Vol. 15 (núm 1) pp. 155 - 170
Enero - Junio 2024
https://doi.org/10.19053/01217488.v15.n1.2024.16237

Una revisión a las geometrías de Zariski uno–dimensionales

A review of one-dimensional Zariski geometries

Joel Torres del Valle[1*], Pedro Hernandez Rizzo[2**].

Resumen

En este artículo, realizamos una revisión de las geometrías de Zariski de dimensión uno. Comenzamos con una breve retrospectiva de conceptos clave en teoría de modelos y su evolución histórica. Luego, introducimos conceptos en geometría algebraica, explorando la intersección con la teoría de modelos para motivar la teoría de modelos geométrica. Destacamos la Conjetura de Tricotomía de Zilber y cómo la refutación de Hrushovski condujo a Zilber y Hrushovski a aislar la clase de estructuras donde la conjetura tiene validez, dando origen a las geometrías de Zariski. Concluimos presentando los resultados obtenidos por Zilber y Hrushovski en los 90s y ofrecemos una revisión bibliográfica actualizada del tema.

Palabras Clave: Geometrías de Zariski, teoría de modelos, geometría algebraica.

Abstract

In this article, we present a comprehensive review of Zariski geometries of dimension one. We begin with a brief retrospective of key concepts in model theory and its historical evolution. Subsequently, we introduce concepts in algebraic geometry, exploring their intersection with model theory to establish geometric model theory. We emphasize Zilber's Trichotomy Conjecture and how Hrushovski's refutation led Zilber and Hrushovski to isolate the class of structures where the conjecture holds, giving rise to Zariski geometries. We conclude by presenting the results obtained by Zilber and Hrushovski in the 90s and provide an updated bibliographic review of the topic.

Keywords: Zariski geometry, model theory, algebraic geometry.

Recepción: 15-Julio-2023
Aceptación: 09-Noviembre-2023

[1*] Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: joel.torres@udea.edu.co
[2**] Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: pedro.hernandez@udea.edu.co

Introducción

El conjunto $\mathbb{A}_k^n$ de n-tuplas ordenadas de elementos de k, donde k es un campo algebraicamente cerrado, puede ser dotado de una topología donde se consideran como cerrados los conjuntos determinados por las soluciones o ceros de una familia de ecuaciones polinomiales con coeficientes en k. Esta topología es llamada *topología de Zariski* de $\mathbb{A}_k^n$. La geometría algebraica es el área que estudia la geometría que generan estos conjuntos llamados *conjuntos algebraicos*. En 1996 E. Hrushovski y B. Zilber en [1] desarrollan el proceso inverso, esto es, partiendo de un espacio topológico D, este y todas sus potencias, son dotadas de condiciones que dependen de su topología de forma que ciertas propiedades "geométricas" son satisfechas. A seguir, construyen un campo algebraicamente cerrado y definen una curva suave C de tal modo que los puntos (cerrados) de D pueden ser identificados con los puntos (cerrados) de la curva C y, de forma más general, que toda colección de subconjuntos cerrados de D coincide con la colección de subconjuntos cerrados Zariski de C. En este sentido, Hrushovski y Zilber caracterizan las estructuras de tales curvas en términos de la topología de Zariski definida sobre un campo algebraicamente cerrado (ver [1, 2] y [3]). Ciertamente, este tipo de problemáticas han ocupado un lugar importante en las investigaciones en geometría algebraica, geometría compleja, topología, topología algebraica, la teoría de modelos, etc. Con ello hacemos referencia, a grandes rasgos, a responder al tipo de estructuras de las que debemos dotar al espacio topológico subyacente a un conjunto algebraico X para determinar y "recuperar" toda la información de esta como variedad algebraica. Ejemplo de este tipo de problemas es la llamada Conjetura de Grothendieck, hoy conocida como el Teorema de Voedvodsky [4]. Para casos más simples y con el uso de otras técnicas recomendamos [5, 6]. Y para un caso especial, que generaliza a estos últimos trabajos referenciados, y el avance más reciente sobre este tipo de problemas, recomendamos el artículo de Kollar et al. [7].

A. Pillay (ver [8]) considera [1] como "uno de los (artículos) más importantes en la teoría de modelos moderna". Creemos que esta afirmación se debe, entre otras cosas, a que en [1] se aísla una amplia clase de estructuras matemáticas donde es válida la Conjetura de tricotomía de Zilber (ver §3) la cual resultó ser falsa en general, como lo demostró Hrushovski en [9].

Existen pocas referencias en español donde se trata la importancia y el impacto de los resultados [1] y, mucho menos, donde se presente para un público no especializado. No desconocemos, por supuesto, trabajos en español en donde se tratan estas temáticas como [10] y [11]. No obstante, este artículo a diferencia de los últimos previamente citados, tiene por objetivo presentar el concepto de geometrías de Zariski, en dimensión uno, y los teoremas que Hrushovski y Zilber obtuvieron para estas en la década de los 90s. Posterior a ello hacemos una revisión de los trabajos recientes en el área y las nuevas líneas que han surgido. Todo esto sin asumir en el lector una formación sólida en teoría de modelos o en geometría algebraica, por lo que incluimos dos secciones introduciendo tales temas. Así mismo, pretendemos que este trabajo sea considerado como una invitación/introducción a la teoría de modelos y sus aplicaciones a la geometría algebraica.

Ahora daremos una breve descripción del contenido de este artículo. En §1 haremos una breve y rápida introducción a la teoría de modelos y, así mismo, en §2 para la geometría algebraica. En principio, los temas de §§1-2 no parecen estar ligados y más bien podrían considerarse como transversales. No obstante, tratando de hacer más clara la relación entre ambas teorías, mostraremos en §2 algunas aplicaciones de la teoría de modelos a la geometría algebraica. En §3 presentaremos las geometrías de Zariski, ejemplos y sus propiedades. Por supuesto, mencionamos aquí los teoremas de clasificación obtenidos por Hrushovski y Zilber. A modo de conclusión, en §4 presentamos algunas de las líneas de investigación recientes en torno a las geometrías Zariski.

1. Introducción a la teoría de modelos

En esta sección presentamos las definiciones básicas que serán requeridas para el desarrollo del presente artículo. En § 1.1 respondemos a la pregunta "¿qué es la teoría de modelos?". En § 1.2 definimos lenguaje, teoría, modelo, fórmula, etc. En § 1.3 hacemos un recuento histórico en el que mencionamos los resultados que allanan el camino a la teoría de estabilidad geométrica (que tratamos en § 3) y posteriormente a la definición de geometrías de Zariski. En este apartado, también presentamos la forma más elemental en que la teoría de modelos se vale de la geometría algebraica como motivación para § 2. Naturalmente, el tratamiento de los tópicos de esta sección no es exhaustivo ni mucho menos riguroso. Recomendamos trabajos como [12, 13] para profundizar en teoría de modelos. En relación a la historia reciente de la teoría de modelos recomendamos [14].

1.1. ¿Qué es, a grandes rasgos, la teoría de modelos?

La interpretación más aceptada de la teoría de modelos es que es el área de las matemáticas "que estudia la relación entre las fórmulas matemáticas y las estructuras matemáticas que las satisfacen o rechazan" (véase [15, p. 1]). Sin embargo, la evolución de la teoría ha dado lugar a diversas interpretaciones acordes a la tendencia de la línea de investigación del momento. Por ejemplo, en 1973 Chang & Keisler (ver [13, p. 1]) propusieron que la teoría de modelos era "la suma del álgebra universal y la lógica matemática". Por supuesto, desde un punto de vista técnico de la "teoría de modelos moderna", esta interpretación no es del todo precisa, aunque sí lo fue en los inicios tempranos de la teoría. En 1993, en su célebre libro *Model Theory*, Wilfrid Hodges afirmó que la teoría de modelos es “geometría algebraica sin campos” que, desde nuestro punto de vista, es una interpretación acorde a muchos de los temas que hoy enfrenta la teoría de modelos. Más aún, el tema a desarrollar en este artículo sigue el espíritu de la afirmación de Hodges: las geometrías de Zariski proporcionan una forma de ver la geometría desde el punto de vista de la lógica matemática sin apelar al álgebra y, además, la información algebraica se recupera a partir de algunos datos topológicos.

Finalmente, una interpretación que logra capturar el espíritu de los problemas recientes, fue brindada por Hrushovski: “la teoría de modelos es la geografía de las matemáticas dóciles” (ver [16]) y que sería la respuesta (probable) que daría un teórico de modelos. Sin entrar en los detalles de lo que significan “matemáticas dóciles”, en cualquier caso, todas las interpretaciones conocidas coinciden en que “la teoría de modelos es, a grandes rasgos, la rama de la lógica matemática cuyo objeto de estudio son las estructuras matemáticas”.

1.2. Teoría de modelos elemental: Una revisión rápida

Con el propósito de hacer una breve revisión histórica que nos permita construir una línea de tiempo que conlleve a la construcción del concepto de geometrías de Zariski, será indispensable presentar algunas definiciones rigurosas, no obstante, desprovistas de ciertos tecnicismos. Para un tratamiento riguroso y técnico recomendamos [12, 13] y [17].

Definición 1.1 Un *lenguaje de primer orden* $\mathscr{L}$ es una colección de símbolos que contiene:

- Los *símbolos lógicos* dados por $\forall$, $\vee$, $\neg$, $=$.
- Un conjunto infinito numerable de símbolos de variables $x, y, u, z, x_1, x_2, \ldots$.
- Tres colecciones, posiblemente vacías, de símbolos no lógicos determinadas por: una colección de símbolos de relación n-árias R^n, una colección de símbolos de función n-árias f^n y una colección de símbolos de constantes.

