Vol. 13 (núm. 2) pp. 41-47
Julio-Diciembre 2022
https://doi.org/10.19053/01217488.v13.n2.2022.14065

Teoremas de aproximación de sumabilidad de variables aleatorias triples

Summability Approximation Theorems of Triple Random Variables

Carlos Granados[1]

Resumen

El objetivo de este artículo, es extender las nociones presentadas por Chow, Teicher, Savas y Patterson a una mayor dimensión. Para obtener estos resultados, se consideran variables aleatorias multidimensionales totalmente monótonas e independientes idénticamente. Usando estos conceptos, se muestra una serie de teoremas de aproximación.

***Palabras clave*:** Variables aleatorias, Sumabilidad, Límite Pringsheim.

Abstract

The purpose of this article is to extend Chow, Teicher, Savas and Patterson results to higher dimension. To obtain this we consider multidimensional totally monotonic and independent identically random variables. Using these concepts we show a series of approximation type theorems.

***Keywords*:** Random variables, Summability, Pringsheim limit.

Recepción: 6-mar-2022
Aceptación: 20-abr-2022

[1]Estudiante de Doctorado en Matemáticas, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: carlosgranadosortiz@outlook.es

1 Introducción y nociones preliminares

Las nociones de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{Y_q, q \geqq 1\}$ con primer momento finito y métodos de sumabilidad aplicables a la secuencia de divergencia $\{Y_q\}$ y una serie de Los teoremas de aproximación unidimensional fueron presentados por Chow y Teicher [3] en 1971. Luego, en 2021, Savas y Patterson [8] estudiaron estas nociones en variables aleatorias bidimensionales y mostraron algunos resultados interesantes. En este artículo, examinaremos variables aleatorias tridimensionales. Mediante el uso de estas variables demostramos que ninguna elección de $\{b_{q,w,e}\}$ y $\{D_{q,w,e}\}$ hará que $\{Y_{q,w,e}\}$ sean independientes e idénticamente distribuidas con (masa 2^{-q-w-e} en el punto 2^{q+w+e}, $q,w,e \geqq 1$) para ser la distribución de Cauchy $b_{q,w,e}$-sumable. Para ello, comenzamos presentando las nociones de convergencia y divergencia de sucesiones triples en el sentio de Pringsheim.

Definición 1 ([7]). Una triple sucesión $y = \{y_{q,w,e}\}$ tiene límit Pringsheim L denotado por P-$\lim y = L$ dado un $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|y_{q,w,e} - L| <|$ par cualquier $q,w,e > M$. Desribiremos y como P-convergent, y será denotado por $y_{q,w,e} \xrightarrow{P} L$.

Definición 2 ([6]). Sea $y = \{y_{q,w,e}\}$ una sucesión triple de números reales y para cada m, $\alpha_m = \sup_m\{y_{q,w,e} : q,w,e \geq m\}$. El límite superior de Pringsheim y es definido de la siguiente manera:

1. If $\alpha_m = +\infty$ para cada m, entonces P-$\limsup y = +\infty$,
2. if $\alpha_m < \infty$ para algún m, entonces P-$\limsup y = \inf_m\{\alpha_m\}$.

De igual manera, sea $\beta_m = \inf_m\{y_{q,w,e} : q,w,e \geq m\}$. El límite inferior Pringsheim de y está definido de la siguiente manera:

1. Si $\beta_m = -\infty$ para cada m, entonces P-$\lim y = -\infty$,
2. Si $\beta_m > \infty$ para algún m, entonces P-$\lim y = \sup_m\{\beta_m\}$.

Lema 1 ([2]). *Si $\{B_m\}$ es una sucesión de eventos y $\sum_{m=1}^{\infty} P(B_m) < \infty$ entonces $P(\{B_m\ i.o\}) = 0$.*

Observación 1. Sea $\{Y_{q,w,e}, q,w,e \geq 1\}$ una sucesión triple factorizable independiente e idénticamente distribuida de variables aleatorias con $E|Y_{q,w,e}| < \infty$, y denotemos $Y_{q,w,e}$ como $\bar{Y}_q \cdot \hat{Y}_w \cdot \underline{Y}_e$.

Definición 3. Se considerará una subclase de métodos de sumabilidad regulares y la preocupación se centrará en la convergencia casi segura (a.s) P a cero de la sucesión triple transformada

$$T_{q,w,e} = B_{q,w,e}^{-1} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{w} \sum_{k=1}^{e} b_{i,j,k} Y_{q,w,e} \tag{1}$$

donde

$$b_{i,j,k} \geqq 0,\ B_{q,w,e} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{w} \sum_{k=1}^{e} b_{i,j,k} \xrightarrow{P} \infty \tag{2}$$

asegurando así la regularidad.

