Vol. 15 (núm 1) pp. 97- 103
Enero - Junio 2024
https://doi.org/10.19053/01217488.v15.n1.2024.15963

Anillo no local inmerso en un producto de cuerpos

Non-local ring embedded in a direct product of fields

Claudia Granados-Pinzón[1], Astrid L. Contreras-Mendoza[2], Wilson Olaya-León[3]

Resumen

En este artículo estudiamos la inmersión de R, un anillo conmutativo con unidad no local, en un producto directo de cuerpos. En el producto de los cuerpos cocientes de R dados por sus ideales maximales. El homomorfismo φ de R en el producto directo de cuerpos cocientes está definido por la propiedad universal del producto y su núcleo es $Ker\varphi = \mathscr{J}(R)$, donde $\mathscr{J}(R)$ es el radical de Jacobson de R. Si $\mathscr{J}(R) = \{0\}$, el homomorfismo es inyectivo en el caso infinito, y en el caso finito probaremos que φ es un isomorfismo. Además, consideramos el caso donde R es un anillo total de fracciones con un número finito de ideales maximales y mostraremos que el homomorfismo de R en el producto de sus localizados es inyectivo. Más aún, si R es de la forma $\mathbb{Z}_n$, con $n \neq 0$, o R es un $K-$álgebra finita, con K un cuerpo, tenemos que este homomorfismo es un isomorfismo.

Palabras Clave: Anillo total de fracciones, cuerpo cociente, $K-$álgebra finita, localización, producto directo de anillos, radical de Jacobson

Abstract

In this paper we study the immersion of a non-local commutative ring with unity R into a direct product of fields. In the product of quotient fields defined by the maximal ideals of R. The ring homomorphism φ from R into direct product of quotient fields is defined by the universal property of the direct product. Let $Ker\varphi$ be the kernel of φ, then $Ker\varphi = \mathscr{J}(R)$, where $\mathscr{J}(R)$ is the Jacobson radical of the ring R. If $\mathscr{J}(R) = \{0\}$, the ring homomorphism is injective in the infinite case and in the finite case, we will proof φ is an isomorphism. In addition, we consider R a total ring of fractions with finite number of maximal ideals and show that the ring homomorphism from R into a direct product of localizations is injective. Even more, if R have the form $\mathbb{Z}_n$, with $n \neq 0$, or R is a finite dimensional $K-$algebra with K a field, we have that this ring homomorphism is an isomorphism.

Keywords: Total ring of fractions, field of fractions, finite dimensional $K-$algebra, localization, direct product of rings, Jacobson radical

Recepción: 08-Mayo-2023
Aceptación: 04-Agosto-2023

[1]Universidad Industrial de Santander
[1,*]Universidad Industrial de Santander. Dirección electrónica: cigranad@uis.edu.co

1. Introducción

Sean R un anillo conmutativo con unidad, y $\mathfrak{p} \neq \langle 1 \rangle$ un ideal de R. $\mathfrak{p}$ es primo, si se cumple la siguiente condición: $ab \in \mathfrak{p}$ implica que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$; además un ideal $\mathfrak{m} \neq \langle 1 \rangle$ de R es maximal si no existe ningún ideal $\mathfrak{a}$ tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset \langle 1 \rangle$.

El anillo R tiene asociado el espacio topológico

$$Spec(R) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ es ideal primo de } R\}$$

llamado *espectro primo* de R y dotado de la topología de Zariski con base de abiertos $\{D(f)\}_{f \in R}$, donde $D(f) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : f \notin \mathfrak{p}\}$. El espectro primo de un anillo conmutativo relaciona dos áreas de la matemática, el álgebra conmutativa y la topología.

El complemento de $D(f)$ se llama variedad de f,

$$V(f) = Spec(R) \setminus D(f) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : f \in \mathfrak{p}\}.$$

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, entonces $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$.

En particular, se tiene el espectro maximal de R dado por

$$Max(R) = \{\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \text{ es ideal maximal de } R\} \subset Spec(R).$$

Note que $R/\mathfrak{m}$ es un cuerpo para todo $\mathfrak{m} \in Max(R)$ y consideremos el producto de cuerpos

$$\prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m}.$$

Por la propiedad universal del producto existe un homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & R & \to & \prod_{\mathfrak{m} \in Max(R)} R/\mathfrak{m} \\ & a & \mapsto & (a+\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in Max(R)} \end{array}.$$

En general φ es no inyectiva pues $Ker(\varphi) = \mathscr{J}(R)$, donde $\mathscr{J}(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Max(R)} \mathfrak{m}$ es el radical de Jacobson de R.