Para $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden caracterizamos dos tipos distintos de cadenas de símbolos. A saber, sus *términos* y sus *fórmulas*. Intuitivamente, los términos son las concatenaciones de símbolos de un lenguaje que nombran objetos. Por su parte, las fórmulas son, intuitivamente, aquellas cadenas de símbolos que expresan afirmaciones. A modo de ejemplo, consideremos el *lenguaje de la aritmética de primer orden* $\mathscr{L} = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$, donde $\cdot, +$ son símbolos de función de aridad dos, $0, 1$ son símbolos de constantes y $\leq$ es un símbolo de relación de aridad dos. En este caso, $x+y$ y $1+1$ son términos y $\forall x \exists y (x+y=0)$ y $\forall x (x+y=0)$ son fórmulas. Repare que en la primera de estas fórmulas ambos símbolos de variables x, y están sujetos a un cuantificador. Contrario a lo que vemos en la segunda de estas fórmulas donde el símbolo de variable y es “libre”, esto es, que no está sujeto a un cuantificador. Estaremos interesados en aquellas fórmulas donde todas sus variables están cuantificadas y son llamadas *sentencias* o *axiomas*. Intuitivamente, estas son fórmulas que expresan propiedades globales que ciertos elementos de un conjunto pueden tener o no. Un conjunto T de sentencias sobre un lenguaje $\mathscr{L}$ es llamado $\mathscr{L}$*-teoría*. Si el lenguaje es entendido, omitiremos el prefijo $\mathscr{L}$.

Interpretar un lenguaje dentro de un conjunto no vacío M se trata de que los símbolos de relación, función y constantes, se interpreten como relaciones y funciones habituales sobre el conjunto M preservando su aridad y las constantes como elementos fijos de M. Volviendo a nuestro ejemplo y escogiendo a M por el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, el símbolo $+$ se interpreta como la función de aridad 2 que corresponde a la suma de números naturales, $\cdot$ como el producto de números naturales, $\leq$ como el orden usual y $0, 1$ como los elementos neutros para la suma y el producto, respectivamente. Ahora bien, un conjunto no vacío M junto con las interpretaciones de $\mathscr{L}$, es llamado $\mathscr{L}$*-estructura* y si todos los axiomas de una teoría T son válidos sobre una estructura M, diremos que M es un *modelo* de T. En pocas palabras, un modelo es un conjunto no vacío que con una estructura especificada valida los axiomas de una teoría T.

Ejemplo 1.2 Considere el lenguaje $\mathscr{L} = \emptyset$, es decir, como aquel que no contiene símbolos no lógicos. Definimos la teoría **Inf** de *conjuntos infinitos sin estructura* como el conjunto (infinito) de axiomas:

$\exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2)$.

$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3)$.

$\vdots$

En este sentido, la sentencia n-ésima expresa que *existen n elementos distintos* y el conjunto **Inf** expresa que hay infinitos elementos. Note que un modelo de **Inf** es simplemente un conjunto infinito y esta teoría no tiene modelos finitos. En efecto, si M tiene n elementos, con $n \in \mathbb{N}$, entonces la $(n+1)$-sentencia que afirma que existen $n+1$ elementos distintos, es falsa en M. □

Ejemplo 1.3 En el lenguaje $\mathscr{L} = \{E\}$ donde E es un símbolo de relación de aridad 2, definimos la *teoría de relaciones de equivalencia* **Equiv** por los axiomas:

$\forall x E(x,x)$ (reflexividad),

$\forall x, y (E(x,y) \to E(y,x))$ (simetría),

$\forall x, y, z ((E(x,y) \wedge E(y,z)) \to E(x,z))$ (transitividad).

Una manera fácil de obtener modelos de esta teoría es considerar cualquier conjunto no vacío con la relación de igualdad. En aras de obtener ejemplos no triviales y más interesantes, consideremos la siguiente construcción: sea $\mathbb{C}$ en conjunto de los números complejos y $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ (n-veces). Dados $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ definimos $\vec{x} \sim \vec{y}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$

tal que $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$. Entonces, $\sim$ define una relación en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ donde los axiomas de **Equiv** se verifican. Esto es, $(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}, \sim)$ es un modelo de **Equiv**. $\square$

1.3. Historia y un recorrido sobre resultados pioneros de la teoría de modelos

La teoría de modelos se estableció formalmente a mediados del siglo XX y, nos atrevemos a afirmar, que la mayoría de los resultados pioneros se deben a A. Robinson y A. Tarski. Sin embargo, algunas ideas previas estaban implícitas en los trabajos de exponentes como K. Gödel, L. Löweheim y Th. Skolem. Precisamente, Gödel en [18] presenta resultados relacionados a la existencia de modelos de teorías de primer orden como, por ejemplo, el Teorema de compacidad. Este teorema establece, *grosso modo*, que una teoría con infinitos axiomas definida sobre un lenguaje con una cantidad contable de símbolos de constantes admite un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de la teoría tiene un modelo. Por otro lado, Löweheim en [19] demostró que una teoría de primer orden con un modelo infinito tiene un modelo contable. Empero, en su demostración Löweheim usó implícitamente un resultado conocido hoy por Lema de Köning, cuya demostración solo fue publicada posteriormente por D. Köning en [20]. Por otro lado, en [21], Skolem subsanó lo hecho por Löweheim y en [22] A. Maltsev mostró una versión completa y mejorada de este teorema afirmando que, una teoría de primer orden en un lenguaje contable que tiene un modelo infinito, tiene un modelo de cada cardinal infinito. Este resultado hoy es conocido con el nombre de Teorema de Löweheim-Skolem. Asimismo, Maltsev en *ibidem*, probó un resultado más general del Teorema de compacidad de Gödel a los lenguajes no contables y demostró la existencia de "modelos no-estándar" de la aritmética utilizando este teorema, siendo el pionero en exhibir el poder del Teorema de compacidad.

Sean $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden y T una $\mathscr{L}$-teoría. Denotaremos por $\mathrm{Mod}(T)$ la clase de todos los modelos de T. Teóricamente, la situación ideal es que todo modelo en $\mathrm{Mod}(T)$ esté determinado (a menos de una cierta noción de isomorfismo) por un único modelo N (véase la introducción de [23]). No obstante, esta situación nunca es posible. En efecto, por el Teorema de Löweheim-Skolem se concluye que las teorías de primer orden no pueden controlar el cardinal de sus modelos infinitos. Esto es, si existe un modelo infinito de una teoría de primer orden T, existirán infinitos modelos de T cuyo cardinal κ es cualquier cardinal infinito. Denotaremos ahora por $\mathrm{Mod}_\kappa(T)$ la clase de modelos de T de cardinal fijo κ. ¿Está $\mathrm{Mod}_\kappa(T)$ determinada (a menos de isomorfismo) por un único modelo de T? La respuesta es de nuevo negativa. Por ejemplo, se pueden construir modelos contables de la aritmética de primer orden no isomorfos a los números naturales, los llamados "modelos no-estándar". Esto nos lleva a considerar la siguiente situación: llamaremos a T *κ-categórica* si todos los modelos de T con cardinal κ son isomorfos. R. Vaught demostró en [24], y también de forma independiente J. Loś en [25], que si T es κ-categórica y no tiene modelos finitos, entonces T es *completa*, esto es, dada una sentencia ϕ del lenguaje de T, o bien ϕ o bien $\neg\phi$ es teorema de T. M. Morley demostró en [26], que si T es una teoría de primer orden sobre un lenguaje contable (i.e., el lenguaje contables símbolos de constantes) y es κ-categórica en algún cardinal infinito y no contable κ, lo es en cada cardinal no contable. Este resultado es conocido hoy como Teorema de Morley y había sido previamente conjeturada por Loś, convirtiendo el Teorema de Morley en una respuesta positiva a la Conjetura de Loś.

Valga mencionar para cerrar la discusión anterior, que el Teorema de Morley fue generalizado por S. Shelah en [27] para lenguajes no contables. En resumen, el Teorema de Morley garantiza que si una teoría es categórica en algún cardinal no contable, será categórica en todos los cardinales no contables. Encontramos así que las teorías de primer orden que son categóricas en cardinales no contables tienen modelos "bien comportados", lo que intuitivamente supondría tener cierto criterio de *estabilidad* para la teoría en cuestión.

1.4. Eliminación de cuantificadores

Considere $\phi(\vec{a},\vec{x})$ una $\mathscr{L}$-fórmula cuyas variables no cuantificadas están en $\vec{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ y cuyas constantes están en $\vec{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$. Consideremos $\phi(\vec{a}, M)$ el conjunto de soluciones de $\phi(\vec{a},\vec{x})$ en un modelo M. Los conjuntos de esta forma se llaman *$\vec{a}$-definibles*. A modo de ejemplo, considere $\phi(\vec{a},\vec{x})$ por la fórmula $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$, entonces el conjunto $\phi(\vec{a},\mathbb{Z})$ coincide con $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, el conjunto de los enteros no negativos. En efecto, por un conocido teorema de J. Lagrange, todo entero no-negativo es la suma de cuatro cuadrados. De esta forma, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ es definible.

Los conjuntos definibles son una herramienta clave en la teoría de modelos y sus aplicaciones. El problema radica en que estos conjuntos pueden ser difíciles de determinar. No obstante, cuando $\phi(\vec{a},\vec{x})$ es una fórmula sin cuantificadores, la tarea es más fácil. Esta discusión lleva a la siguiente definición.

Definición 1.4 Sea T una $\mathscr{L}$-teoría. Si para toda $\mathscr{L}$-fórmula ψ existe una fórmula sin cuantificadores ϕ en el lenguaje de T tal que en cualquier modelo de T se valida la fórmula $\phi \leftrightarrow \psi$, decimos que T tiene *eliminación de cuantificadores* o que T *elimina cuantificadores*.

Cuando nos restringimos a los conjuntos definibles, decir que una teoría T elimina cuantificadores, es equivalente a afirmar que, para cualquier modelo M de T, la función de proyección canónica $\pi_{mn} : M^m \to M^n$ preserva conjuntos *construibles*, es decir, para $E \subseteq M^m$ construible, $\pi_{mn}(E)$ es construible. Aquí un conjunto es construible si es una combinación Booleana de conjuntos definidos por fórmulas que son igualdades o formadas a partir de relaciones. En efecto, basta con suponer que el conjunto construible $E \subseteq M^m$ es definible por $\phi(\vec{x},\vec{a})$. Luego, $\pi_{mn}(E) \subseteq M^n$ es definible por $\exists x_1 \cdots \exists x_{m-n}\phi(\vec{x},\vec{a})$, de donde se sigue la afirmación. Ahora bien, en general, probar la eliminación de cuantificadores para una teoría es a veces una tarea difícil y por ello se han desarrollado muchas técnicas. El ejemplo más relevante es el trabajo de A. Tarski para el campo complejo $(\mathbb{C},+,\cdot,-,0,1)$, que, de hecho, es un ejemplo particular de eliminación de cuantificadores para campos algebraicamente cerrados. Concretamente, existe una teoría de primer orden, que denotamos por **Acf**, en el lenguaje de anillos $\mathscr{L} = \{+,\cdot,-,0,1\}$ tal que los modelos de **Acf** son exactamente los campos algebraicamente cerrados, i.e., los axiomas de **Acf** expresan las propiedades de ser un campo algebraicamente cerrado. Para esta teoría, se vale que dada una fórmula ϕ, existe una fórmula ψ sin cuantificadores tal que ϕ y ψ tienen el mismo significado en **Acf**.

