cases} V_0, & \text{si } Z < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq Z \leq L \\ V_1, & \text{si } Z > L \end{cases} \quad (3)$$

Donde $V_1 = (E_g^{AsGa_{1-x}Al_x} - E_g^{AsGa}) \times Q_C$. El término $V_{conf}(r)$ de la Ec. (1) es el potencial de confinamiento finito que se encuentra definido por [9]

$$V_{conf}(r) = V(\rho, \phi, Z) = V_\rho(\rho) + V_Z(Z) \quad (4)$$

Las funciones de onda y las energías propias del Hamiltoniano se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H}_0 |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (5)$$

la ecuación (5) se puede reescribir, usando coordenadas cilíndricas, como

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) \Psi(\rho, \phi, Z) \\ &+ V_\rho(\rho) \Psi(\rho, \phi, Z) + V_Z(Z) \Psi(\rho, \phi, Z) = E \Psi(\rho, \phi, Z) \end{aligned} \quad (6)$$

Para resolver Ec. (6) se usa el método de separación de variables, considerando la siguiente función:

$$\Psi(\rho, \phi, Z) = e^{im\phi} f(\rho)g(Z) \quad (7)$$

al reemplazar (7) en (6) y al dividir el resultado por $\Psi(\rho, \phi, Z)$ se obtiene

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{f\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) + V_\rho(\rho) \\ &-\frac{\hbar^2}{2mg} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + V_Z(Z) = E \end{aligned} \quad (8)$$

donde se tiene que una parte de la ecuación depende sólo de ρ y otra parte depende solo de Z . Ahora se plantea que $E = E_\rho + E_Z$ tal que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{f\rho} \frac{df}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} f \right) + V_\rho(\rho)f = E_\rho f \quad (9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2mg} \frac{d^2 g}{dZ^2} + V_Z(Z)g = E_Z Z \quad (10)$$

Al resolver la Ec. (9) cuando $\rho < R$, donde $V_\rho(\rho) = 0$, se obtiene

$$f_1'' + \frac{1}{\rho} f_1' + \left(\frac{2m}{\hbar^2} E_\rho - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_1 = 0 \quad (11)$$

con la sustitución $K_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_\rho$ se obtiene la expresión

$$f_1'' + \frac{1}{\rho} f_1' + \left(K_1^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_1 = 0 \quad (12)$$

La solución, físicamente aceptable de la Ec. (12), está dada por:

$$f_1(\rho) = A J_m(K_1 \rho) \quad (13)$$

siendo $J_m(K_1 \rho)$ la función de Bessel de primera clase.

Al resolver la Ec. (9) cuando $\rho > R$, donde $V_\rho(\rho) = V_0$, entonces queda que:

$$f_2'' + \frac{1}{\rho} f_2' + \left(K_2^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_2 = 0 \quad (14)$$

$$K_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E_\rho - V_0),$$

$$f_2 = B J_m(K_2 \rho) \quad (15)$$

Al aplicar condiciones de frontera a las ecuaciones (13) y (15) se obtiene la siguiente solución que permite obtener la ecuación trascendental para calcular E_ρ :

$$f_1(R) = f_2(R) \quad (16)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{J_m(K_2 R)}{J_m(K_1 R)} \quad (17)$$

$$f_1'(R) = f_2'(R) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{J_m(K_2 R)}{J_m(K_1 R)} \left(K_1 J_{m-1}(K_1 R) - \frac{m}{R} J_m(K_1) \right) \\ = K_2 J_{m-1}(K_2 R) - \frac{m}{R} J_m(K_2 R) \end{aligned} \quad (19)$$

Para $m = 0$ la ecuación (19) se reescribe como:

$$\frac{K_1 J_1(K_1 R)}{J_0(K_1 R)} = K_2 \frac{K_1 J_1(K_2 R)}{J_0(K_2 R)} \quad (20)$$

A continuación, se presenta la solución de la Ec. (10), cabe aclarar que para el eje Z existen tres regiones según el modelo planetado.