Cuando R es un dominio entero, R siempre está inmerso en el cuerpo de fracciones de R. Note que si R es un anillo local, es decir R tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}$, entonces R no está necesariamente inmerso en el cuerpo de fracciones; por ejemplo el anillo local $\mathbb{Z}_8$ no está inmerso en su cuerpo de fracciones, $\mathbb{Z}_2$.

La inmersión de un anillo en un cuerpo es un tema de interés en álgebra desde 1936 cuando Malcev publicara "On the immersion of an algebraic ring into a field" [9]. A partir de allí se han hecho estudios sobre la inmersión de un anillo en un anillo con división que es una estructura con menos condiciones que la de cuerpo [2, 8].

Nosotros queremos estudiar la inmersión de un anillo conmutativo con unidad, no local, R en el producto de cuerpos, donde los cuerpos son cocientes de R con sus ideales maximales. Además si el anillo R tiene un número finito de ideales maximales, tenemos que el homomorfismo canónico φ es un isomorfismo de anillos. Por otra parte, consideramos el caso donde R es un anillo total de fracciones con un número finito de ideales maximales y mostramos que el homomorfismo de R en el producto de sus localizados es inyectivo. Más aún, si R es de la forma $\mathbb{Z}_n$, con $n \neq 0$, o si R es un $K-$álgebra finita con K un cuerpo tenemos que este homomorfismo de anillos es un isomorfismo. Nuestro interés por estos anillos está fundamentado en querer resolver el problema abierto de caracterizar la recta proyectiva sobre anillos, en particular, queremos caracterizar la recta proyectiva sobre anillos totales de fracciones. En este sentido, hemos estudiado las $K-$álgebras finitas y el producto de cuerpos, pues ellos son anillos totales de fracciones [5, 6, 7].

2. Preliminares

En esta sección se incluyen resultados que hemos estudiado en [5, 6, 7], pero aquí se han incluido importantes ejemplos que harán más fácil la lectura del artículo.

2.1. Anillos totales de fracciones

Definición 2.1 *Un anillo R es un* anillo total de fracciones *si sus elementos son invertibles o divisores de cero.*

Ejemplo 2.2 *Un cuerpo es un anillo total de fracciones y un dominio entero que no es un cuerpo no es anillo total de fracciones.*

Ejemplo 2.3 *$\mathbb{Z}_n[x]/\langle x^2 \rangle$ con $n \neq 0$, es un anillo total de fracciones. En efecto, considere $R = \mathbb{Z}_n[x]/\langle x^2 \rangle = \mathbb{Z}_n[\varepsilon]$, donde $\varepsilon^2 = 0$, con las operaciones suma y producto definidas por*

$$(a+b\varepsilon)+(c+d\varepsilon) = (a+c)+(b+d)\varepsilon;$$
$$(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon) = ac+(ad+bc)\varepsilon$$

para $a+b\varepsilon,\ c+d\varepsilon \in R$. Como $\mathbb{Z}_n$ es un anillo total de fracciones, tenemos dos afirmaciones:

1. *$(a+b\varepsilon)$ es divisor de cero si y solo si $a \in \mathbb{Z}_n$ es divisor de cero. En efecto, para todo $a+b\varepsilon \in R$ divisor de cero, existe $a'\varepsilon \in R$ tal que*

   $$(a+b\varepsilon)(a'\varepsilon) = 0$$

   si y solo si para todo $a \in \mathbb{Z}_n$, existe $a' \in \mathbb{Z}_n$ tal que $aa' = 0$.

2. *$(a+b\varepsilon)$ es invertible si y solo si $a \in \mathbb{Z}_n$ es invertible. En efecto, para todo $a+b\varepsilon \in R$ invertible, existe $a^{-1}-ba^{-2}\varepsilon \in R$ tal que*

   $$(a+b\varepsilon)(a^{-1}-ba^{-2}\varepsilon) = 1$$

si y solo si para todo $a \in \mathbb{Z}_n$, existe $a^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ tal que $aa^{-1} = 1$.

2.2. Producto directo de cuerpos

Sean I un conjunto arbitrario y $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de cuerpos. Se llama $R = \prod_{i\in I} R_i$ al anillo producto con las operaciones suma y producto componente a componente. Sea $\pi_i : R \to R_i$ la proyección i-ésima, es decir para $f = (f(i))_{i\in I} \in R$, $\pi_i(f) = f(i)$.

La siguiente proposición caracteriza los elementos de un producto de cuerpos.

Proposición 2.4 *Sean $R = \prod_{i\in I} R_i$ y $f = (f(i))_{i\in I} \in R$. Entonces*

1. *f es invertible si y sólo si, para todo $i \in I$, $\pi_i(f) = f(i) \neq 0$.*
2. *f es un divisor de cero si y sólo si existe $i \in I$ tal que $\pi_i(f) = 0$.*

Demostración *1.* Si para todo $i \in I$, $f(i) \neq 0$, entonces para cada $i \in I$, tenemos que $\frac{1}{f(i)} \neq 0$. De esta forma, definimos el inverso de f como $f^{-1} = (\frac{1}{f(i)})_{i\in I} \in R$. El recíproco es inmediato.