La eliminación de cuantificadores y algunas formas débiles son técnicas muy importantes en el estudio de teorías algebraicas con teoría de modelos. Un ejemplo notable es la prueba modelo-teórica del Teorema de los ceros de Hilbert brindada por Robinson y que discutiremos en la siguiente sección. Recomendamos [15, Cap. 2] para una demostración de la eliminación de cuantificadores para **Acf** y varios ejemplos más. También se puede consultar el texto [12, Cap. 3] para una discusión amplia y enriquecedora sobre eliminación de cuantificadores.

La eliminación de cuantificadores desde el punto de vista de conjuntos construibles tiene un enunciado similar al Teorema de Chevalley en la geometría algebraica (ver [12, Corolario 3.2.8 ii)]). De hecho, la eliminación de cuantificadores para **Acf** tiene como consecuencia de que los conjuntos construibles desde el punto de vista descrito arriba coinciden con los conjuntos construibles desde el punto de vista de la geometría algebraica. Así las cosas, la eliminación de cuantificadores acabará siendo el análogo en la teoría de modelos del Teorema de Chevalley. En la siguiente sección abordaremos este tema con más detalles y mencionaremos varios casos relevantes de demostraciones obtenidas en geometría algebraica a partir del enfoque de la teoría de modelos, interpretando ciertos fenómenos geométricos y algebraicos desde el punto de vista de la lógica. En este sentido, tales resultados serán el abre bocas para la posterior introducción de la teoría de estabilidad geométrica y la tricotomía de Zilber, principal motivación de las geometrías de Zariski, al menos, desde el punto de vista clásico.

2. Introducción a la geometría algebraica

En esta sección daremos una mirada rápida a ciertos conceptos básicos de la geometría algebraica. Asimismo, presentaremos algunos resultados ilustres de la relación de esta con la teoría de modelos, a saber, los Teoremas de Tarski-Chevalley, Ax-Grothendieck y de los Ceros de Hilbert o *Nullstellensatz*; la Conjetura de Mordell-Lang y, finalmente, los trabajos recientes de Zilber. Para profundizar en las temáticas aquí presentadas recomendamos los textos [12] y [28].

2.1. Conjuntos algebraicos afines

Sea k un campo algebraicamente cerrado. El producto cartesiano de n-copias de k, será denotado por $\mathbb{A}_k^n$. Para cada $I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$, un ideal del anillo de polinomios en n-variables con coeficientes en k, denotamos por $V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ el *conjunto de ceros de I*, esto es,

$$V(I) := \{\vec{a} \in \mathbb{A}_k^n \mid f(\vec{a}) = 0 \,\text{para cada}\, f \in I\}.$$

Es posible demostrar que la colección de los $V(I)$ generan una topología, conocida como *topología Zariski*. En esta topología cada $V(I)$ corresponde a un subconjunto cerrado de $\mathbb{A}_k^n$, llamado conjunto *algebraico afín*. Esta relación de la geometría de $\mathbb{A}_k^n$ con conceptos provenientes de la k-álgebra de polinomios $k[x_1,\ldots,x_n]$, permite establecer propiedades interesantes y que distinguen a esta construcción. Precisamente, $\mathbb{A}_k^n$ con la topología Zariski es un espacio *irreducible* y *Noetheriano*. La primera propiedad significa que todo abierto no-vacío de $\mathbb{A}_k^n$ es denso y la segunda, que para cada sucesión $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots$ de subconjuntos cerrados en $\mathbb{A}_k^n$ existe un $m > 0$ tal que $X_m = X_{m+l}$, para cada $l > 0$. Estas dos propiedades resultan de dos hechos algebraicos importantes asociados a $k[x_1,\ldots,x_n]$, a saber, que es un dominio integral y que es un anillo Noetheriano (i.e., todo ideal es finitamente generado), respectivamente. En aras de generalizar estas propiedades para cualquier subconjunto algebraico X de $\mathbb{A}_k^n$ asociamos a este un ideal en $I(X) \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$, definido por

$$I(X) := \{f \in k[x_1,\ldots,x_n] : f(\vec{a}) = 0, \forall \vec{a} \in X\}.$$

A partir de ahí, es posible definir una k-álgebra de *funciones regulares* sobre X dada por las funciones $f : X \to k$ tales que $f = p|_X$ para algún $p \in k[x_1,\ldots,x_n]$. En realidad, esta k-álgebra es justamente el cociente $k[X] := k[x_1,\ldots,x_n]/I(X)$. En este sentido, X es un espacio topológico Noetheriano con la topología de Zariski (inducida), esto es, $Y \subseteq X$ es *cerrado*, si $Y = V(I)$ para algún I ideal de $k[x_1,\ldots,x_n]$ tal que $I(X) \subseteq I$. Asimismo, X es irreducible si y sólo si $k[X]$ es un dominio integral, equivalentemente, $I(X)$ es un ideal primo de $k[x_1 \ldots,x_n]$.

En definitiva, las propiedades de Noetherianidad e irreducibilidad en un espacio topológico Noetheriano X implican que todos sus cerrados Y son expresados como una unión finita $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_s$ de cerrados irreducibles Y_i únicamente determinados por la propiedad de que $Y_i \not\subseteq Y_j$, para cada $i \neq j$. Los Y_i son llamados *componentes irreducibles* de Y.

Un importante invariante (*birracional*) en geometría es el de dimensión. Precisamente, para un conjunto algebraico irreducible X *la dimensión de Krull de* X es por definición el grado de trascendencia del campo $k(X)$ de *funciones racionales* de X sobre k, la cual coincide, no solo con la dimensión de X como espacio topológico, sino también con la llamada dimensión de Krull del anillo de funciones regulares $k[X]$. Por ejemplo, $\mathbb{A}_k^n$ tiene dimensión n, ya que el grado de trascendencia de $k(x_1,\ldots,x_n)$ sobre k es n. En general, la dimensión de un conjunto algebraico Y es definida por $\dim Y = \sup_i \dim(Y_i)$, donde Y_i son las componentes irreducibles de Y. Por ejemplo, conjuntos algebraicos de dimensión 1 y dimensión 2, son llamados, respectivamente, *curva* y *superficie* algebraica.

Dado un conjunto algebraico X, la noción de dimensión se puede "especializar" a cada punto $p \in X$, a saber, podemos hablar de la *dimensión infinitesimal* de X en cada uno de sus puntos al calcular la dimensión, como $k-$espacio vectorial, del espacio tangente a X en p, denotado por $T_{X,p}$. La dimensión (global) de X y la dimensión infinitesimal, pueden diferir, siendo esta última mayor o igual que la dimensión del conjunto en sí. En realidad, el conjunto de puntos de X donde estas difieren forman un subconjunto cerrado propio de X, llamado conjunto de *singularidades de* X. En particular, en el caso en que X sea una curva, el conjunto de singularidades es un conjunto finito. Ahora bien, en el caso en que estas coincidan en cada $p \in X$, esto es, el conjunto de singularidades es el conjunto vacío, X es llamado conjunto algebraico *suave*. Un caso especial e importante para nosotros y al que nos referiremos más adelante es al caso de curvas suaves.

2.2. El espacio proyectivo

Además de los conjuntos algebraicos afines, históricamente, uno de los contextos de interés en geometría algebraica son los *conjuntos algebraicos proyectivos*. Precisamente, son los subconjuntos algebraicos $X = V(I)$ del *espacio proyectivo* $\mathbb{P}_k^n$. Aquí $\mathbb{P}_k^n$ corresponde al conjunto de rectas que pasan por el origen de k^{n+1}. De forma equivalente, $\mathbb{P}_k^n$ es el conjunto de clases de equivalencia $[x_0,\ldots,x_n]$ determinada por cada vector $(x_0,\ldots,x_n) \in k^{n+1} \setminus 0$ por la relación de equivalencia:

$$(x_0,\ldots,x_n) \sim (y_0,\ldots,y_n) \text{ si y sólo si existe } \lambda \in k \setminus 0 \text{ tal que } y_i = \lambda x_i \text{ para cada } i = 0,\ldots,n.$$

De este modo, un conjunto algebraico proyectivo $X = V(I)$ es determinado por un ideal de $k[x_0,\ldots,x_n]$ finitamente generado $I = \langle f_1,\ldots,f_m \rangle$ donde los polinomios f_i son *homogéneos*, esto es,

$$f_i(\lambda x_0,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^{\deg(f_i)} f_i(x_0,\ldots,x_n), \text{ para cada } i = 1,\ldots,m.$$

En este sentido los $V(I)$, así definidos, generan una topología conocida como la *topología Zariski* del espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ y en ella cada subconjunto algebraico afín X de $\mathbb{A}_k^n$ corresponde a un conjunto algebraico proyectivo $\overline{X}$, de la misma dimensión que X, pero con puntos "en el infinito". Precisamente, cada $\overline{X}$ corresponde a la clausura de X en $\mathbb{P}_k^n$, donde los nuevos puntos surgen por la intersección de $\overline{X}$ con el *hiperplano en el infinito*, H_∞, que es identificado con $\mathbb{P}_k^{n-1}$. Por ejemplo, $\overline{\mathbb{A}_k^n} = \mathbb{P}_k^n$ el cual es identificado con $\mathbb{A}_k^n \sqcup \mathbb{P}_k^{n-1}$. En particular, $\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \sqcup \{\infty\}$ y así $\mathbb{P}_k^n$ es considerada como la "compactificación" de $\mathbb{A}_k^n$. De este modo, en este nuevo contexto, se pueden considerar curvas algebraicas proyectivas suaves, como aquellos conjuntos algebraicos proyectivos de dimensión 1 que son suaves, siguiendo generalizaciones naturales de los conceptos para el caso afín al caso proyectivo.

2.3. La teoría de modelos en la geometría algebraica

A continuación presentamos algunos ejemplos destacables de cómo la teoría de modelos interactúa con la geometría algebraica.