Observación 2. Si $T_{q,w,e} - D_{q,w,e} \xrightarrow{a.c} 0$ en el sentido de Pringsheim para $D_{q,w,e}$, las variables aleatoria idependientes e idénticamente distribuidas $\{Y_{q,w,e}\}$ se llamarán $b_{q,w,e}$-sumable con probabilidad uno o simplemente $b_{q,w,e}$-sumable.

Definición 4. Si $Y_{q,w,e}^* = Y_{q,w,e} - Y_{q,w,e}', q,w,e \geqq 1$ son simétricas $Y_{q,w,e}$, i.e. $\{X_{q,w,e}' = \bar{Y}_q' \cdot \hat{Y}_w' \cdot \underline{Y}_e'\}$ es idénticamente distribuida, y es independiente de $\{Y_{q,w,e}\}$ con la misma distribución, entonces $b_{q,w,e}$-sumabilidad de $\{Y_{q,w,e}\}$ implica $b_{q,w,e}$-sumabilidad de $\{Y_{q,w,e}'\}$ con desapración de centro i.e.,

$$T_{q,w,e}^* = B_{q,w,e}^{-1} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{w} \sum_{k=1}^{e} b_{i,j,k} Y_{q,w,e}^* \ is\ Pringsheim\ null. \tag{3}$$

Observación 3. Se puede demostrar que ninguna elección de $\{b_{q,w,e}\}$ y $\{D_{q,w,e}\}$ hará que las variables aleatorias independientes distribuidas de forma idéntica $\{Y_{q,w,e}\}$ con masa 2^{-q-w-e} en el punto 2^{q+w+e}, $q,w,e \geqq 1$ para ser la distribución de Cauchy $b_{q,w,e}$-sumable.

2 Resultados

La idea principal de esta sección es presentar una comparación entre $b_{q,w,e}$-sumable y $b_{q,w,e}'$-sumable. Si $b_{q,w,e}$ y $b_{q,w,e}'$ son estrictamente positivos y

$$\frac{b'_{q+1,w,e}}{b'_{q,w,e}} \leqq \frac{b_{q+1,w,e}}{b_{q,w,e}}, \frac{b'_{q,w+1,e}}{b'_{q,w,e}} \leqq \frac{b_{q,w+1,e}}{b_{q,w,e}},$$
$$\frac{b'_{q,w,e+1}}{b'_{q,w,e}} \leqq \frac{b_{q,w,e+1}}{b_{q,w,e}} \text{ y } \frac{b'_{q+1,w+1,e+1}}{b'_{q,w,e}} \leqq \frac{b_{q+1,w+1,e+1}}{b_{q,w,e}},$$

entonces $b_{q,w,e}$-sumabilidad implica $b'_{q,w,e}$-sumabilidad. Si $\{Y^*_{q,w,e}, q, w, e \geqq 1\}$ es independiente e indenticamente distribuida y $b_{q,w,e}$-sumable con $D^*_{q,w,e}$, entonces necesariamente

$$P - \lim_{q,w,e\to\infty} \frac{B_{q+1,w+1,e+1}}{B_{q,w,e}} = 1. \tag{4}$$

Si $\frac{B_{q_n,w_m,e_u}}{B_{q_n-1,w_m-1,e_u-1}} > 1+\delta > 1$ para alguna triple sub-sucesión $q_n, w_m, e_u, m, n, u \geqq 1$ de enteros positivos. Entonces, por (3) se tiene que

$$Y^*_{q_m,w_ne_u} = \frac{B_{q_n,w_m,e_u}}{b_{q_n,w_m,e_u}}(T_{q_n,w_m,e_u} - T^*_{q_n-1,w_m-1,e_u-1}) +$$
$$T^*_{q_n,w_m,e_u} \xrightarrow{a.c} 0 \text{en el sentido de Pringsheim,} \tag{5}$$

dado que $\frac{B_{q_n,w_m,e_u}}{b_{q_n,w_m,e_u}} < \frac{1}{\delta}$. No osbtante, una triple sucesión no degenerada e indenticamente distribuida de variables aleatorias no puede P-converger a.c a una constante finita, así, (2) se sigue.