2. Si existe $i \in I$ tal que $f(i) = 0$ entonces definimos $g = (g(i))_{i\in I} \in R$ como $g(i) = 1$ y $g(j) = 0$ para todo $j \neq i$. Luego, $g \neq 0$ y $f \cdot g = 0$. El recíproco es inmediato.

2.2.1. Anillo de fracciones

Sean R un anillo y S un subconjunto multiplicativo de R, es decir, $1 \in S$ y si $s,t \in S$ entonces $st \in S$. Se define en $R \times S$ la relación de equivalencia

$$(f,g) \sim (u,v) \Leftrightarrow (fv - gu)s = 0$$

para algún $s \in S$. En el conjunto $R_S = (R \times S)/\sim$, se denota a la clase de equivalencia de (f,g) como $\frac{f}{g}$ y se definen las operaciones suma y producto así,

$$\frac{f}{g} + \frac{u}{v} = \frac{fv + gu}{gv} \quad \text{y} \quad \frac{f}{g}\frac{u}{v} = \frac{fu}{gv}.$$

Estas operaciones están bien definidas y hacen de R_S un anillo conmutativo con unidad, donde el cero es $\frac{0}{s}$, para $s \in S$ y la unidad es $\frac{s}{s}$, para $s \in S$. Más aún, se tiene un homomorfismo canónico de anillos $\varphi : R \to R_S$ dado por $\varphi(f) = \frac{f}{1}$ que en general no es inyectivo. El anillo R_S se llama *anillo de fracciones* o *localización de R por S*.

Sea R un producto de cuerpos, es decir, $R = \prod_{i\in I} R_i$, donde R_i es un cuerpo. Por (Proposición 3.5, [7]), se tiene el isomorfismo entre el cuerpo $R/\mathfrak{m}$ y el anillo de fracciones o localización $R_\mathfrak{m}$, para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

Por otra parte, como R es un producto de cuerpos, entonces

$$\mathrm{Max}(R) = \mathrm{Spec}(R).$$

Ejemplo 2.5 *Se considera $R = \mathbb{R}^3$, entonces $Spec(\mathbb{R}^3) = Max(\mathbb{R}^3)$ y*

$$Max(\mathbb{R}^3) = \{\langle(1,0,1)\rangle, \langle(1,1,0)\rangle, \langle(0,1,1)\rangle\}.$$

Proposición 2.6 *(Corolario 3.7, [7]) Sean K un cuerpo finito, I un conjunto arbitrario y $R = K^I$. Para todo $\mathfrak{m} \in Max(R)$,*

$$R_\mathfrak{m} \simeq R/\mathfrak{m} \simeq K.$$

La prueba de la Proposición 2.6 es constructiva, para comprender mejor este resultado se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7 *Consideremos el cuerpo finito $K = \mathbb{Z}_3$ y el producto $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Los ideales maximales de R son*

$$M_1 = \langle(\overline{1},\overline{0})\rangle \;\text{ y }\; M_2 = \langle(\overline{0},\overline{1})\rangle.$$

Puesto que M_1 y M_2 son ideales primos, $S_1 = R \setminus M_1$ y $S_2 = R \setminus M_2$ son los conjuntos multiplicativos de R. El anillo de fracciones de R por S_1 está dado por

$$\begin{aligned} R_{S_1} &= \left\{ \frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, (\overline{c},\overline{d}) \notin M_1 \right\}, \\ &= \left\{ \frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, \overline{c} \neq 1 \right\}, \\ &= \left\{ \frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{0},\overline{1})}, \frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{0},\overline{1})}, \frac{(\overline{2},\overline{2})}{(\overline{0},\overline{1})} \right\}, \end{aligned}$$

y el anillo de fracciones de R por S_2 es

$$\begin{aligned} R_{S_2} &= \left\{ \frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, (\overline{c},\overline{d}) \notin M_2 \right\}, \\ &= \left\{ \frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, \overline{d} \neq 1 \right\}, \\ &= \left\{ \frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{1},\overline{0})}, \frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{1},\overline{0})}, \frac{(\overline{2},\overline{2})}{(\overline{1},\overline{0})} \right\}. \end{aligned}$$