Las regiones I y III del CQD se encuentran determinadas por las siguientes soluciones matemáticas:

Para la Región I

$$g_1'' = \frac{2m(V_0 - E_Z)}{\hbar^2} g_1 \quad (21)$$

en el intervalo $-\infty < Z < 0$, la solución físicamente aceptable para la Ec. (21) es

$$g_1(Z) = A e^{k_1 Z} \quad (22)$$

donde

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E_Z)}{\hbar}} \quad (23)$$

Para la Región III:

$$g_3'' - k_2^2 g_3 = 0 \quad (24)$$

en el intervalo $L < Z < \infty$

$$g_3(Z) = B e^{-k_2 Z} \quad (25)$$

con

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_1 - E_Z)}{\hbar}} \quad (26)$$

Para la región II se tiene que:

$$g_2'' + k^2 g = 0 \quad (27)$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{2mE_Z}{\hbar}} \quad (28)$$

La solución de la Ec. (27) está dada por:

$$g_2(Z) = D \sin kZ + E \cos kZ \quad (29)$$

Se debe exigir continuidad para la función y su primera derivada en los puntos de frontera, esto es, en los puntos $Z = 0$ y $Z = L$, haciendo esto quedan las siguientes ecuaciones:

$$g_1(0) = g_2(0) \quad (30)$$

$$A = E \quad (31)$$

$$g_2(L) = g_3(L) \quad (32)$$

$$D \sin kL + E \cos kL = B e^{-k_2 L} \quad (33)$$

$$g'_1(0) = g'_2(0) \quad (34)$$

$$D = \frac{k_1}{k} A \quad (35)$$

$$g'_2(L) = g'_3(L) \quad (36)$$

$$Dk \cos kL - Ek \sin kL = -Bk_2 e^{-k_2 L} \quad (37)$$

Al reescribir las ecuaciones (33) y (37) queda:

$$\frac{k_1}{k} A \sin kL + A \cos kL = B e^{-k_2 L} \quad (38)$$

$$k_1 A \cos kL - A k \sin kL = -Bk_2 e^{-k_2 L} \quad (39)$$

Dividiendo (39) por k_2 , se obtiene,

$$A \left(\frac{k_1}{k_2} \cos kL - \frac{k}{k_2} \sin kL \right) = -B e^{-k_2 L} \quad (40)$$

$$B = A \left(\frac{k}{k_2} \sin kL - \frac{k_1}{k_2} \cos kL \right) \quad (41)$$

Combinando la Ec. (38) y la ec. (41) se obtiene la ecuación trascendental que permite encontrar los valores de energía en el eje Z, esto es:

$$\frac{k \sin kL - k_1 \cos kL}{k \cos kL + k_1 \sin kL} = \frac{k_2}{k} \quad (42)$$

2.2 Generación de segundo armónico

En este apartado se realizará una derivación para la susceptibilidad de SHG, usando el formalismo de la matriz densidad y un procedimiento perturbativo. El sistema cuántico es excitado por un campo electromagnético que en la aproximación de onda larga [10] se escribe por la siguiente ecuación:

$$E(t) = \tilde{E} e^{-i\omega t} + \tilde{E}^* e^{i\omega t} \quad (43)$$

donde ω es la frecuencia de campo externo incidente. Entonces la evolución del operador densidad $\hat{\rho}(t)$ está dada por la siguiente ecuación maestra fenomenológica [10,11-12].