2.3.1. El Teorema de Tarski – Chevalley

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{A}_k^n$ es *algebraicamente construible* si es una combinación Booleana de conjuntos cerrados de Zariski. Una consecuencia de la eliminación de cuantificadores para **Acf** es que un conjunto es algebraicamente construible si y sólo si es construible en sentido modelo-teórico (véase la discusión posterior a la Definición 1.4). El Teorema de Chevalley, en el contexto de la geometría algebraica afín, afirma que si k es un campo algebraicamente cerrado y $\pi_{mn} : \mathbb{A}_k^m \to \mathbb{A}_k^n$, con $m \geq n$, es un morfismo de proyección, para cualquier conjunto algebraicamente construible $E \subseteq \mathbb{A}_k$, $\pi_{mn}(E)$ es algebraicamente construible. Así, la eliminación del cuantificadores de Tarski para campos algebraicamente cerrados puede verse como una versión modelo-teórica del Teorema de Chevalley y viceversa. Es por esto que usualmente a éste teorema se le conoce como Teorema de Tarski-Chevalley.

2.3.2. El Teorema de Ax-Grothendieck

El Teorema de Ax-Grothendieck afirma que todo morfismo polinomial inyectivo $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es, en realidad, una biyección. Este teorema fue demostrado por A. Grothendieck en [29, Teo. 10.4.1] y modelo-teóricamente (e independientemente) por James A. en [30]. La demostración de Ax está basada en el hecho modelo-teórico de que las siguientes dos condiciones son equivalentes para cualquier sentencia ϕ en el lenguaje de anillos:

i) ϕ es cierta en el campo de los números complejos.

ii) Hay primos arbitrariamente grandes tales que todo campo de característica p cumple ϕ.

Las líneas generales de la demostración de este teorema son: sea k un campo finito con $q = p^m$ elementos, donde p es un número primo y $m > 0$. Todo morfismo polinomial $k^n \to k^n$ inyectivo es también sobreyectivo y para esto es suficiente considerar el cardinal de k^n. En este sentido, lo mismo es cierto para $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$, la clausura algebraica de los campos de p-elementos. Así, todo morfismo polinomial $(\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \to (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ que sea inyectivo, es biyectivo. Supongamos por contradicción que $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un morfismo polinomial inyectivo que no es sobreyectivo y sea $f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(\vec{x}),\ldots,f_n(\vec{x})))$, donde $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n)$. Tomemos d el mayor grado de los f_i's. Ax prueba que existe una sentencia $\phi_{n,d}$ que expresa el hecho de que todo morfismo polinomial $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ inyectivo y cuyas componentes polinomiales tienen grado a lo más d, es sobreyectivo. Como fue mencionado, $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ satisface $\phi_{n,d}$ para todo primo p. Así que, por los numerales anteriores relacionados a las sentencias sobre el lenguaje de anillos, $\mathbb{C}$ satisface $\phi_{n,d}$, lo que contradice la hipótesis.

Lo verdaderamente esencial en la prueba anterior es el poder que tiene el lenguaje de anillos para expresar múltiples propiedades sobre polinomios y campos. Recomendamos al lector [12, Cap. 2, § 2], especialmente el Teorema 2.2.11 de cuya prueba hicimos un esbozo arriba.

2.3.3. El Nullstellensatz de Hilbert

Una teoría es *modelo-completa* si para cualquier par de sus modelos N y M, con $N \subseteq M$, se tiene que una fórmula es válida en N si y sólo si es válida en M (donde las tuplas sólo se toman en N). La teoría **Acf** es modelo-completa ([12, Corolario 3.2.3]) y esta propiedad tiene una consecuencia interesante: el Teorema (débil) de los ceros de Hilbert o Nullstellensatz (débil), el cual afirma que si k es un campo algebraicamente cerrado, entonces $V(I) \neq \emptyset$, donde I es un ideal propio de $k[x_1,\ldots,x_n]$. Una versión equivalente de este teorema, la cual se prueba por una simplificación en el argumento debida a G. Rabinowitsch, afirma que si f es algún polinomio en $k[x_1,\ldots,x_n]$ que se anula en el conjunto algebraico $V(I)$ entonces existe un número natural r tal que f^r está en I. Esta última versión fue demostrada por primera vez por D. Hilbert en [31] y establece una relación fundamental entre la geometría y el álgebra. Tal relación es la base de la geometría algebraica.

A. Robinson demostró en [32, p. 38] el Nullstellensatz débil utilizando métodos de teoría de modelos. La prueba de Robinson sigue, a grandes rasgos, la siguiente línea de ideas: tomemos $I = (f_1,\ldots,f_m)$ (lo cual está garantizado ya que en el anillo de polinomios todo ideal es finitamente generado) y sea J un ideal maximal que contiene a I. Como J es maximal $K = k[x_1,\ldots,x_n]/J$ es un campo y $k = L \subseteq K$ con $L = \overline{k}^{\text{alg}}$. Note que tanto L como K son modelos de **Acf**. Ahora, existe un elemento en $\mathbb{A}_K^n$ que anula a todos los f_i's y este hecho es expresable por una fórmula de primer orden, i.e., existe una fórmula de primer orden en el lenguaje de anillos que expresa el hecho de que existe un cero para todos los f_i's y tal fórmula se valida en K. Por ser **Acf** modelo-completa, la fórmula vale en k, esto es, hay una n-tupla $\vec{a}$ de elementos en k tal que $f(\vec{a}) = 0$ para todo $f \in I$, i.e., $V(I) \neq \emptyset$.

2.3.4. Conjetura de Mordell-Lang para campos de funciones

Considere k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p > 0$ y recuerde que, desde el formalismo algebraico, un *campo de funciones sobre* k es una extensión de campos finitamente generada con grado de trascendencia positivo y finito sobre k. En 1992 D. Abramovich y F. Voloch en su trabajo [33] plantearon una versión plausible de la Conjetura de Mordell-Lang para campos de funciones sobre k, a saber, “sea A una variedad abeliana definida sobre $k^\times$, X una subvariedad de A y Γ un subgrupo de rango finito de A. Supongamos que $X \cap \Gamma$ es Zariski-denso en X. Entonces, existen $A_1 \subseteq A$ una subvariedad abeliana, una variedad abeliana B definida sobre k, un homomorfismo sobreyectivo $g : A_1 \to B$, y una subvariedad X_0 de B definida sobre k tal que $g^{-1}(X_0)$ es una traslación de X”. Abramovich–Voloch probaron para varios casos particulares la conjetura. No obstante, en [34], Hrushovski demostró la conjetura anterior en su totalidad usando las herramientas y lenguaje de la teoría de modelos. Invitamos al lector curioso al trabajo [35] para una aproximación explicada y auto contenida a la prueba de Hrushovski de la conjetura en cuestión. Para mayores detalles sobre esta discusión ver [12, pp. 311-313].

2.3.5. El trabajo reciente de Boris Zilber

La mayor parte del trabajo de Zilber establece una sólida conexión entre la geometría algebraica y la teoría de modelos. Un ejemplo claro es [36] donde los autores tratan el problema de la traducción de la *Geometría anabeliana (de Grothendieck)* al lenguaje de la teoría de modelos. Otro trabajo de Zilber que vale la pena mencionar aquí es [5] cuyo teorema principal reproducimos, sin ser precisos en algunos conceptos involucrados: sea k un campo algebraicamente cerrado y $C(k)$ el conjunto de k-puntos de una curva proyectiva suave C de género $g > 1$ y sea $J(k)$ su Jacobiana. Fijando un punto en la curva es posible encontrar una inmersión canónica $C(k) \to J(k)$, donde el punto fijo se identifica como el cero del grupo. Consideremos ahora $(J(k);+;C(k))$ como una estructura de grupo abstracta (con un subconjunto distinguido). Mediante el uso de algunas técnicas de teoría de modelos, Zilber muestra que, para k algebraicamente cerrado, se puede recuperar a partir de estos datos el campo k y la curva C, salvo un isomorfismo de campos y una isogenía biyectiva de J, que, en característica 0 es un isomorfismo de variedades algebraicas, y en característica positiva puede ser vista como una “torsión de Frobenius”. A partir de tal interpretación, Zilber resuelve una conjetura de F. Bogomolov, M. Korotaev e Y. Tschinkel en [6, p. 3].

3. La estabilidad geométrica

En la prueba dada por Morley a la Conjetura de Loś, este introdujo y desarrolló algunas ideas importantes. Entre ellas, la más notable es el concepto de "rango de Morley". Este sencillo pero poderoso concepto, es la clave de la teoría de modelos moderna. *Grosso modo*, el rango de Morley es una abstracción del concepto de "dimensión" para cualquier teoría en matemáticas. Por ejemplo, cuando se estudian campos algebraicamente cerrados, el "rango de Morley" y el "grado de trascendencia" coinciden. Más aún, el trabajo de Morley fue la base de la teoría de la estabilidad que, según Pillay (ver la introducción de [37]) "es un conjunto de técnicas que se pueden desarrollar bajo unos supuestos sobre una teoría T para saber cuáles son los modelos de T". A modo de ejemplo, escribamos $I(T,\kappa)$ para el número de modelos no isomorfos de T con cardinal κ. Sea T una teoría contable y $\aleph_1$-categórica. Consideremos el problema de encontrar el número $I(T,\aleph_0)$. Es decir, queremos responder a la pregunta: ¿cuántos modelos contables existen para T? Morley demostró que $I(T,\aleph_0)\leq\aleph_0$. Años más tarde, J. Baldwin y A. Lachlan, demostraron en [38] que $I(T,\aleph_0)$ o es igual a 1 o bien a $\aleph_0$ (ver [37]).

Una de las personas que participó de manera activa en el desarrollo temprano de la teoría de estabilidad es Zilber, considerado por algunos como uno de los fundadores de la teoría, quien en la introducción de su trabajo [23] señala que:

- Es posible establecer una jerarquía de "perfección lógica" para las teorías de primer orden. En dicha jerarquía, las teorías no-contablemente categóricas ocupan la posición más alta.
- La principal característica de una teoría de la estabilidad es una teoría de la dimensión y, asociada a ella, una teoría de la dependencia. Tanto las teorías de dependencia como las de dimensión son similares a las que surgen en la teoría de campos.