Por la propiedad universal de los anillos de fracciones, se definen los siguientes homomorfismos de anillos $\varphi_1 : R_{S_1} \longrightarrow K$, con $\varphi_1\left(\frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{0},\overline{1})}\right) = \overline{0}$, $\varphi_1\left(\frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{0},\overline{1})}\right) = \overline{1}$, $\varphi_1\left(\frac{(\overline{2},\overline{2})}{(\overline{0},\overline{1})}\right) = \overline{2}$ y el homomorfismo $\varphi_2 : R_{S_2} \longrightarrow K$, con $\varphi_2\left(\frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{1},\overline{0})}\right) = \overline{0}$, $\varphi_2\left(\frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{1},\overline{0})}\right) = \overline{1}$, $\varphi_2\left(\frac{(\overline{2},\overline{2})}{(\overline{1},\overline{0})}\right) = \overline{2}$. Luego, φ_1 y φ_2 son biyectivas y en consecuencia, $R_{S_1} \simeq K$ y $R_{S_2} \simeq K$. Además $R/\langle(\overline{1},\overline{0})\rangle \simeq K$ y $R/\langle(\overline{0},\overline{1})\rangle \simeq K$ como se indica en la Proposición 2.6.

2.3. K-álgebras finitas

Se dice que R es un *$K-$álgebra finita* si R es un álgebra conmutativa con unidad y de dimensión finita como $K-$espacio vectorial. Existen, salvo isomorfismos, tres álgebras de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$, $\mathbb{P} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2-1\rangle}$, $\mathbb{D} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2\rangle}$. Esto es debido a que en una extensión de grado 2 de $\mathbb{R}$,

$$A = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+bx+c\rangle}$$

se pueden dar tres casos según x^2+bx+c tenga dos raíces imaginarias, dos raíces reales distintas o una raíz doble. Los conjuntos $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ son, respectivamente, los números complejos, los números paracomplejos y los números duales. Observe que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, mientras que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{D}$ no lo son pues $\mathbb{P}$ tiene divisores de cero y $\mathbb{D}$ tiene además elementos nilpotentes.

Por (Proposición 2.2, [5]), tenemos que un $K-$álgebra finita se descompone en una suma directa de $K-$álgebras finitas locales. Además, por (Proposición 4.2, [6]), un $K-$álgebra finita es un anillo total de fracciones.

Lema 2.8 *(Lema 2.3, [5]) Sea $R = \bigoplus_{i=1}^{r} R_i$ un K-álgebra finita donde cada R_i es un K-álgebra finita local. Para $i = 1,\ldots,r$ sean $\mathfrak{m}_i$ el ideal maximal de R_i. Entonces:*

1. *$Max(R) = \{M_1,\ldots,M_r\}$ donde $M_i = \prod_{j=1}^{r} m_j$ con $m_j = R_j$, para todo $j \neq i$ y $m_i = \mathfrak{m}_i$.*
2. *Para todo $i = 1,\ldots,r$ se tiene que $R_{M_i} \simeq R_i$.*

Ejemplo 2.9 *Considere el $\mathbb{Z}_2$-álgebra*

$$R = \frac{\mathbb{Z}_2[x,y]}{\langle x^2,xy,y^2\rangle} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{x},\overline{y},\overline{1+x},\overline{1+y}\}.$$

R tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m} = \langle x,y\rangle$ con orden de $\mathfrak{m}$ igual a 2.

Ejemplo 2.10 *Considere el $\mathbb{Z}_2$-álgebra $A = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$ y el producto*

$$R = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}.$$

Los ideales maximales de R son

$$M_1 = \langle(\overline{1},\overline{x})\rangle \text{ y } M_2 = \langle(\overline{x},\overline{1})\rangle.$$

Puesto que M_1 y M_2 también son ideales primos de R, $S_1 = R\setminus M_1$ y $S_2 = R\setminus M_2$ son conjuntos multiplicativos de R. El anillo de fracciones de R por S_1 está dado por

$$\begin{aligned} R_{S_1} &= \left\{\frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, (\overline{c},\overline{d}) \notin M_1\right\}, \\ &= \left\{\frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, \overline{c} \neq 1\right\}, \\ &= \left\{\frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{x},\overline{1})}, \frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{x},\overline{1})}, \frac{(\overline{x},\overline{x})}{(\overline{x},\overline{1})}, \frac{(\overline{1+x},\overline{1+x})}{(\overline{x},\overline{1})}\right\}. \end{aligned}$$

Definimos $\varphi_1 : R_{S_1} \longrightarrow A$, donde $\varphi_1\left(\frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{x},\overline{1})}\right) = \overline{0}$, $\varphi_1\left(\frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{x},\overline{1})}\right) = \overline{1}$, $\varphi_1\left(\frac{(\overline{x},\overline{x})}{(\overline{x},\overline{1})}\right) = \overline{x}$ y $\varphi_1\left(\frac{(\overline{1+x},\overline{1+x})}{(\overline{x},\overline{1})}\right) = \overline{1+x}$.