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{V}(t), \hat{\rho}(t)] - \hat{\Gamma}(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}^{(0)}(t)) \quad (44)$$

donde, \hat{H}_0 representa el operador Hamiltoniano del sistema cuántico sin interactuar con el campo óptico, $V(t) = -\hat{\mu} \cdot E(t)$ es el operador Hamiltoniano de interacción entre el campo óptico $E(t)$ y la nano-estructura en la aproximación dipolar, $\hat{\mu}$ es el operador momento dipolar, $\rho^{(0)}(t)$ es el operador densidad del sistema no perturbado, $\hat{\Gamma}$ es el operador fenomenológico responsable de los procesos de relajación y sus elementos matriciales se asocian con los tiempos de relajación de los procesos de emisión espontánea y pérdida de coherencia del sistema. Para resolver la Ec. (55) se utiliza el procedimiento perturbativo estándar, que implica la expansión de $\hat{\rho}(t)$:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_n \hat{\rho}^{(n)}(t) \quad (45)$$

Con la expansión del operador densidad $\hat{\rho}(t)$ se realiza la expansión del valor esperado de la polarización electrónica $\langle P^{(n)}(t) \rangle$ y el resultado se comparó con la expresión de la electrodinámica

clásica para la polarización eléctrica inducida $P(t)$ en el CQD debido a la interacción con el campo óptico, esto es:

$$\langle P^{(n)}(t) \rangle = \frac{1}{V} \text{Tr}[\hat{\rho}^{(n)} \hat{\mu}] \quad (46)$$

$$P(t) = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \tilde{E} e^{-i\omega t} + \chi_0^{(2)} |\tilde{E}|^2 + \chi_{2\omega} \tilde{E}^2 e^{-i2\omega t} \right) + c.c. \quad (47)$$

donde, V es el volumen del punto cuántico, Tr es la traza media o la suma sobre los elementos diagonales de matriz, $\chi^{(1)}$, $\chi_0^{(2)}$, $\chi_{2\omega}^{(2)}$ son la susceptibilidad óptica lineal, la rectificación óptica y generación de segundo armónico respectivamente, ε_0 es la permitividad del vacío y el símbolo *c.c.* significa complejo conjugado del primer término.

Al utilizar el formalismo de la matriz densidad y su procedimiento perturbativo descrito por las Ecs. (45)-(47), la expresión analítica de la susceptibilidad de SHG está dada por [10, 13]:

$$\chi_{2\omega}^{(2)}(\omega) = \frac{\sigma_v \hat{\mu}_{12} \hat{\mu}_{23} \hat{\mu}_{31}}{\varepsilon_0 (E_{21} - \hbar\omega - i\hbar\Gamma_{21})(E_{31} - 2\hbar\omega - i\hbar\Gamma_{31})} \quad (48)$$

donde σ_v es la densidad de electrones en el CQD, $E_{ij} = E_j - E_i$ es la energía de transición del estado ψ_i al estado ψ_j , $\mu_{ij} = |\langle \psi_j | eZ | \psi_i \rangle|$ es el elemento de matriz del momento dipolar eléctrico de transición, $\hbar\omega$ es la energía del fotón incidente y $\Gamma_{21} = 2\Gamma_{31} = \frac{1}{T_1}$ con T_1 el tiempo de relajación del sistema.

3 Resultados y discusiones

En esta sección, se discute cual es el efecto de la concentración de Aluminio sobre la SHG en un punto cuántico de $AsGa/AsGa_{1-x}Al_x$ con geometría cilíndrica. Para la realización de estos cálculos se usaron los siguientes parámetros [8, 13, 14]: $Q_C = 0.7$, E_g es la energía de banda del CQD la cual se encuentra determinado por la expresión, $E_g^{AsGa_{1-x}Al_x} = 1.424 + 1.519x + x(1-x)(0.127 - 1.310x)$, $T_1 = 0.2$ ps, $\sigma_v = 5 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$, y m_0 es la masa efectiva del punto cuántico estudiado y se encuentra determinada por la expresión $m^{AsGa_{1-x}Al_x} = m_0(0,0632 + 0.0856x + 0.0231x^2)$.

A partir de la Ec. (20) se determinó que la energía en el eje ρ es $E_\rho = 62.6103$ meV correspondiente a la región I del punto cuántico.

Como la asimetría se presenta en el eje Z , la energía en esta dirección depende de la concentración de aluminio. En la Tabla 1 se presentan los resultados para las tres energías mas bajas.