La teoría de la estabilidad geométrica es una parte principal de la teoría de modelos geométrica y fue introducida en una serie de artículos por Zilber, Hrushovski, Pillay, G. Cherlin y muchos otros. Esta recibe su nombre dado a que en gran parte se ocupa de la clasificación modelo-teórica de estructuras en términos de cantidades de dimensión que pueden ser descritas en términos de nociones de geometría combinatoria. Esto nos obliga a mencionar la siguiente definición:

Definición 3.1 Un *matroide finitario* o *pregeometría* M es un par (M,cl) donde M es un conjunto no-vacío y cl es una función definida en 2^M, tal que para todo $A\subseteq M$ y $a,b\in M$ se verifican las siguientes condiciones:

i) **Reflexividad:** $A\subseteq \mathrm{cl}(A)$.

ii) **Carácter finito:** $\mathrm{cl}(A)$ coincide con $\bigcup\{\mathrm{cl}(A_0) : A_0 \text{ es un subconjunto finito de } A\}$.

iii) **Transitividad:** $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A))=\mathrm{cl}(A)$.

iv) **Intercambio:** Si $a\in \mathrm{cl}(A\cup\{b\})-\mathrm{cl}(A)$, entonces $b\in\mathrm{cl}(A\cup\{a\})$.

Sea M un modelo y $A\subseteq M$. Definimos la *clausura algebraica* de A, que denotamos por $\mathrm{acl}(A)$, como el conjunto de elementos de M que son solución de alguna fórmula con parámetros en el conjunto A, con sólo finitas soluciones. Consideremos que M es una estructura fuertemente minimal (es decir, cualquier subconjunto definible de M^n es finito o co-finito con cota uniforme) y consideremos que "$\mathrm{acl}(\cdot)$" es la función que envía $A\subseteq M$ a $\mathrm{acl}(A)$. La estructura resultante $\mathscr{M}=(M,\mathrm{acl})$ es una pregeometría y se define una buena noción de "dimensión (combinatoria)", dim, para subconjuntos de M en términos de acl. Como un ejemplo práctico para visualizar esta construcción, considere V un espacio vectorial y, así, $\mathrm{acl}(A)$ con $A\subseteq V$ es justamente el subespacio de V generado por combinaciones lineales (finitas) de elementos en A. De este modo, las condiciones i)-iii) se satisfacen naturalmente para (V,acl) y por tanto es un matroide finitario. Ahora bien, un ejemplo trivial se obtiene al considerar un conjunto infinito M sin estructura dada, para el que cualquier $A\subseteq M$, $\mathrm{acl}(A)=\bigcup_{a\in A}\mathrm{acl}(\{a\})$. De hecho, hasta finales de la década de los 80, los únicos ejemplos conocidos de pregeometrías no triviales eran localmente modulares, i.e., aquellas que satisfacen la condición $\dim(A\cup B)+\dim(A\cap B)=\dim(A)+\dim(B)$ para cualquier $A,B\subseteq M$; o no localmente modulares. Zilber observó que en todos los casos no triviales, la noción de dependencia obtenida era o bien la dependencia algebraica en la teoría de campos o bien la dependencia lineal en la teoría de espacios vectoriales. Esto, junto al Teorema débil de la tricotomía de Zilber, fue la base de la Conjetura de la tricotomía de Zilber (véase [39]):

Conjetura de tricotomía (Zilber, 1984): Si M es un conjunto fuertemente minimal y (M,acl) es el operador de clausura algebraica correspondiente a M, entonces la pregeometría (M,acl) es trivial, localmente modular, o no localmente modular. En particular, si los dos primeros casos no ocurren, entonces existe un campo algebraicamente cerrado k definible en M y al única estructura en k inducida por M es la mera estructura de campo.

Destacamos que se han demostrado varios casos positivos de la conjetura de Zilber en situaciones similares. Más aún, según [10, p. 79] "la más famosa de todas las tricotomías (aparte de la de Zilber) es la Tricotomía de Peterzil-Starchenko en el caso de las teorías o-minimales y el 'control geométrico' de las estructuras viene dado por la información 'diferencial abstracta' que puede extraer de la o-minimalidad de una teoría".

La "mala hora" de la Conjetura de la tricotomía llega cuando Hrushovski prueba en [9] que esta es falsa en general. Precisamente, Hrushovski muestra que existe un modelo fuertemente minimal y no localmente modular que no interpreta ningún grupo infinito. En cierto modo, la desaprobación de la conjetura de Zilber resultó más fructífera que una solución afirmativa. En efecto, en [9] el autor ofrece un nuevo método para construir estructuras estables y, en particular, estructuras fuertemente mínimales. Es importante mencionar que en este artículo, Hrushovski no usa técnicas o conceptos de la geometría y el contexto de ese trabajo es puramente combinatorio.

3.1. Geometrías de Zariski uno–dimensionales

A pesar de la refutación de Hrushovski, la Conjetura de tricotomía es válida para muchas clases importantes de estructuras matemáticas. Probablemente, la más importante de dichas clases es la clase de las "geometrías unidimensionales de Zariski". Estas estructuras fueron definidas y estudiadas inicialmente por Zilber bajo el nombre de *Z-estructuras* y con una configuración más general, "como una forma de aislar la mejor clase posible en la cima de la jerarquía de estructuras estables" según él mismo escribe en [23, p. 3], donde además indica que "las condiciones puramente lógicas no son suficientes para que la Conjetura de la tricotomía se cumpla, pero asumir algunas propiedades topológicas similares a la topología de Zariski sobre una curva algebraica suave sobre un campo algebraicamente cerrado podría remediar la situación".

Una herramienta fundamental en el desarrollo de la teoría de Zilber es la axiomatización de cómo la topología interactúa con la dimensión de Krull. De forma más precisa, una caracterización débil de *suavidad* de la geometría en cuestión permite una definición abstracta del espacio tangente (véase el Axioma (Z3) más adelante); esto fue suficiente para obtener la existencia de un campo definible en el año 1989, aunque, según [1, p. 12] tal resultado no tuvo mucho impacto en ese momento pues la condición de suavidad parecía muy restrictiva.

La clase de geometrías unidimensionales de Zariski fue introducida por Hrushovski y Zilber en [1]. A grandes rasgos, una geometría unidimensional de Zariski es un conjunto fuertemente minimal en el que tiene sentido una generalización plausible de la topología de Zariski sobre una curva algebraica suave. En el contexto de las geometrías de Zariski se demostró que la Conjetura de la tricotomía de Zilber es cierta. Se obtiene con esto una primera forma de clasificar las geometrías de Zariski unidimensionales: triviales, localmente modulares o no localmente modulares y no triviales. En estas últimas, siempre es posible interpretar un campo algebraicamente cerrado en el que la única estructura inducida es la propia estructura de campo. Sin embargo, el trabajo [1] no termina allí, adicionalmente, clasifica de manera mucho más fina y geométrica las geometrías de Zariski localmente modulares y las no triviales y no localmente modulares. Precisamente, los autores introducen el concepto de geometrías "amplia" y "muy amplia" y se prueba que las geometrías amplias son exactamente las localmente modulares y estas se pueden identificar como cubiertas finitas de curvas suaves. Para las geometrías muy amplias se prueba que son, en esencia, curvas suaves. En lo que resta de esta sección, mencionaremos los enunciados precisos de los resultados hasta aquí parafraseados.

Antes de continuar es preciso aclarar nuestra notación. Sean X,Y conjuntos. Entonces: $\mathrm{cl}(X)$ es la clausura topológica de X (i.e., el cerrado más pequeño respecto a la inclusión que contiene a X); $X \subseteq_{\mathrm{cl}} Y$ significa que X es un subconjunto cerrado de Y. $|X|$ como la cardinalidad de X. Dado cualquier $C \subseteq_{\mathrm{cl}} X^n \times X^m$, para $\vec{a} \in X^n$ ponemos $C(\vec{a}) := \{\vec{x} \in X^m : (\vec{a},\vec{x}) \in C\}$ y "dimensión" significa "dimensión de Krull".

Para el resto de este trabajo, cuando digamos "geometría de Zariski", el lector debe entender "geometría de Zariski de dimensión uno", ya que no trabajaremos con geometrías de dimensión mayor.

Definición 3.2 Una *geometría de Zariski* es un conjunto infinito D con una topología Noetheriana sobre cada $D, D^2, \ldots$ tal que los siguientes axiomas se cumplen:

(Z0)
- (Coherencia) Sea f_i un mapa de proyección $f_i(\vec{x}) = x_{\sigma(i)}$ (donde $\sigma(i)$ es el valor de una biyección $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$) o un mapa constante $f_i(\vec{x}) = c$. Entonces el siguiente mapa

$$\begin{array}{rcl} f: D^n & \to & D^m \\ \vec{x} & \mapsto & (f_1(\vec{x}),\ldots,f_m(\vec{x})) \end{array}$$

  es continuo.
- (Separabilidad) Los conjuntos diagonales $\Delta^n_{ij} := \{\vec{x} \in D^n : x_i = x_j\}$ son cerrados.

(Z1) (QE débil) Sea $C \subseteq_{\mathrm{cl}} D^n$ y $\pi_{nm} : D^n \to D^m$ un mapa de proyección, entonces hay un conjunto cerrado propio $F \subseteq_{\mathrm{cl}} \mathrm{cl}(\pi_{nm}(C))$ tal que $\pi_{nm}(C) \subseteq_{\mathrm{cl}} \mathrm{cl}(\pi_{nm}(C)) - F$.

(Z2)
- (Irreducibilidad) D es irreducible.
- (Unidimensionalidad) D es *uniformemente unidimensional*, i.e., si $C \subseteq_{\mathrm{cl}} D^n \times D$ existe N tal que para todo $\vec{a} \in D^n$,
  $|C(\vec{a})| \leq N$ o $C(\vec{a}) = D$.

(Z3) (Teorema de la dimensión) Sea U un conjunto cerrado irreducible en D^n y Δ^n_{ij} la diagonal ij, entonces cualquier componente de $U \cap \Delta^n_{ij}$ tiene dimensión $\geq \dim(U) - 1$.