Análogamente, el anillo de fracciones de R por S_2 está dado por

$$\begin{aligned} R_{S_2} &= \left\{\frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, (\overline{c},\overline{d}) \notin M_2\right\}, \\ &= \left\{\frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{c},\overline{d})} : (\overline{a},\overline{b}) \in R, \overline{d} \neq 1\right\}, \\ &= \left\{\frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{1},\overline{x})}, \frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{1},\overline{x})}, \frac{(\overline{x},\overline{x})}{(\overline{1},\overline{x})}, \frac{(\overline{1+x},\overline{1+x})}{(\overline{1},\overline{x})}\right\}. \end{aligned}$$

De igual forma se define $\varphi_2 : R_{S_2} \longrightarrow A$, donde $\varphi_2\left(\frac{(\overline{0},\overline{0})}{(\overline{1},\overline{x})}\right) = \overline{0}$, $\varphi_2\left(\frac{(\overline{1},\overline{1})}{(\overline{1},\overline{x})}\right) = \overline{1}$, $\varphi_2\left(\frac{(\overline{x},\overline{x})}{(\overline{1},\overline{x})}\right) = \overline{x}$ y $\varphi_2\left(\frac{(\overline{1+x},\overline{1+x})}{(\overline{1},\overline{x})}\right) = \overline{1+x}$. Por lo anterior, $R_{M_1} \simeq R_{M_2} \simeq \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$, como se menciona en el Lema 2.8.

3. Inmersión de un anillo no local en un producto de cuerpos

Sea R un anillo y consideremos el producto de cuerpos

$$\prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{m}.$$

Por la propiedad universal del producto existe un homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & R & \to & \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{m} \\ & a & \mapsto & (a+\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} \end{array}.$$

En general φ es no inyectiva pues $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathscr{J}(R)$, donde $\mathscr{J}(R)$ es el radical de Jacobson de R. En efecto,

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) \\ &\Leftrightarrow \quad a \in \bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} \mathfrak{m} = \mathscr{J}(R). \end{aligned}$$

Así, si $\mathscr{J}(R) = 0$ entonces φ es un homomorfismo inyectivo.

Proposición 3.1 *Considere*

$$O(R) = \{f \in R : \exists g \neq 0 \text{ tal que } fg = 0\}$$

y

$$I(R) = \{f \in R : \exists g \in R \text{ tal que } fg = 1\}.$$

Entonces,

1. *$\varphi(I(R)) = I(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.*
2. *$\varphi(a) \in O(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$, para todo $a \in R$, si y sólo si existe $\mathfrak{m} \in Max(R)$ tal que $a \in \mathfrak{m}$.*
3. *$\varphi(O(R)) \subset O(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.*
4. *Si R es anillo total de fracciones entonces $\varphi(O(R)) = O\left(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcap \varphi(R)$. Además, el recíproco se verifica si $\mathscr{J}(R) = \{0\}$.*

Demostración *1.* Si $a \in R$ es invertible entonces $a \notin \mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, luego $a+\mathfrak{m} \neq 0$ en $R/\mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m}$, por tanto $\varphi(a)$ es invertible en $\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{m}$. Recíprocamente, sea $b \in I(\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$, existe $a \in R$ tal que $b = \varphi(a)$ y $\varphi(a)$ es invertible en $\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{m}$ entonces $a+\mathfrak{m} \neq 0$ en $R/\mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, por tanto $a \notin \mathfrak{m}$ para todo $\mathfrak{m}$, luego a es invertible y $b \in \varphi(I(R))$.

2. Inmediato porque un elemento de un producto de cuerpos es cero o divisor de cero si y solo si tiene una componente nula.

3. Un elemento que es cero o divisor de cero está contenido en algún maximal y por tanto aplicamos el ítem *(2)*.

4. Sea $\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{m}$, por la Proposición 2.4, $\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}$ es un anillo total de fracciones, entonces:

$O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcup I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}$ y
$O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) = \emptyset$.
Por tanto, se tiene que:
(i) $\varphi(R) = (O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcup I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m})) \bigcap \varphi(R)$

$= (O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)) \bigcup (I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R))$
y

(ii) $(O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)) \bigcap (I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R))$
$\subset O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) = \emptyset$.