Tabla 1. Variación de la Energía en función de la concentración de Al en el eje Z .

Concentración de Al en fracción molar	Barrera de potencial V_1 [meV]	Niveles Energías en Z		
		E_{Z1} [meV]	E_{Z2} [meV]	E_{Z3} [meV]
0.10	106	11.4691	45.0743	96.0103
0.30	280	13.4922	50.1389	111.651
0.50	439	14.9309	51.8929	129.626
0.70	628	16.2925	54.7335	140.761
0.90	891	17.6981	57.4152	152.294

Se observa que a medida que aumenta la concentración de Al en el CQD aumenta la energía en la dirección Z , cumpliéndose la ley Beer-Lambert, la cual establece que la concentración de cualquier sustancia es directamente proporcional a la señal expresada, en este caso en energía en la dirección Z [15].

Para el cálculo de la generación del segundo armónico se determinaron tres niveles de energías correspondiente a un electrón confinado en el CQD, para ello se usó la condición $E = E_\rho + E_Z$ y los resultados presentados anteriormente.

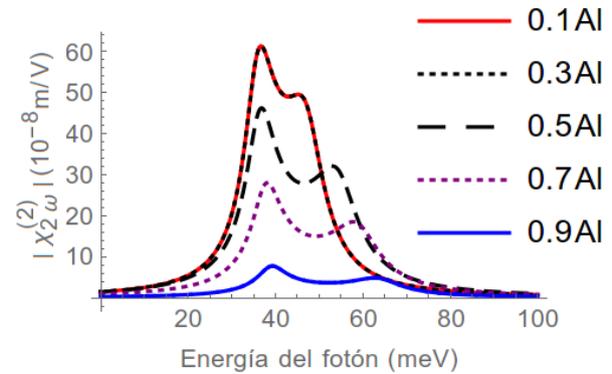


Figura 4. SHG como una función de la energía del fotón incidente para un CQD con $R = 5$ nm y $L = 20$ nm. Con cinco valores diferentes en la concentración de aluminio.

La Figura 4, muestra la SHG $\chi_{2\omega}^{(2)}$ como una función de la energía del fotón incidente para cinco valores de la concentración aluminio. Se observa que los picos de resonancia para susceptibilidad de SHG presentan un leve desplazamiento hacia el azul cuando se aumenta la concentración aluminio, esto se debe al efecto producido en las sub-bandas de energía discutido anteriormente en la tabla 1. También se observa que la intensidad de la respuesta de SHG disminuye con el aumento de la concentración aluminio. La razón física de este comportamiento se debe al valor constante de concentración de aluminio presente en la región I, el cual es $x = 0.9$. Cuando la concentración de aluminio de la región III tiende al valor de la región I, el sistema físico es menos asimétrico, esto hace que la respuesta óptica de segundo orden disminuya debido a que el sistema se convierte en un material centro-simétrico.

4 Conclusiones

En este trabajo, se calcularon las energías y las correspondientes funciones de onda para los estados cuánticos de un electrón confinado en un CQD de $AsGa/AsGa_{1-x}Al_x$ para cinco valores diferentes de concentración de aluminio. También se presenta un estudio completo sobre el efecto de la concentración de aluminio sobre la generación del segundo armónico en este punto cuántico. Se encontró que el aumento de la concentración de aluminio produce una disminución de la intensidad de la SHG y un corrimiento al azul en los picos resonantes de la respuesta óptica objeto de estudio.

De esta manera, se espera que los resultados obtenidos en este trabajo puedan contribuir a la interpretación de los estudios experimentales y proporcionar un nuevo modelo para la aplicación práctica en el campo de la tecnología o las ciencias naturales.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad de los Llanos y a la Universidad Pontificia Bolivariana por el apoyo brindado para la realización de este trabajo de investigación.