En relación a la definición anterior, es bueno mencionar que: el Axioma (Z0) relaciona las distintas topologías sobre las potencias de D y relaja la suposición de que la topología sobre D^n sea la topología del producto de (D,τ_1). Pero, ¿por qué no asumir sobre cada potencia la topología producto, si esto haría (en teoría) la definición más fácil? Una razón importante es que tal supuesto excluiría varios modelos importantes, por ejemplo si k es un campo algebraicamente cerrado, la topología de Zariski en $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ no es la topología producto de Zariski sobre $\mathbb{A}^1_k$. Respecto al Axioma (Z1), mencionamos que es una forma débil de la eliminación de cuantificadores (de hecho es posible probar que toda geometría de Zariski elimina cuantificadores en su lenguaje natural, que definiremos en breve).

Hay muchos ejemplos de geometrías de Zariski en matemáticas. En efecto, los conjuntos infinitos sin estructura son ejemplos triviales de geometrías de Zariski (ver [40, Cap. 4]). Asimismo, como fue probado por Zilber, las variedades complejas compactas y fuertemente minimales son ejemplos de geometrías Zariski. Por otro lado, Hrushovski y Sokolović probaron que los campos diferencialmente cerrados son también ejemplos de este tipo de geometrías (ver [12, Teo. 8.3.17]), entre otros. Los ejemplos por excelencia de geometrías de Zariski son las curvas algebraicas suaves. El teorema de clasificación principal de la teoría clásica es que bajo condiciones apropiadas de "amplitud", la afirmación reciproca es verdadera.

Definición 3.3 Sea D una geometría de Zariski.

i) Un *curva plana* sobre D es un conjunto unidimensional irreducible en D^2.

ii) Un *familia de curvas* sobre D consiste en un conjunto irreducible cerrado $E \subseteq_{\mathrm{cl}} D^n$ y un subconjunto irreducible cerrado C del producto $E \times D^2$ tal que el conjunto $C(\vec{e})$ es una curva plana para $\vec{e}$ genérico en E[1].

iii) Decimos que D es *amplia* si existe una familia de curvas planas $C \subseteq E \times D^2$ tal que para cualquier $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ en D^2 existe una curva $C(\vec{e})$ que pasa por $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$.

iv) Decimos que D es *muy amplia* si existe una familia de curvas $C \subseteq E \times D^2$ sobre D que hacen de D una geometría amplia y tal que para cualquier $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in D^2$ existe una curva $C(\vec{e})$ que pasa sólo por uno de ellos.

Ejemplo 3.4 Sea k un campo algebraicamente cerrado y considere la familia de curvas

$$C = \left\{ ((a,b,c),(x,y)) \in \mathbb{A}^3_k \times \mathbb{A}^2_k : ax + by + c = 0 \right\}.$$

Entonces, para cada $(a,b,c) \in \mathbb{A}^3_k - \{0\}$ tenemos una línea recta $C(a,b,c) : ax + by + c = 0$ en $\mathbb{A}^2_k$.

La familia de curvas $(C, \mathbb{A}^3_k)$ es muy amplia. En efecto, sean (x_1,y_1), (x_2,y_2) puntos distintos de $\mathbb{A}^2_k$, considere $(y_2 - y_1, x_1 - x_2, x_2y_1 - x_1y_2) \in \mathbb{A}^3_k - \{0\}$. Es fácil ver que (x_1,y_1) y (x_2,y_2) pertenecen a la recta $C(y_2 - y_1, x_1 - x_2, x_2y_1 - x_1y_2)$ con ecuación

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0.$$

Entonces la familia es amplia. Ahora veamos que es muy amplia. Tenemos tres casos posibles:

<u>Caso 1.</u> Los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son tales que $x_1 = x_2$ pero $y_1 \neq y_2$.

Entonces, la línea $C(0,1,-y_1) : y - y_1 = 0$ pasa por (x_1,y_1) pero no por (x_2,y_2).

<u>Caso 2.</u> Los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son tales que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 = y_2$.

En este caso $C(1,0,-x_1) : x - x_1 = 0$ pasa por (x_1,x_2) pero no por (x_2,y_2).

<u>Caso 3.</u> Los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son tales que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$.

La línea $C(0,1,-y_1) : y - y_1 = 0$ pasa por (x_1,y_1) pero no por (x_2,y_2).

Por lo tanto la familia descrita es muy amplia □

Hemos visto una familia muy amplia de curvas, pero en realidad también podemos dar ejemplos de familias que no son amplias (y por tanto tampoco muy amplias). A saber:

Ejemplo 3.5 Sea k un campo algebraicamente cerrado y consideremos $\mathbb{P}^2_k$ el espacio 2-proyectivo sobre k. Fijemos una recta $\ell : ax + by + cz = 0$ y supongamos que $c \neq 0$. Sea C la familia de rectas proyectivas paralelas a ℓ. La condición de "amplitud" de la definición falla para esta familia ya que $(0 : 0 : 1)$ no puede estar separada de ningún punto de $\mathbb{P}^2_k$ por curvas de C, ya que cualquier líneas de este tipo pasa por $(0 : 0 : 1)$. En realidad, la condición de "amplitud" también falla para esta familia. □

El lector seguramente habrá notado que las definiciones anteriores se basan en propiedades de naturaleza topológica. Sin embargo, estamos interesados en las propiedades de primer orden de estas estructuras, por lo que introducimos los lenguajes necesarios para expresar estas propiedades. En efecto, si D es una geometría de Zariski, consideraremos dos lenguajes para D:

i) El *lenguaje completo* de D, denotado $\mathscr{L}_{\mathrm{full}}(D)$, que contiene un símbolo de relación n-ario para cada subconjunto cerrado de D^n, para todo n en $\mathbb{N}$.

ii) El *lenguaje natural* de D, que es el sublenguaje $\mathscr{L}_{\mathrm{nat}}(D)$ de $\mathscr{L}_{\mathrm{full}}(D)$ que consiste en todos los subconjuntos invariantes bajo todos los automorfismos de D^n para todo n.

En lo que respecta al lenguaje completo de D, note que los singuletes de D son cerrados, de donde $\mathscr{L}_{\mathrm{full}}(D)$ incluye

[1] Si X es irreducible, decimos que una propiedad P se cumple *genéricamente* en X, si P se cumple para todos los elementos de X fuera de un subconjunto cerrado, o, equivalentemente, un punto *genérico* de X satisface la propiedad P.

símbolos para las constantes de D, en consecuencia, un automorfismo de D debe preservar las constates y así, será la identidad (en el lenguaje completo), es decir, D no tiene automorfismos no triviales en el $\mathscr{L}_{\text{full}}(D)$. Ahora, es un poco improbable que en el lenguaje natural haya símbolos de relación distintos de la igualdad, sin embargo en el Teorema 3.8 quedará en claro que este lenguaje no es trivial, en el sentido que es suficientemente expresivo como para interpretar estructuras complejas como campos y curvas, sin siquiera requerir constantes para tal interpretación.

Ya que una geometría de Zariski D se puede considerar como una estructura de primer orden en su lenguaje natural o su lenguaje completo, es posible probar para ella propiedades como eliminación de cuantificadores, ω-estabilidad (sea lo que sea que esto signifique), etc.

Por otro lado, la información geométrica sobre D como el hecho de que sea amplia o muy amplia, se puede traducir en términos puramente lógicos empleando recursos como internalidad y externalidad de tipos y mapas. Con estas ideas, se prueba que una geometría de Zariski es amplia si y sólo si es localmente modular, y que si D no es trivial y no localmente modular, entonces hay un campo algebraicamente cerrado k interpretable en D tal que la única estructura que la geometría D induce sobre k es la mera estructura de campo. En otras palabras, la tricotomía de Zilber se vale en el contexto de geometrías de Zariski.

Yendo más lejos, Zilber y Hrushovski (ver Teorema A y Proposición 1.1 en [1]) muestran:

Teorema 3.6 *Si D es una geometría de Zariski muy amplia, entonces existe una curva algebraica suave C sobre un campo algebraicamente cerrado k tal que C es isomorfa a D como geometrías de Zariski. Más aún, el campo k es único salvo un isomorfismo de campos y la curva C es única salvo un isomorfismo de curvas.* □

En otras palabras, la clase de geometrías de Zariski muy amplias es justamente la clase de geometrías de Zariski correspondientes a curvas suaves sobre campos algebraicamente cerrados. Ahora, en relación a las geometrías de Zariski amplias, éstas corresponden a cubiertas finitas de alguna línea proyectiva (ver [1, Teo. B]), más concretamente:

Teorema 3.7 *Si D es una geometría de Zariski amplia, entonces existe un campo algebraicamente cerrado k y un morfismo sobreyectivo $f : D \to \mathbb{P}^1_k$ que envía conjuntos construibles a conjuntos algebraicamente construibles. Además, existe un subconjunto cofinito de D donde f es un morfismo cerrado de Zariski.* □

Canónicamente hablando, las geometrías de Zariski (amplias) son en esencia curvas algebraicas, salvo por fibras finitas. Esto es (ver [1, Teo. B']):

Teorema 3.8 *Sea D una geometría de Zariski amplia. Entonces existe un campo algebraicamente cerrado k, una curva algebraica suave C sobre k, y un morfismo sobreyectivo de Zariski finito-a-uno (es decir, la imagen inversa de todo punto en C es finita) $f : D \to C$. Todos, C, k y f son definibles sin parámetros en el lenguaje natural de D.* □

Note que el Teorema 3.8 nos responde, por cierto, esa pregunta un poco no evidente de que el lenguaje natural contenga símbolos no lógicos distintos de la mera igualdad. De otro lado, "este teorema es verdadero en su totalidad en el contexto de las superficies complejas compactas. Esto es consecuencia del Teorema de Existencia de Riemann. Sin embargo, no existe ningún análogo de este teorema en el contexto de las geometrías de Zariski" [23]. En efecto (ver [1, Teo. C]):

Teorema 3.9 *Existe una geometría de Zariski amplia pero no muy amplia que no es interpretable en ningún campo algebraicamente cerrado.* □

Con esto cerramos nuestra presentación de los resultados de Zilber y Hrushovski.

4. Tendencias recientes y otras líneas de Investigación

En esta sección mencionaremos temas relativos a las geometrías de Zariski que se han desarrollado en años recientes. No daremos preliminares sobre ninguno de los temas que mencionamos, pues hacerlo extendería este trabajo más allá de lo deseado, ni entraremos en discusiones detalladas de ningún tema. En su lugar, dejaremos una buena cantidad de referencias para el lector interesado.