Además, por el ítem (1), $\varphi(I(R)) = I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$ y por el ítem (3), $\varphi(O(R)) \subset O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.
$\Rightarrow$: Por hipótesis, R es un anillo total de fracciones, entonces $R = O(R) \cup I(R)$ y $O(R) \cap I(R) = \emptyset$. En consecuencia,

$$\varphi(O(R)) = O\left(\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)} R/\mathfrak{m}\right) \bigcap \varphi(R).$$

$\Leftarrow$: Sea $a \in R$. Vamos a ver que R es anillo total de fracciones, para esto veamos primero que si $a \notin I(R)$ entonces $\varphi(a) \notin I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$.
En efecto, si $\varphi(a) \in I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$ entonces, por el ítem (1), existe $b \in R$ tal que $\varphi(b) = \varphi(a)$ y $b \in I(R)$, por tanto $\varphi(b-a) = 0$. Como φ es inyectiva ya que $\mathscr{J}(R) = \{0\}$ entonces $b = a$ y $a \in I(R)$.
Ahora, si $a \notin I(R)$, entonces $\varphi(a) \notin I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R)$ pero $\varphi(a) \in \varphi(R)$ luego, $\varphi(a) \notin I(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m})$. En consecuencia, $\varphi(a) \in O(\prod_{\mathfrak{m}} R/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(R) = \varphi(O(R))$. Luego, existe $b \in O(R)$ tal que $\varphi(a) = \varphi(b)$, esto es, $\varphi(a-b) = 0$ y como φ es inyectiva, $a = b$ y $a \in O(R)$. Así, R es un anillo total de fracciones.

Observación 3.2 *El anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ cumple que $O(\mathbb{Z}) = \emptyset$ pues $\mathbb{Z}$ no tiene divisores de cero, además el conjunto $O(\prod_{\mathfrak{m}\in Max(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}/\mathfrak{m}) \bigcap \varphi(\mathbb{Z})$ es infinito ya que los ideales maximales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $\mathfrak{m} = \langle p \rangle$ con p número primo.*

Proposición 3.3 *Sea R un anillo. Entonces, $Max(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$ y $\mathscr{J}(R) = \{0\}$ si y solo si $R = K_1 \times \cdots \times K_r$, donde K_i es un cuerpo para todo $i = 1, \ldots, r$.*

Demostración. Sea

$$\begin{array}{llll} \varphi: & R & \to & R/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_r \\ & a & \mapsto & (a+\mathfrak{m}_1, \ldots, a+\mathfrak{m}_r) \end{array}$$

Como $\mathscr{J}(R) = \{0\}$, φ es inyectiva. Vamos a ver que φ es sobreyectiva para ello se debe probar que para todo $(a_1, ..., a_r) \in R^r$ existe $a \in R$ con $a_i + \mathfrak{m}_i = a + \mathfrak{m}_i$ para todo i. En efecto, para todo $i \neq j$, $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = R$, luego existe un residuo común, es decir, exite $a \in R$ tal que $a + \mathfrak{m}_i = a_i + \mathfrak{m}_i$, para todo i.

En consecuencia, φ es sobreyectiva y R es un producto de cuerpos.

Por otra parte, si $R = K_1 \times \cdots \times K_r$ entonces, por (Proposición 2.5, [7]), $\mathrm{Max}(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$ con $\mathfrak{m}_i = \{a \in R : a(i) = 0\}$. Luego, $\mathscr{J}(R) = \{0\}$.

Ejemplo 3.4 *Considere el anillo de las funciones continuas $R = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ y sea $x \in [0,1]$. En consecuencia, $\mathfrak{m}_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$ es un ideal maximal, $\bigcap_{x\in[0,1]} \mathfrak{m}_x = \{0\}$ y como $\mathscr{J}(R) \subseteq \bigcap_{x\in[0,1]} \mathfrak{m}_x$, entonces $\mathscr{J}(R) = \{0\}$. Pero R no es producto de cuerpos pues su espectro maximal tiene cardinalidad no finita.*

Ejemplo 3.5 *Considere el $\mathbb{R}$-álgebra*

$$R = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^4 + 3x^2 + 2 \rangle} = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle (x^2+1)(x^2+2) \rangle}.$$

Los ideales maximales de R son $M_1 = \langle x^2+1 \rangle$ y $M_2 = \langle x^2+2 \rangle$. Note que $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$ y $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+2 \rangle}$ son cuerpos. Además, $R_{M_1} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+2 \rangle}$ y $R_{M_2} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$. Tenemos un ejemplo de la Proposición 3.3, si se define el isomorfismo

$$\psi : R \longrightarrow R_{M_1} \times R_{M_2}.$$

4. Inmersión de un anillo en su producto de localizados

En esta sección se demuestra que dado R un anillo total de fracciones con un número finito de ideales maximales, existe una inmersión de este en su producto de localizados. Para esto inicialmente probamos el Lema 4.1.

Consideremos el anillo $\mathbb{Z}_n$ de los residuos módulo n donde $n = p_1^{r_1} ... p_n^{r_n}$. Los ideales maximales en $\mathbb{Z}$ corresponden a los ideales maximales en $\mathbb{Z}$ que contienen al ideal generado por n, $\langle n \rangle$. Esto es, $\langle n \rangle \subset \langle p \rangle \subset \mathbb{Z}$. Esto significa que $p|n$, así que los ideales maximales en $\mathbb{Z}_n$ son precisamente $\mathfrak{m}_i := p_i\mathbb{Z}_n$, donde $i = 1, ..., n$. Ahora podemos enunciar el lema que nos lleva al objetivo de esta sección.