Teorema 1. *Sea $\{Y_{q,w,e}\}$ una viarable aleatoria independiente e identicamente distribuida con la distribución de Cauchy,*

$$\liminf_{\bar{y}\to\infty} \bar{y} P\{|\bar{Y}_1| > \bar{y}\} > 0,$$

$$\liminf_{\hat{y}\to\infty} \hat{y} P\{|\hat{Y}_1| > \hat{y}\} > 0$$

and

$$\liminf_{\underline{y}\to\infty} \underline{y} P\{|\underline{Y_1}| > \underline{y}\} > 0$$

no se $b_{q,w,e}$-sumable para cualquier $\{b_{q,w,e}\}$ que satisface (4).

Proof. Si $\{Y_{q,w,e}\}$ es $b_{q,w,e}$-sumable, la simetría de la triple sucesión $\{Y^*_{q,w,e}\}$ es $b_{q,w,e}$-sumable con constantes de centrado que desaparecen, por lo tanto, por (4) se tiene P-lim $\frac{B_{q,w,e}}{b_{q,w,e}} = \infty$. Tomando $\bar{y} > 0, \hat{y} > 0$ y $\underline{y} > 0$ tal que $P\{|\bar{Y}_1| < \bar{y}\} \geqq \frac{1}{2}$, $P\{|\hat{Y}_1| < \hat{y}\} \geqq \frac{1}{2}$ y $P\{|\underline{Y}_1| < \underline{y}\} \geqq \frac{1}{2}$ implica

$$P\{|\bar{Y}^*_q| > \bar{y}\} = P\{|\bar{Y}_q - \bar{Y}'_q| > \bar{y}\} \geqq P\{|\bar{Y}_q| > 2\bar{y},$$
$$|\bar{Y}'_q| < \bar{y}\} \geqq \frac{1}{2} P\{|\bar{Y}_1| > 2\bar{y}\},$$
$$P\{|\hat{Y}^*_w| > \hat{y}\} = P\{|\hat{Y}_w - \hat{Y}'_w| > \hat{y}\} \geqq P\{|\hat{Y}_w| > 2\hat{y},$$
$$|\hat{Y}'_w| < \hat{y}\} \geqq \frac{1}{2} P\{|\hat{Y}_1| > 2\hat{y}\}$$

y

$$P\{|\underline{Y}^*_e| > \underline{y}\} = P\{|\underline{Y}_e - \underline{Y}'_e| > \underline{y}\} \geqq P\{|\underline{Y}_e| > 2\underline{y},$$
$$|\underline{Y}'_e| < \underline{y}\} \geqq \frac{1}{2} P\{|\underline{Y}_1| > 2\underline{y}\}$$

Por lo tanto, existen constantes positivas d_1, d_2, d_3, x_0, y_0 y z_0 con $P\{|\bar{Y}^*_q| > \bar{y}\} \geqq \frac{d_1}{y}$ para $\bar{y} \geqq x_0$, $P\{|\hat{Y}^*_w| > \hat{y}\} \geqq \frac{d_2}{y}$ para $\hat{y} \geqq y_0$ y $P\{|\underline{Y}^*_e| > \underline{y}\} \geqq \frac{d_3}{y}$ para $\underline{y} \geqq z_0$. Consecuentemente, si q_0, w_0 y e_0 son enteros positivos tal que $\frac{B_q}{b_q} \geqq x_0$, $\frac{B_w}{b_w} \geqq y_0$ y $\frac{B_e}{b_e} \geqq z_0$ para $q \geqq q_0, w \geqq w_0$ y $e \geqq e_0$,

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty} P\{|\bar{Y}^*_q| > \frac{B_q}{b_q}\} \geqq d_1 \sum_{q=q_0}^{\infty}\sum_{w=w_0}^{\infty}\sum_{e=e_0}^{\infty} \frac{b_q}{B_q} = \infty \tag{6}$$

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty} P\{|\hat{Y}^*_w| > \frac{B_w}{b_w}\} \geqq d_2 \sum_{q=q_0}^{\infty}\sum_{w=w_0}^{\infty}\sum_{e=e_0}^{\infty} \frac{b_w}{B_w} = \infty \tag{7}$$

y

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty} P\{|\underline{Y}^*_e| > \frac{B_e}{b_e}\} \geqq d_3 \sum_{q=q_0}^{\infty}\sum_{w=w_0}^{\infty}\sum_{e=e_0}^{\infty} \frac{b_e}{B_e} = \infty \tag{8}$$

por la propiedad factorable de $\{b_{q,w,e}\}$ y el teorema de Abel-Dini. Combinando (3) y (4), se tiene $(\frac{b_q}{B_q})\bar{Y}^*_q \xrightarrow{a.c} 0$, y $(\frac{b_w}{B_w})\hat{Y}^*_w \xrightarrow{a.c} 0$, $(\frac{b_e}{B_e})\underline{Y}^*_e \xrightarrow{a.c} 0$ el cual es incompatible con las ecuaciones (6), (7) y (8) por el lema de Borel-Cantelli. □