Referencias

- [1] M. Solaimani, "Binding energy and diamagnetic susceptibility of donor impurities in quantum dots with different geometries and potentials", *Materials Science and Engineering: B*, vol. 26268, no. 12, pp. 114694, 2020.
- [2] V.V. Nautiyal, P. Silotia, "Second harmonic generation in a disk shaped quantum dot in the presence of spin-orbit interaction", *Physics Letters a*, vol. 382, no. 31, pp. 2061-2068, 2018.
- [3] S. Evangelou, "Tailoring second-order nonlinear optical effects in coupled quantum dot-metallic nanosphere structures using the Purcell effect", *Microelectronic Engineering*, vol. 215, pp. 111019, 2019.
- [4] M. Kria, Varsha, M. Farkous, V. Prasad, F. Dujardin, L.M. Pérez, D. Laroze y E. Feddi, "Wetting layer and size effects on the nonlinear optical properties of semi oblate and prolate $Si_{0.7}Ge_{0.3}/Si$ quantum dots", *Current applied Physics*, vol. 25, pp. 1-11, 2021.
- [5] D. Makhlof, M. Choubani, F. Saidi y H. Maaref, "Modeling of the second harmonic generation in a lens-shaped InAs/GaAs quantum core/shell dot under temperature, pressure and applied electric field effects", *Physica E*, vol. 16, pp. 102961, 2020.
- [6] P. Villamil, "Donor in cylindrical quantum well wire under the action of an applied magnetic field", *Results in Physics*, vol. 42, no. 9, pp. 2436-2440, 2010.
- [7] L. Guanghui, G. Kang-Xian y W. Chao, "Linear and nonlinear intersubband optical absorption in a disk-shaped quantum dot with a parabolic potential plus an inverse squared potential in a static magnetic field", *Physica B: Condensed Matter*, vol. 407, no. 6, pp. 2334-2339, 2012.
- [8] Gh. Safarpour, M. Novzari, M.a. Izadi y S. Yazdanpanahi, "The linear and nonlinear optical properties of an off-center hydrogenic

- donor impurity in nanowire superlattices: Comparison between arrays of spherical and cylindrical quantum dots”, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 66, pp. 148-156, 2015.
- [9] A. Portacio, B. Rodríguez, P. Villamil, “Influence of the position of a donor impurity on the second-order nonlinear optical susceptibility in a cylindrical quantum dot”, *Superlattices and Microstructures*, vol. 113, pp. 550-557, 2018.
- [10] M. Gambhir, M. Kumar, P.K. Jha y M. Mohan, “Linear and nonlinear optical absorption coefficients and refractive index changes associated with intersubband transitions in a quantum disk with flat cylindrical geometry”, *Journal of Luminescence*, vol. 143, pp. 361-367, 2013.
- [11] B. Vaseghi, M. Sadri, G. Rezaei y a. Gharaati, “Optical rectification and third harmonic generation of spherical quantum dots: Controlling via external factors”, *Physica B*, vol. 457, pp. 212-217, 2015.
- [12] Z. Zhang, K. Guo, B. Chen, R. Wang y M. Kang, “Nonlinear optical rectification in cubical quantum dots”, *Physica B*, vol. 404, pp. 2332-2335, 2009.
- [13] E. Kasapoglu, C. Duque, M. Mora-Ramos y I. Sökmen, “The effects of the intense laser field on the nonlinear optical properties of a cylindrical $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}/\text{GaAs}$ quantum dot under applied electric field”, *Physica B*, vol. 474, pp. 15-20, 2015.
- [14] K. Guo, G. Liu, L. Huang, X. Zheng, “Linear and nonlinear optical absorption coefficients of spherical dome shells”, *Optical Materials*, vol. 46, pp. 361-365, 2015.
- [15] R. Nikzad-Langerodi, W. Zellinger, S. Saminger-Platz y B. Moser, “Domain adaptation for regression under Beer-Lambert’s law”, *Knowledge-Based Systems*, vol. 210, pp. 106447, 2020.