4.1. Z-estructuras

En el trabajo [41] Zilber introdujo el concepto de *Z-estructura* y en [23] dicha noción se refina para generalizar la noción de geometría de Zariski a dimensiones superiores. En este entorno se dispone de un análogo parcial del Teorema 3.6. Afirma que "si D es una geometría de Zariski casi fuertemente minimal de dimensión 2 o más, y existe una familia de curvas en D tal que dos puntos cualesquiera están separados por una curva y dos puntos cualesquiera se encuentran conjuntamente en alguna curva, entonces existe un subconjunto abierto denso de D isomorfo a una variedad algebraica", veáse [23, Cap. 4].

4.2. Geometrías de Zariski analíticas

Recientemente, Zilber introdujo las estructuras analíticas de Zariski con el fin de encontrar una generalización de las geometrías de Zariski, y la principal diferencia entre las estructuras de Zariski y las estructuras analíticas de Zariski es el supuesto de Noetherianidad en las topologías. En efecto, las estructuras analíticas de Zariski no se suponen Noethetherianas. Como señala Zilber "la ausencia de esa hipótesis hace más complicada la definición de estructura analítica de Zariski: hay que distinguir entre subconjuntos cerrados generales de M^n y los que tienen mejores propiedades topológicas (los *analíticos*). Uno de los principales resultados sobre las geometrías analíticas de Zariski afirma que cualquier estructura analítica compacta de Zariski es Noetheriana". Remitimos al lector a [23, Cap. VI] como una buena fuente sobre el tema.

Sea k un campo y sea $k^{\times}$ su grupo multiplicativo. Las posibles compactaciones modelo teóricas de una cubierta de $k^{\times}$ se discuten en [42] por L. Smith. Varias de estas compactificaciones se muestran como cubiertas de variedades tóricas y las estructuras correspondientes se muestran como estructuras analíticas de Zariski en un subconjunto abierto denso. Otros ejemplos de estructuras analíticas de Zariski son construidas en [43] por M. Gavrilovich a partir de cubiertas de variedades abelianas.

4.3. Clases elementales quasi-minimales

En el trabajo [44] K. Kangas estudió las clases elementales abstractas que surgen de una estructura de pregeometría cuasiminimal y desarrolló una teoría de independencia en $\mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$, trabajando con el *operador de clausura acotada*. Además, Kangas generalizó el Teorema de la configuración de grupos de Hrushovski a su caso y, en un intento de generalizar las geometrías de Zariski al contexto de las clases cuasiminimales, proporcionó una axiomatización para las *estructuras tipo Zariski*. Mediante el uso de su teorema de configuración de grupos, Kangas demostró que cualquier pregeometría no trivial (obtenida a partir del operador de clausura acotado) interpreta un grupo. Para dar un ejemplo de una estructura tipo Zariski, Kangas utilizó la cubierta del grupo multiplicativo de un campo algebraicamente cerrado.

En [45] Kangas muestra que si D es una estructura tipo Zariski y la pregeometría canónica obtenida del operador de clausura acotada no es localmente modular, entonces D interpreta un campo algebraicamente cerrado o un grupo no clásico. De este modo, los principales teoremas de [44, 45] corresponden a los análogos de la tricotomía que Zilber y Hrushovski mostraron en [1, § 6].

4.4. Álgebras afines de Azuyama

En la tesis doctoral [46], V. Solanki definió una subcategoría adecuada de "álgebras de Azumaya afines" y construyó un functor desde esta categoría a la categoría de estructuras de Zariski (en el sentido de [23]). Solanki también construyó la base de una teoría de presheaves de estructuras topológicas y proporciona ejemplos de estructuras en un parámetro genérico. En este trabajo también definió la categoría $\mathscr{C}_{EA}$ de álgebras equivariantes y para cada $M \in \mathscr{O}b(\mathscr{C}_{EA})$ se definió una teoría de primer orden. En este caso, se demostró que, bajo condiciones adecuadas, la categoricidad incontable y la eliminación del cuantificador se cumplen. En particular, Solanki probó que los modelos de estas teorías son estructuras de Zariski.

4.5. Especializaciones de geometrías de Zariski

Las completaciones y extensiones para las especializaciones de las geometrías de Zariski se estudian en la tesis de maestría de S. Pinzón en la Universidad de Los Andes [11].

Es bueno mencionar que la teoría de las especializaciones en el contexto de la geometría algebraica es bien conocida y entendida. Los textos [47] y [48] son buenas referencias sobre el tema. Sin embargo, fuera del campo de la geometría algebraica las especializaciones no son bien comprendidas. Esta noción es especialmente importante en el desarrollo de las geometrías de Zariski, pues son una pieza crucial en la prueba de la Conjetura de tricotomía para geometrías de Zariski. Un tipo especial de especializaciones son las *especializaciones universales* cuya teoría es estudiada en [49] por A. Onshuus y Zilber. U. Efem estudió especializaciones de campos algebraicamente cerrados y variedades definibles en ellos en [50] y en su tesis doctoral [51] Efem estudia la pregunta "¿cuándo una especialización es κ-universal?"

Aquí también podemos mencionar el trabajo conjunto de Efem y Zilber [52] en que se estudian las propiedades de existencia y unicidad de extensiones de especializaciones universales de una estructura base de Zariski a su cubierta regular.

4.6. Geometrías de Zariski sobre unarios

En la tesis doctoral [40], A. Albalahi axiomatizó la teoría de unarios. A saber, un *unario* es una estructura M en un lenguaje $\mathscr{L}$ cuyo único símbolo no lógico es un símbolo de función de aridad uno f. En realidad, Albalahi clasificó los unarios fuertemente minimales M (sobre un lenguaje $\mathscr{L} = \{f\}$) donde f^M es inyectivo y da axiomatizaciones completas para ellos. En [40, Cap. 5] Albalahi demostró la eliminación de cuantificadores para estas teorías después de añadir algunos símbolos de relación a $\mathscr{L}$. Dando una topología a las estructuras subyacentes demostró que estas topologías satisfacen los axiomas (Z0)-(Z3) ([40, Cap. 6]). También recomendamos el trabajo de Albalahi como fuente auto contenida para ejemplos no elementales de las geometrías de Zariski.

4.7. Espacios lineales abstractos

En [53], D. Sustretov estudia el problema de definir ciertas geometrías de Zariski en la teoría de campos algebraicamente cerrados. En este caso, Sustretov axiomatizó una clase de estructuras, llamadas "espacios lineales abstractos", que no son más que una reducción común de estas geometrías de Zariski. Mediante esta descripción, Sustretov describe lo que es una interpretación de un espacio lineal abstracto en un campo algebraicamente cerrado.

Además, se dan las condiciones necesarias y suficientes para que una geometría cuántica de Zariski (definida por Zilber en 2008, véase [54]) sea definible en un campo algebraicamente cerrado. Se intenta extender los resultados descritos anteriormente al entorno analítico-complejo y se proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para que una geometría de Zariski cuántica suave tenga un modelo analítico complejo.

4.8. Espacios algebraicos de tipo finito

En el trabajo [55] C. Ruiz estudia los espacios algebraicos de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado utilizando geometrías de Zariski. Mediante el uso de la eliminación de imaginarios para la teoría de campos algebraicamente cerrados, la eliminación débil de imaginarios para las geometrías de Zariski unidimensionales y una versión fuerte del teorema de la tricotomía para las geometrías de Zariski, el autor da una nueva demostración de algunos resultados sobre la representabilidad de los espacios algebraicos. Además, Ruiz ofrece un estudio de los esquemas no reducidos: dado un esquema no reducido X, considere la estructura reducida X_{red} asociada a X. Si X_{red} es una variedad algebraica, existe una geometría de Zariski que le corresponde. En este entorno Ruiz estudia la pregunta "¿cuánta información sobre X contiene la teoría de X_{red}?".

4.9. Geometrías de Zariski y mecánica cuántica

El estudio de las relaciones entre la física y las geometrías de Zariski lo inició Zilber y varios de sus resultados en el área se encuentran en su libro [23]. Sin embargo, vale la pena mencionar aquí el reciente trabajo de M. Zanussi [56] en el se menciona una aplicación de las estructuras no clásicas de Zariski al cálculo de fórmulas de mecánica cuántica mediante un método de aproximación estructural desarrollado por Zilber.

4.10. Un invariante por isomorfismos: el género

En el trabajo [57] se explora la posibilidad de clasificar de manera más fina la clase de geometrías de Zariski muy amplias empleando una noción de género: sea D una geometría de Zariski muy amplia. Decimos que D tiene *género g* si es isomorfa a la geometría de Zariski de una curva algebraica C de género g. (En este sentido, una geometría de Zariski de género 0 es aquella que es isomorfa a la geometría de Zariski de $\mathbb{P}^1_k$ donde k es un campo algebraicamente cerrado. Similarmente, una geometría de Zariski de género 1 es aquella que es isomorfa a la geometría de Zariski de una curva elíptica, etc.) El género de una geometría de Zariski muy amplia es bien definido en virtud del Teorema 3.6. Ahora bien, como el género de una curva suave es invariante bajo isomorfismos (de curvas suaves) se deduce que el género de una geometría de Zariski es invariante bajo isomorfismos (de geometrías de Zariski). En relación a esta noción, existe la siguiente pregunta:

"¿cómo definir el género de una geometría de Zariski sin apelar a la noción algebraica de género?"

A pesar de no tener respuesta para la pregunta anterior y de que la definición carece de un método explícito para hallar el género de una geometría de Zariski, esta puede emplearse para clasificar (mediante morfismos) geometrías de Zariski muy amplias.

En [57] se muestra que si C, C' son curvas algebraicas suaves quasi-proyectivas sobre un campo algebraicamente cerrado k y $h : C \to C'$ es un morfismo inyectivo de geometrías de Zariski, existe un morfismo racional de variedades algebraicas $l : C \to C'$. Este resultado extiende la Proposición 1.1 de [1] y puede usarse para derivar una versión del Teorema de Riemann-Hurwitz para geometrías de Zariski. A saber, en geometría algebraica, este teorema afirma que si C, C' son curvas algebraicas quasi-proyectivas suaves sobre un campo algebraicamente cerrado k y existe un morfismo $f : C \to C'$ no-constante, entonces $\text{gen}(C') \leq \text{gen}(C)$, donde $\text{gen}(C)$ es el género de la curva algebraica C (véase [28, p. 299]); en términos de geometrías de Zariski se sigue que: si D y D' son geometrías de Zariski muy amplias y existe un campo algebraicamente cerrado k interpretable en ambas geometrías y un morfismo inyectivo $f : D \to D'$, entonces $\text{gen}(D') \leq \text{gen}(D)$. En particular, si D es una geometría de Zariski muy amplia y k un campo algebraicamente cerrado interpretable en D y si existe un morfismo inyectivo $f : \mathbb{P}^1_k \to D$, entonces $\text{gen}(D) = 0$.