Definición 5. Una triple sucesión $\{b_{q,w,e}\}$ es totalmente creciente dado $b_{q,w,e} < b_{q+1,w,e}$, $b_{q,w,e} < b_{q,w+1,e}$, $b_{q,w,e} < b_{q,w,e+1}$ y $b_{q,w,e} < b_{q+1,w+1,e+1}$. De igual manera, se puede definir para sucesiones decrecientes.

Teorema 2. *Si* $b(x,y,z)=b(x)b(y)b(z),x,y,z>0$ *es positiva y totalmente decreciente y* $b_{q,w,e}=b_qb_wb_e=b(q)\cdot b(w)\cdot b(e)$, $B_{q,w,e}=\sum_{m=1}^{q}\sum_{n=1}^{w}\sum_{u=1}^{e}b_{m,n,u}$ *y* $c_{q,w,e}=\dfrac{B_{q,w,e}}{b_{q,w,e}}$ *donde*

$$P-\lim B_{q,w,e}=\infty \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&0<P-\liminf_{q,w,e\to\infty}\frac{c_{q,w,e}}{qwe}b(\log c_q,\log c_w,\log c_e)\\&\leqq P-\limsup_{q,w,e\to\infty}\frac{c_{q,w,e}}{qwe}b(\log c_q,\log c_w,\log c_e)\\&<\infty\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&xyz(\log^{+}x,\log^{+}y,\log^{+}z)\\&\ es\ totalmente\ decreciente\ para\ x,y,z>0\end{aligned} \tag{11}$$

entonces. las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{Y_{q,w,e}\}$ *son* $b_{q,w,e}$*-sumable si y solo si*

$$E|Y_{q,w,e}|b(\log^{+}|\bar{Y}_q|,\log^{+}|\hat{Y}_w|,\log^{+}|\underline{Y}_e|)<\infty. \tag{12}$$

Proof. $\Rightarrow$: Dado que $0<b(x,y,z)$ es totalmente no decreciente, y $c_{q,w,e}$ es totalmente no decreciente a ∞. Tomando m_0,n_0 y r_0 tal que $q\geq n_0,w\geqq m_0$ y $e\geqq r_0$, implica que

$$\alpha qwe\leqq c_{q,w,e}b(\log c_q,\log c_w,\log c_e)\leqq\beta qwe. \tag{13}$$

Por lo tanto,

$$c_{q,w,e}\geqq\alpha qwe[b(\log c_n,\log c_m,\log c_r)]^{-1}$$

para $q\geqq n\geqq b_0,w\geqq m\geqq m_0$ y $e\geqq r\geqq r_0$, y

$$\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}c_{i,j,k}^{-3}\leqq\frac{b^3(\log c_n,\log c_m,\log c_r)}{\alpha^3 mnr}, \tag{14}$$

$n\geqq n_0$, $m\geqq m_0$ y $r\geqq r_0$.

Consecuentemente, tenemos que

$$Z_{i,j,k}=Y_{i,j,k}I_{[|\bar{Y}_i|<c_i,|\hat{Y}_j|<c_j\ or\ |\underline{Y}_k|<c_k]},i,j,k\geqq 1 \tag{15}$$