Lema 4.1 *([4], pág. 3) $(\mathbb{Z}_n)_{p_i} \simeq \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$, con $n \neq 0$ y $p_i^{r_i}|n$, es decir, $n = p_i^{r_i} b$, para algún entero b.*

Demostración. Considere el homormorfismo canónico

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}_n &\longrightarrow \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}, \\ \bar{x}_n &\longmapsto \bar{x}_{p_i^{r_i}}. \end{aligned}$$

Queremos probar que $(\mathbb{Z}_n)_{p_i} \simeq \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}}$, para esto, veamos que ψ satisface la propiedad universal de la localización. Es importante aclarar que estamos localizando respecto a $S = \mathbb{Z}_n/p_i$ que consiste de todos lo elementos $\bar{x}_n$ tales que p_i no divide a x.
Si p_i no divide a x, entonces x es invertible módulo $p_i^{r_i}$, y de esto se concluye que $\psi(\bar{x}_n) \in (\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}})^*$ para todo $\bar{x}_n \in S$.

Ahora supongamos que $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow T$ es un homorfismo de anillos tal que $f(\bar{x}_n)$ es invertible en T para todo $\bar{x}_n \in S$. Por hipótesis, podemos considerar la identidad,

$$\overline{p_1}_n^{r_1} \cdots \overline{p_i}_n^{r_i} \cdots \overline{p_k}_n^{r_k} = \bar{n}_n = \bar{0}_n.$$

Aplicando f, se obtiene

$$f(\overline{p_1}_n)^{r_1} \cdots f(\overline{p_i}_n)^{r_i} \cdots f(\overline{p_k}_n)^{r_k} = \bar{0}_T.$$

Es decir, $\overline{p_j}_n \in S$ para todo $i \neq j$, así $f(\overline{p_j}_n)$ son invertibles en T y al multiplicar la última identidad por los inversos, obtenemos

$$f\left(\overline{p_i^{r_i}}_n\right) = \bar{0}_T$$

y por lo tanto,

$$(\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}})/\mathbb{Z}_n \subset ker(f).$$

Esto implica que f se factoriza de modo único por el cociente de $\mathbb{Z}_n$ por $(\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}})/\mathbb{Z}_n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & T \\ & \frac{\mathbb{Z}_n}{(\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}})/\mathbb{Z}_n} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Por el Tercer teorema de isomorfismo, sabemos que

$$\frac{\mathbb{Z}_n}{(\mathbb{Z}_{p_i^{r_i}})/\mathbb{Z}_n} \simeq \mathbb{Z}_{p_i^{r_i}},$$

y se concluye que ψ satisface la propiedad universal de la localización $(\mathbb{Z}_n)_{p_i}$.

Proposición 4.2 *Sean R un anillo total de fracciones y $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ sus ideales maximales, entonces*

$$\begin{aligned} \Phi : R &\longrightarrow R_{\mathfrak{m}_1} \times \ldots \times R_{\mathfrak{m}_r} \\ a &\longmapsto \left(\frac{a}{1}, \ldots \frac{a}{1}\right). \end{aligned}$$

es un homorfismo inyectivo.

Demostración. Si $\Phi(a) = \left(\frac{a}{1}, \ldots, \frac{a}{1}\right) = (0, \ldots, 0)$ entonces $\frac{a}{1} = 0$ en cada $R_{\mathfrak{m}_i}$. Luego existe $b \notin \mathfrak{m}_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$ tal que $ab = 0$. Como R es un anillo total de fracciones, b no es divisor de cero. Luego $a = 0$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Proposición 4.3 *Sean $R = \mathbb{Z}_n$ con $n \neq 0$ y $Max(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$. Entonces,*

$$\Phi : R \longrightarrow R_{\mathfrak{m}_1} \times \ldots \times R_{\mathfrak{m}_r}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Puesto que $n = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$ entonces por el Teorema chino del resto,

$$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}.$$

Además, por el Lema 4.1, sabemos que $(\mathbb{Z}_n)_{p_i} \simeq \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$ para $i = 1, \ldots, r$. Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n &\simeq (\mathbb{Z}_n)_{p_1} \times \ldots \times (\mathbb{Z}_n)_{p_r} \\ &\simeq R_{\mathfrak{m}_1} \times \ldots \times R_{\mathfrak{m}_r} \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Max}(R) = \{\mathfrak{m}_1 = \langle p_1 \rangle, \ldots, \mathfrak{m}_r = \langle p_r \rangle\}$.