Esta idea de definir el género de geometrías de Zariski muy amplias y emplearlo para clasificarlas "está sobre el tintero" y resta mucho de estudiar en torno a ella. Varias preguntas como la expresividad en primer orden de esta propiedad o versiones plausibles del Teorema de Hurwitz están abiertas y fueron tratadas parcialmente en [57].

Agradecimientos

Agradecemos los valiosos comentarios y correcciones proporcionados por los jurados anónimos. Estos permitieron fortalecer significativamente la legibilidad, solidez y coherencia de los argumentos presentados.

Financiación:

Los autores recibieron apoyo parcial del CODI (Universidad de Antioquia, UdeA), a través del proyecto identificado con el acta No: 2020-33713.

Referencias

[1] Hrushovski E. & Zilber B. (1996). *Zariski Geometries*, Journal of the American Mathematical Society, Vol. 9, No. 1. http://www.jstor.org/stable/2152839.

[2] Hrushovski E. & Zilber B. (1993). *Zariski Geometries*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 28, No. 2. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1993-00380-X.

[3] Marker D. (1998). *Zariski geometries*. In: Bouscaren E. (eds). *Model Theory and Algebraic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics, vol 1696. Springer, Berlin, Heidelberg, 1998. https://doi.org/10.1007/978-3-540-68521-0_7.

[4] Voevodsky, V. A. (1991) *étale topologies of schemes over fields of finite type over* $\mathbb{Q}$. Mathematics of the USSR-Izvestiya **37.3**: 511 pgs.

[5] Zilber B. (2014). *A curve and its abstract Jacobian*, Int. Math. Res. Not. IMRN. **5**. 1425–1439.

[6] F. A. Bogomolov, M. Korotaev & Yu. Tschinkel. (2010). *A Torelli theorem for curves over finite fields*, Pure Appl. Math. Q., 1, pp. 245-294. https://doi.org/10.4310/PAMQ.2010.v6.n1.a7.

[7] Kollar, Janos. et al. (2021) *Topological reconstruction theorems for varieties*. Preprint: arXiv:2003.04847v3

[8] Pillay, A. (1996). *Review on Hrushovski Ehud and Zilber Boris. Zariski geometries*, Journal of the American Mathematical Society, vol. 9, pp. 1-56. The Journal of Symbolic Logic, 64, pp 906-908 doi:10.2307/2586511.

[9] Hrushovski E. (1993). *A new strongly minimal set* in Annals of Pure and Applied Logic 62(2).:147-166. https://doi.org/10.1016/0168-0072(93).90171-9.

[10] Villaveces A. (2011) *La Tricotomía de Zilber: una breve introducción geométrica.* EVM.

[11] Pinzón S. *Completaciones y especializaciones de geometrías de Zariski*. (2016). MSc thesis, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá-Colombia. https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/13959/u754351.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[12] Marker D. (2002). *Model Theory: an introduction*. Springer-Verlag GTM, New York. https://doi.org/10.1007/b98860.

[13] Chang C. and Keisler H. (1973). *Model Theory*, Dover Books on Mathematics reprinting, 2013.

[14] Casanovas E. *The recent History of Model Theory*. (Universidad de Barcelona.) http://www.ub.edu/modeltheory/documentos/HistoryMT.pdf.

[15] Marjca A. & Toffalori C. (2003). *A guide to classical and Mordern Model Theory*. Kluwer Acaemic Press. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0812-9.

[16] Aschenbrenner M. https://www.math.ucla.edu/~matthias/223m.1.09s/.

[17] Tent K. & Ziegler M. (2012). *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic, vol. 40. Cambridge University Press, United Kingdom.

[18] Gödel K. (1930). *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*. Monatshefte für Mathematik (in German). 37 (1): 349-360. doi:10.1007/BF01696781.

[19] Löwenheim L. (1915). *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*. Math. Ann. 76, 447-470. https://doi.org/10.1007/BF01458217.

[20] König D. (1927). *Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche*, Acta Sci. Math. (Szeged). (in German). (3(2-3).).: 121-130.

[21] Skolem Th. (1920). *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, Videnskapsselskapet Skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse, 4: 1-36.

[22] Maltsev A. (1936). *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik*, Matematicheskii Sbornik, Novaya Seriya, 1(43). (3).: 323-336. http://mi.mathnet.ru/msb5392.

[23] Zilber B. (2010). *Zariski Geometries: Geometry from the Logicians point of view*. CUP. London Mathematical Society.

[24] Vaught R. (1954). *Applications to the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability*, Indagationes Mathematicae, 16: 467-472, MR 0063993.

[25] Loś Jerzy (1955). *Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*. In: *Mathematical interpretation of formal systems*, pp. 98-113. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[26] Morley M. (1965). *Categoricity in Power*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 114, No. 2, 114 (2).: 514-538. https://doi.org/10.2307/1994188.

[27] Shelah S. (1974). *Categoricity of uncountable theories*, Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1971). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 25, Providence, R.I.: American Mathematical Society, pp. 187-203.

[28] Hartshorne R. (2006). *Algebraic Geometry*, Springer

Graduated Texts in Mathematics 52. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0.

[29] Grothendieck A. (1966). *éléments de géométrie algébrique. IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III.*, Inst. Hautes études Sci. Publ. Math., 28. http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/.

[30] Ax J. (1968). *The elementary theory of finite fields*, Annals of Mathematics, Second Series, *88* (2).: 239-271, doi:10.2307/1970573, JSTOR 1970573.

[31] Hilbert D. (1893). *Über die vollen Invariantensysteme*. Math. Ann. 42, pp. 313-373. https://doi.org/10.1007/BF01444162.

[32] Robinson A. (1963). *Introduction to model theory and the metamathematics of algebra*, North-Holland, Amsterdam. MR *26*:4911.

[33] Abramovich D. & Voloch F. (1992). *Towards a proof of the Mordell-Lang conjecture in characteristic p*, Int. Math. Res. Not. 2, 103-115. https://doi.org/10.1155/S1073792892000126.

[34] Hrushovski E. (1996). *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, JAMS *9*, 667-690. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-96-00202-0.

[35] Bouscaren E. (1998). *Proof of the Mordell-Lang conjecture for function fields*. In: Bouscaren E. (eds). Model Theory and Algebraic Geometry. Lecture Notes in Mathematics, vol 1696. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-68521-0_10.

[36] Abdolahzadi R. & Zilber B. (2020). *Definability, interpretations and étale fundamental groups*. arXiv: 1906.05052[math.LO].

[37] Pillay A. (1983). *An Introduction to Stability Theory*. Dover Books on Mathematics reprinting 2008.

[38] Baldwin, J. T. & A. H. Lachlan. (1971). *On Strongly Minimal Sets*. The Journal of Symbolic Logic, vol. 36, no. 1, pp. 79-96. https://doi.org/10.2307/2271517.

[39] Zilber B. (1984). *The structure of models of uncountably categorical theories*, Proc. Internat. Congr. Math. (Warsaw, 1983). vol. 1, North-Holland, Amsterdam, pp. 359-368.

[40] Albalahi A. (2019). *Zariski Geometries on Strongly Minimal Unars*. PhD thesis at University of East Anglia. https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/72730.

[41] Zilber B. (1993). *Model theory and algebraic geometry*, In: Proc. 10th Easter Conference on Model Theory (wendisch Rietz, 1993). Seminarberichte 93, Humboldt Univ, Berlin, 93-117.

[42] Smith L. (2008). *Toric Varieties as Analytic Zariski Structures*, PhD Thesis, University of Oxford.

[43] Gavrilovich, M. (2012). Covers of Abelian varieties as analytic Zariski structures. Annals of Pure and Applied Logic, 163(11), 1524-1548.

[44] Kangas K. (2018). *Finding groups in Zariski-like structures*. PhD thesis at Departament of Mathematics and Statistics at University f Helsinki. arXiv:1404.6811v1.

[45] Kangas K. (2017). *Finding a field in a Zariski-like structure*. arXiv:1502.03225v3[math.LO].

[46] Solanki] Solanki V. (2011). Zariski Structures in Noncommutative Algebraic Geometry and Representation Theory. PhD Thesis, University of Oxford. V. (2011). *Zariski Structures in Non-commutative Algebraic Geometry and Representation Theory*. PhD Thesis, University of Oxford.

[47] Lang S. (1955). *Introduction to Algebraic Geometry*. Dover Books on Mathematics reprinting, 2019.

[48] Weil A. (1946). *Foundations of Algebraic Geometry*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 29, Providence, R.I.: American Mathematical Society, *MR* 0023093.

[49] Onshuus A. & Zilber B. (2011). *The first order theory of the universal specializations*, available at http://www.logique.jussieu.fr/modnet/Publications/Preprint%20server/papers/355/355.pdf.

[50] Efem U. (2013). *Specializations and Algebraically closed fields*. arXiv:1304.3699v2[math.LO].

[51] Efem U. (2017). *The Theory of Specializations.* PhD thesis, University of Oxford. https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid:3c14ca5d-c3d7-4233-93d3-81a4e20c4d1f.

[52] Efem, U., and Zilber, B. (2023). On the Theory of Specialisations of Regular Covers of Zariski Structures. arXiv preprint arXiv:2302.08542.

[53] Sustretov D. (2012). *Non-algebraic Zariski geometries*, PhD Thesis, University of Oxford.

[54] Zilber B. (2008). *A class of quantum Zariski geometries*. In Z. Chatzidakis, H. Macpherson, A. Pillay, and A. Wilkie, editors, *Model Theory with applications to algebra and analysis, I and II*. Cambridge University Press.

[55] Ruiz C. *Zariski geometries and commutative Algebraic geometry*. Manuscript.

[56] Zanussi, M. (2021). Zariski Geometries and Quantum Mechanics. PhD thesis. Boise State University.

[57] Torres J. (2020) *Understanding Zariski geometries*. MSc Thesis. Universidad de Antioquia. Colombia.