Combinando (13) y (14), y para $n\geqq n_0,m\geqq m_0$ y $r\geqq r_0$, tenemos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{EZ_{i,j,k}^3}{c_{i,j,k}}\\
&=\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty}c_{i,j,k}^{-3}\Bigg[\Bigg(\int_{[|\bar{Y}_1|\leq c_{n-1}]}\bar{Y}_1^3+\int_{[|\hat{Y}_1|\leq c_{m-1}]}\hat{Y}_1^3\\
&+\int_{[|\underline{Y}_1|\leq c_{r-1}]}\underline{Y}_1^3\Bigg)+\sum_{u=n}^{i}\sum_{o=m}^{j}\sum_{p=r}^{k}\Bigg(\int_{[c_{u-1}\leq|\bar{Y}_1|<c_u]}\bar{Y}_1^3\\
&+\int_{[c_{o-1}\leq|\hat{Y}_1|<c_o]}\hat{Y}_1^3+\int_{[c_{p-1}\leq|\underline{Y}_1|<c_p]}\underline{Y}_1^3\Bigg)\Bigg]\\
&\leqq O(1)+\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}\sum_{i=u}^{\infty}\sum_{j=o}^{\infty}\sum_{k=p}^{\infty}c_{i,j,k}^{-3}(\int_{[c_{u-1}\leq|\bar{Y}_1|<c_u]}\bar{Y}_1^3\\
&+\int_{[c_{o-1}\leq|\hat{Y}_1|<c_o]}\hat{Y}_1^3+\int_{[c_{p-1}\leq|\underline{Y}_1|<c_p]}\underline{Y}_1^3)\\
&\leqq O(1)+\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}u^{-1}o^{-1}p^{-1}b^3(\log c_u,\log c_o,\log c_p)\\
&\int_{[c_{u-1}\leq|\bar{Y}_1|\leq c_u]}\bar{Y}_1^3\\
&+O(1)+\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}u^{-1}o^{-1}p^{-1}b^3(\log c_u,\log c_o,\log c_p)\\
&\int_{[c_{o-1}\leq|\hat{Y}_1|\leq c_o]}\hat{Y}_1^3\\
&+O(1)+\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}u^{-1}o^{-1}p^{-1}b^3(\log c_u,\log c_o,\log c_p)\\
&\int_{[c_{p-1}\leq|\underline{Y}_1|\leq c_p]}\underline{Y}_1^3\\
&\leqq O(1)+\beta\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}b(\log c_u,\log c_o,\log c_p)\\
&\int_{[c_{u-1}\leq|\bar{Y}_1|\leq c_u]}\bar{Y}_1^3\\
&+O(1)\beta\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}b(\log c_u,\log c_o,\log c_p)\\
&\int_{[c_{o-1}\leq|\hat{Y}_1|\leq c_o]}\hat{Y}_1^3\\
&+O(1)\beta\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}b(\log c_u,\log c_o,\log c_p)\\
&\int_{[c_{p-1}\leq|\underline{Y}_1|\leq c_p]}\underline{Y}_1^3\leqq O(1)+\beta\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}\\
&\left(\int_{[c_{u-1}\leqq|\bar{Y}_1|<c_u]}\bar{Y}_1 b(\log|\bar{Y}_1|,\log|\hat{Y}_1|,\log|\underline{Y}_1|)\right)\\
&+O(1)+\beta\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}\\
&\left(\int_{[c_{o-1}\leqq|\hat{Y}_1|<c_o]}\hat{Y}_1 b(\log|\bar{Y}_1|,\log|\hat{Y}_1|,\log|\underline{Y}_1|)\right)\\
&+O(1)+\beta\alpha^{-3}\sum_{u=n}^{\infty}\sum_{o=m}^{\infty}\sum_{p=r}^{\infty}\\
&\left(\int_{[c_{p-1}\leqq|\underline{Y}_1|<c_p]}\underline{Y}_1 b(\log|\bar{Y}_1|,\log|\hat{Y}_1|,\log|\underline{Y}_1|)\right)<\infty,\end{aligned}$$

por (12). Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,j,k}^{-1}(Z_{i,j,k} - E(Z_{i,j,k}))$ P-convergente casi seguramente, y así, por el Lema de Kronecker, se tiene que

$$B_{q,w,e}^{-1}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{w}\sum_{k=1}^{e} b_{i,j,k}(Z_{i,j,k} - E(Z_{i,j,k})) \xrightarrow{a.c} 0 \textit{ in Prinsheim sense} \tag{16}$$

por (11) y (13), para $n \geqq n_0, m \geqq m_0$ y $r \geqq r_0$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\bar{Y}_q| \geqq c_{q,w,e}\}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\bar{Y}_q|b(\log|\bar{Y}_q|, \log|\hat{Y}_w|, \log|\underline{Y}_e|)$$
$$\geqq c_{q,w,e}b(\log c_q, \log c_w, \log c_e)\}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\bar{Y}_1|b(\log|\bar{Y}_1|, \log|\hat{Y}_1|, \log|\underline{Y}_1|)$$
$$\geqq \alpha qwe\} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\hat{Y}_w|$$
$$\geqq c_{q,w,e}\}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\hat{Y}_w|b(\log|\bar{Y}_q|, \log|\hat{Y}_w|, \log|\underline{Y}_e|)$$
$$\geqq c_{q,w,e}b(\log c_q, \log c_w, \log c_e)\}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\hat{Y}_1|b(\log|\bar{Y}_1|, \log|\hat{Y}_1|, \log|\underline{Y}_1|)$$
$$\geqq \alpha qwe\} < \infty$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\underline{Y}_e|$$
$$\geqq c_{q,w,e}\}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\underline{Y}_e|b(\log|\bar{Y}_q|, \log|\hat{Y}_w|, \log|\underline{Y}_e|)$$
$$\geqq c_{q,w,e}b(\log c_q, \log c_w, \log c_e)\}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\underline{Y}_1|b(\log|\bar{Y}_1|, \log|\hat{Y}_1|, \log|\underline{Y}_1|)$$
$$\geqq \alpha qwe\} < \infty.$$