Proposición 4.4 *Sean R un K-álgebra finita y $Max(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$. Entonces,*

$$\Phi : R \longrightarrow R_{\mathfrak{m}_1} \times \ldots \times R_{\mathfrak{m}_r}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Como R es un K-álgebra finita, por (Proposición 2.2, [5]), $R = \bigoplus_{i=1}^r R_i$ donde cada R_i es un K-álgebra finita local y puesto que $\mathrm{Max}(R) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$, por el Lema 2.8, $R_{\mathfrak{m}_i} \simeq R_i$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Así, $\Phi : R \longrightarrow R_{\mathfrak{m}_1} \times \ldots \times R_{\mathfrak{m}_r}$ es un isomorfismo.

Ejemplo 4.5 *Considere el $\mathbb{Z}_2$-álgebra*

$$A = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2 - 1 \rangle} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{x}\}.$$

Los ideales maximales de A son $\mathfrak{m}_1 = \langle x-1 \rangle$ y $\mathfrak{m}_2 = \langle x+1 \rangle$. Entonces, $A = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2-1 \rangle} = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x-1 \rangle} \times \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x+1 \rangle}$. Note que $A_{\mathfrak{m}_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x+1 \rangle}$ y $A_{\mathfrak{m}_2} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x-1 \rangle}$. Así, tenemos el isomorfismo de la Proposición 4.4.

5. Conclusiones

Si R es un dominio entero, es conocido que R está inmerso en el cuerpo de fracciones de R. La inmersión de un anillo en un cuerpo o en un producto de cuerpos ha sido de mucho interés en álgebra en los últimos años. En este artículo nosotros consideramos R, un anillo conmutativo con unidad, no local, y logramos caracterizar cuándo la inmersión es un isomorfismo.

El homomorfismo φ de R en el producto directo de cuerpos cocientes está definido por la propiedad universal del producto y su núcleo es $Ker\varphi = \mathscr{J}(R)$, donde $\mathscr{J}(R)$ es el radical de Jacobson de R. Si $\mathscr{J}(R) = \{0\}$, el homomorfismo φ es inyectivo en el caso infinito y en el caso finito probamos que φ es un isomorfismo. Además, logramos caracterizar la imagen de las unidades y divisores de cero de R a través de φ.

Por otra parte, cuando R es un anillo total de fracciones con un número finito de ideales maximales mostramos que el homomorfismo de R en el producto de sus localizados es inyectivo. Más aún, si R es de la forma $\mathbb{Z}_n$, con $n \neq 0$, vimos que el homomorfismo de anillos es un isomorfismo y tuvimos el mismo resultado si R es un $K-$álgebra finita con K un cuerpo.

Referencias

[1] M.F. Atiyah e I.G. Macdonald, "Anillos e ideales", *Introducción al álgebra conmutativa*. Editorial Reverté S. A.: Barcelona, 1980, pp 1-18.

[2] P. M. Cohn, "On the Embedding of Rings in Skew Fields", Proceedings of the London Mathematical Society, vol. s3, no. 11, pp 511-530, 1961, https://doi.org/10.1112/plms/s3-11.1.511

[3] C. Granados-Pinzón, "Álgebras finitas sobre un cuerpo. La recta proyectiva", (Tesis doctoral), Departamento de Álgebra, análisis matemático, geometría y topología, Universidad de Valladolid, Valladolid, 2015.

[4] A, Beshenov, Localización de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. [Online] México: Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), 2018. Disponible en: https://cadadr.org/teaching/san-salvador/2018-algebra/localizacion-de-znz.pdf

[5] C. Granados-Pinzón y W. Olaya-León, "K-álgebras finitas conmutativas con unidad", Ingeniería y Ciencia, vol. 12, no. 24, pp. 31-49, 2016. https://doi.org/10.17230/ingciencia.12.24.2

[6] C. Granados-Pinzón C. y W. Olaya-León, "Anillos totales de fracciones y anillos de Hermite", Ciencia en Desarrollo, vol. 11, no. 2, pp. 131-140, 2020. https://doi.org/10.19053/01217488.v11.n2.2020.10223

[7] C. Granados-Pinzón, W. Olaya-León y S. Pinzón-Durán, "Estimación del cardinal del espectro maximal de un producto infinto de cuerpos", Ciencia en Desarrollo, vol. 9, no. 2, pp. 83-93, 2018. https://doi.org/10.19053/01217488.v9.n2.2018.5946

[8] J. L. Fisher, "Embedding Free Algebras in Skew Fields", Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 30, no. 3, pp. 453-458, 1971. https://doi.org/10.2307/2037715

[9] A. Malcev, "On the immersion of an algebraic ring into a field", Mathematische Annalen, vol. 113, pp. 686-691, 1937. https://doi.org/10.1007/BF01571659