Por lo tanto, por el lemma de Borel-Cantelli y dado que las variables aleatorias son factorables,

$$P\{\bar{Y}_q \neq Z_{q,w,e},\ i.o.\} = 0,\ P\{\hat{Y}_w \neq Z_{q,w,e},\ i.o.\} = 0 \textit{ and } P\{\underline{Y}_e \neq Z_{q,w,e},\ i.o.\} = 0. \tag{17}$$

Combinando (16) y (17) $\{Y_{q,w,e}\}$ es $b_{q,w,e}$-sumable coh centro constante

$$D_{q,w,e} = B_{q,w,e}^{-1}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{w}\sum_{k=1}^{e} b_{i,j,k}E(Z_{i,j,k}).$$

$\Leftarrow$: Si $\{Y_{q,w,e}\}$ es $b_{q,w,e}$sumable, entonces $c_{q,w,e}^{-1}\bar{Y}_q^* = (\frac{b_q}{B_q} \xrightarrow{a.c} 0, c_{q,w,e}^{-1}\hat{Y}_w^* = (\frac{b_w}{B_w} \xrightarrow{a.c} 0$ y $c_{q,w,e}^{-1}\underline{Y}_e^* = (\frac{b_e}{B_e} \xrightarrow{a.c} 0$ en el sentido Pringsheim por el lema de Borel-Cantelli, $\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty} P\{|\bar{Y}_q^*| > c_{q,w,e}\} < \infty$, $\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty} P\{|\hat{Y}_w^*| > c_{q,w,e}\} < \infty$ y $\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{w=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty} P\{|\underline{Y}_e^*| > c_{q,w,e}\} < \infty$ por (11) y (13) para $q > n \geqq n_0, w > m > \geqq m_0$ y $e > r \geqq r_0$, se tiene que

$$\sum_{i=n}^{q}\sum_{j=m}^{w}\sum_{k=r}^{e}\int_{[c_{i-1}<|\bar{Y}_1^*|\leqq b_i],[c_{j-1}<|\hat{Y}_1^*|\leqq b_j] \ or \ [c_{k-1}<|\underline{Y}_1^*|\leqq b_k]}$$
$$|\bar{Y}_1^*||\hat{Y}_1^*||\underline{Y}_1^*|b(\log^+|\bar{Y}_1^*|, \log^+|\hat{Y}_1^*|, \log^+|\underline{Y}_1^*|)$$
$$\leqq \beta\sum_{i=n}^{q}\sum_{j=m}^{w}\sum_{k=r}^{e} c_{i,j,k}b(\log c_i, \log c_j, \log c_k)P\{c_{i-1}$$
$$< |\bar{Y}_1^* \leqq c_i\} + c_{i,j,k}b(\log c_i, \log c_j, \log c_k)P\{c_{j-1}$$
$$< |\hat{Y}_1^* \leqq c_j\} + c_{i,j,k}b(\log c_i, \log c_j, \log c_k)P\{c_{k-1}$$
$$< |\underline{Y}_1^* \leqq c_k\} \leqq \beta\sum_{i=n}^{q}\sum_{j=m}^{w}\sum_{k=r}^{e} iP\{c_{i-1} < |\bar{Y}_1^*| > c_i\}$$
$$+ jP\{c_{j-1} < |\hat{Y}_1^*| > c_j\} + kP\{c_{k-1} < |\underline{Y}_1^*| > c_k\}$$
$$= \beta[\sum_{i=n}^{q\bar{1}}\sum_{j=m}^{w\bar{1}}\sum_{k=r}^{e\bar{1}} P$$

$$\{|\bar{Y}_1^*| > c_{i,j,k}\} + [qP\{|\bar{Y}_1^*| > c_{n-1}\} - qP\{\bar{Y}_1^* > c_q\}]]$$
$$+ \beta[\sum_{i=n}^{q\bar{1}}\sum_{j=m}^{w\bar{1}}\sum_{k=r}^{e\bar{1}} P\{|\hat{Y}_1^*| > c_{i,j,k}\}$$
$$+ [wP\{|\hat{Y}_1^*| > c_{m-1}\} - wP\{\hat{Y}_1^* > c_w\}]]$$
$$+ \beta[\sum_{i=n}^{q\bar{1}}\sum_{j=m}^{w\bar{1}}\sum_{k=r}^{e\bar{1}} P\{|\underline{Y}_1^*| > c_{i,j,k}\}$$
$$+ [eP\{|\underline{Y}_1^*| > c_{r-1}\} - eP\{\underline{Y}_1^* > c_e\}]]$$
$$\leqq O(1) + \beta\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=r}^{\infty} P\{|\bar{Y}_1^*|$$
$$> c_{i,j,k}\} + P\{|\hat{Y}_1^*| > c_{i,j,k}\} + P\{|\underline{Y}_1^*| > c_{i,j,k}\} < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\infty > E|\bar{Y}_1^*|b(\log|\bar{Y}_1^*|,\log|\hat{Y}_1^*|,\log|\underline{Y}_1^*|)\\
&+E|\hat{Y}_1^*|b(\log|\bar{Y}_1^*|,\log|\hat{Y}_1^*|,\log|\underline{Y}_1^*|)\\
&+E|\underline{Y}_1^*|b(\log|\bar{Y}_1^*|,\log|\hat{Y}_1^*|,\log|\underline{Y}_1^*|)\\
&\geqq \int_{[|\bar{Y}_1'|<\bar{D}_2]}(|\bar{Y}_1|-\bar{D}_2)b(\log(|\bar{Y}_q|\\
&+\bar{D}_2),\log(|\hat{Y}_w|+\bar{D}_2),\log(|\underline{Y}_e|+\bar{D}_2))+\int_{[|\hat{Y}_1'|<\hat{D}_2]}\\
&(|\hat{Y}_1|-\hat{D}_2)b(\log(|\bar{Y}_q|\\
&+\hat{D}_2),\log(|\hat{Y}_w|+\hat{D}_2),\log(|\underline{Y}_e|+\hat{D}_2))\\
&+\int_{[|\underline{Y}_1'|<\underline{D}_2]}(|\underline{Y}_1|-\underline{D}_2)b(\log(|\bar{Y}_q|+\underline{D}_2),\\
&\log(|\hat{Y}_w|+\underline{D}_2),\log(|\underline{Y}_e|+\underline{D}_2))\\
&=P\{|\bar{Y}_1'|<\bar{D}_2\}E[|\bar{Y}_1'|-\bar{D}_2]\\
&b(\log(|\bar{Y}_1|+\bar{D}_2),\log(|\hat{Y}_1|+\bar{D}_2),\log(|\underline{Y}_1|+\bar{D}_2))\\
&+P\{|\hat{Y}_1'|<\hat{D}_2\}E[|\hat{Y}_1'|-\hat{D}_2]b(\log(|\bar{Y}_1|\\
&+\hat{D}_2),\log(|\hat{Y}_1|+\hat{D}_2),\log(|\underline{Y}_1|\\
&+\hat{D}_2))+P\{|\underline{Y}_1'|\\
&<\underline{D}_2\}E[|\underline{Y}_1'|-\underline{D}_2]b(\log(|\bar{Y}_1|+\underline{D}_2),\log(|\hat{Y}_1|\\
&+\underline{D}_2),\log(|\underline{Y}_1|+\underline{D}_2))
\end{aligned}$$

lo cual implica (12). □

Los siguientes dos colorarios son consecuencia directa de los teoremas anteriores, por lo tanto sus demostraciones son omitidas.

Corolario 1. *Si $\{Y_{q,w,e}\}$ es factorable con componentes $\bar{Y}_q,\hat{Y}_w$ y $\underline{Y}_e$ $q,w,e\geqq 1$ son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidos, entonces*

$$(\log q)^{-1}(\log w)^{-1}(\log e)^{-1}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{w}\sum_{k=1}^{e}\frac{Y_{i,j,k}}{ijk}-D_{q,w,e}\xrightarrow{a.c}0 \text{ en el sentido Pringsheim,}$$

si y solo si,

$$E|Y_{q,w,e}|b(\log^+|\bar{Y}_q|,\log^+|\hat{Y}_w|,\log^+|\underline{Y}_e|)I_{[|\bar{Y}_q|>\varepsilon,|\hat{Y}_w|>\varepsilon \text{ or } |\underline{Y}_e|>\varepsilon]}.$$

Además $D_{q,w,e}$ puede ser tomado como

$$(\log q)^{-1}(\log w)^{-1}(\log e)^{-1}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{w}\sum_{k=1}^{e}i^{-1}j^{-1}k^{-1}E(Y_{i,j,k})I_{[|\bar{Y}_q|\leqq i\log i,|\hat{Y}_w|\leqq j\log j \text{ or } |\underline{Y}_e|\leqq k\log k]}.$$

Corolario 2. *Si $\{Y_{q,w,e}\}$ es factorable con componentes $\bar{Y}_q,\hat{Y}_w$ and $\underline{Y}_e$, $q,w,e\geqq 1$ son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidos, y para algunos $u,t,r\geq 3$*

$$b_{q,w,e}=[qwe(\log q)(\log w)(\log e)\ldots(\log_{u-1}q)(\log_{t-1}w)(\log_{r-1}e)]^{-1}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\log_1 q\log_1 w\log_1 e=\log q\log w\log e,\\
&\log_u q\log_t w\log_r e=\log(\log_{u-1}q)\log(\log_{t-1}w)\log(\log_{r-1}e),u,t,r\geq 2,
\end{aligned}$$

entonces, $\{Y_{q,w,e}\}$ es $b_{q,w,e}$-sumable, si y solo si, para lo suficientemente $D_3>0$,

$$\begin{aligned}
&E(|Y_{q,w,e}|I_{[|\bar{Y}_q|>D_3,|\hat{Y}_w|>D_3 \text{ or } |\underline{Y}_e|>D_3]}\\
&\div\\
&(\log|\bar{Y}_q|,\log|\hat{Y}_w|,\log|\underline{Y}_e|)\\
&\ldots(\log_u|\bar{Y}_q|,\log_u|\hat{Y}_w|,\log_u|\underline{Y}_e|)\\
&(\log_t|\bar{Y}_q|,\log_t|\hat{Y}_w|,\log_t|\underline{Y}_e|)\\
&(\log_r|\bar{Y}_q|,\log_r|\hat{Y}_w|,\log_r|\underline{Y}_e|))\\
&<\infty
\end{aligned}$$

3 Conclusión

La idea principal de este artículo, era tomar las nociones presentades de sumabilidad de variables aleatorias en una dimensión definidas por Chow y Teicher [3] y extendias a dos dimensiones por Savas y Patterson; y comprobar si estas mismas se satisfacian para una dimensión mayor, es decir, para una tercera dimensión. Los resultados presentados en este artículo, podría ser una base fundamental para comprobar si estas nociones se satisfacen en n-dimenciones. A su vez, estas nociones podrian ser extendidas para variables aleatorias neutrosóficas las cuales han sido estudiadas por [1, 4, 5].

Referencias

[1] Bisher, M., and Hatip, A. Neutrosophic Random variables. *Neutrosophic Sets and Systems*, vol. 39, pp. 45-52, 2021. 10.5281/zenodo.4444987

[2] Borel, E. Les Probabilities denombrables et leurs applications arithmetiques. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) vol. 27, no. 2, pp 247-271, 1909.

[3] Chow, Y. S., and H. Teicher. Almost certain summability of independent, identically distributed random variables. *The Annals of Mathematical Statistics* vol. 42, no. 1, pp. 401-404, 1971. 10.1214/aoms/1177693533

[4] Granados, C., and Sanabria, J. On independence neutrosophic random variables. *Neutrosophic Sets and Systems*, vol. 47, pp. 541-557, 2021. 10.5281/zenodo.5775184

[5] Granados, C. New notions on neutrosophic random variables. *Neutrosophic Sets and Systems* vol. 47, pp. 286-297, 2021. 10.5281/zenodo.5775135

[6] Patterson, R. F. Double sequence core theorems. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 22, no. 4, pp. 785-793, 1999. 10.1155/S0161171299227858

[7] Pringsheim, A. Zur theorie der zweifach unendlichen zahlen folgen. *Mathematische Annalen*, vol. 53, no. 3, pp. 289-321, 1900. 10.1007/BF01448977

[8] Savas, R., and Patterson, R. Summability approximation theorems of double random variables, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2021. 10.1080/03610926.2021.1901920