CÁLCULO DE DERIVADAS EN ALGUNOS GRUPOS TOPOLÓGICOS

CALCULUS OF DERIVATIVES IN SOME TOPOLOGICAL GROUPS

HÉCTOR ANDRÉS GRANADA
Matemático, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, *hagranadad@unal.edu.co*

SIMEÓN CASANOVA TRUJILLO
Matemáticas, M.Sc, Profesor, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, *scasanovat@unal.edu.co*

Recibido para revisar septiembre 10 de 2007, aceptado Marzo 28 de 2008, versión final Julio 30 de 2008

RESUMEN: En este artículo se muestra a traves de ejemplos, la forma como se calculan derivadas en grupos topológicos. En cada uno de ellos se deben resolver ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.

PALABRAS CLAVE: Grupo topológico, homomorfismo, diferenciación en grupos topológicos.

ABSTRACT: This article shows how to calculate derivatives in topological groups trough examples. In each of them one should solve ordinary or partial differential equations.

KEYWORDS: Topological group, homomorphism, differentiability in topological groups.

1. INTRODUCCIÓN

La derivada de Carathéodory para funciones $f:R\to R$ (R denota el conjunto de los números reales) le permitió a Acosta y Delgado generalizar esta a funciones $f:R^n\to R^m$ y mostrar su equivalencia con la derivada de Fréchet [1]. Con base en este último trabajo, Acosta generalizó la derivada de Carathéodory a grupos topológicos [2]. Tenemos así una forma de hacer cálculo diferencial en grupos topológicos. Sin embargo, en [2] no se muestra explícitamente un ejemplo en el que se calculen derivadas en grupos topológicos. En [3] se calculan derivadas para una función $f:R\to G$, donde G es un grupo que describiremos más adelante. En este artículo se retomará el trabajo hecho en [3] y se calcularán derivadas para funciones $f:G\to R$ y $f:G\to G$.

También se hará el cálculo de derivadas para un tipo particular de funciones $f:\Omega\to\Omega$ siendo $\Omega=(M_{2\times2}(R),+)$ el grupo aditivo de las matrices de tamaño 2×2.
En general, el cálculo de derivadas en grupos topológicos conduce a la solución de ecuaciones diferenciales.

2. PRELIMINARES

En esta sección se presenta la definición de derivada en grupos topológicos dada en [2]. Para llegar a ella, se hace necesario los siguientes comentarios:

1. El espacio $\widetilde{Hom}(G,H)$ corresponde al conjunto de todos los homomorfismos continuos de G en H dotado de la topología compacto-abierta. Esta topología se describe como sigue:

Sean G y H grupos topológicos Hausdorff. Si A es un subconjunto compactode G y V es un subconjunto abierto de H, se denota por (A,V) el conjuntode todas las funciones continuas $g : G \rightarrow H$ tales que $g(A) \subset V$.
La topología compacto-abierta es la que tiene como sub-base la colección $\{(A,V)\}$ donde G es localmente compacto.

2. Un grupo G es divisible si para todo $g \in G$ y $m \in N$ (N denota el conjunto de los números naturales), la ecuación $x^m = g$ (en notación multiplicativa) tiene solución.

Definición 2.1. Sean G y H grupos topológicos Hausdorff. Una aplicación $f : G \rightarrow H$ es diferenciable en $a \in G$, si existe $\phi : G \rightarrow \widetilde{Hom}(G,H)$ continua en a y tal que

$$f(x)f(a)^{-1} = \phi(x)[xa^{-1}]$$

Si esta igualdad se da y $\phi(a)$ es única, la derivada de f en a es $\phi(a)$, y escribimos $f'(a) = \phi(a)$.

En la definición anterior, la igualdad debe ser válida en alguna vecindad del punto a.
La operación del lado derecho es una evaluación y la notación es tomada de [2], pues es allí donde se da por primera vez una definición de derivada en grupos topológicos.
En [3] se dan condiciones suficientes para la unicidad de la derivada:

Sean G y H grupos topológicos Hausdorff, G localmente compacto y divisible. Supóngase además que para todo $x \in G$, $\lim\limits_{m \rightarrow +\infty} x^{1/m} = e$. Si $f : G \rightarrow H$ es diferenciable en $a \in G$, entonces $f'(a)$ es única.

Se ve de la definición de derivada, que $f'(a)$ es un homomorfismo. Por lo tanto, para hacer cálculo diferencial en grupos topológicos, se debe empezar por calcular homomorfismos.

3. CÁLCULO DE HOMOMORFISMOS

En esta sección se hará el cálculo de ciertos homomorfismos, para usarlos en la próxima sección con el fin de calcular derivadas.

3.1 Consideremos el conjunto

$$G = \{(a,b) : a,b \in R, a > 0\}$$

dotado de la ley de composición interna

$$(a,b) * (x,y) = (ax, b + ay)$$

La dupla $(G,*)$ es un grupo (no abeliano), donde el módulo es la pareja ordenada $(1,0)$ y el inverso de (a,b) es $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$. Si se considera en G la topología inducida por la usual Υ de R^2, se tiene que la tripla $(G,*,\Upsilon)$ es un grupo topológico.

3.1.1 Homomorfismos de G en R

Sea $h : G \rightarrow R$ un homomorfismo. Entonces,

$$h[(x,y)(u,v)] = h(x,y) + h(u,v) \qquad (1)$$

Se tiene además la condición inicial

$$h(1,0) = 0 .$$

Como $h[(x,y)(u,v)] = h(xu, y+xv)$

entonces de (1) obtenemos que

$$h(xu, y+xv) = h(x,y) + h(u,v) \qquad (2)$$

Haciendo $u = 1$, $v = t/x$ y usando la condición inicial en (2), se llega a:

$$x\frac{h(x,y+t)-h(x,y)}{t} = \frac{h\left(1,\frac{t}{x}\right)-h(1,0)}{\frac{t}{x}}$$

Tomando el límite cuando $t \to 0$ se tiene:

$$x\frac{\partial h}{\partial y} = k$$

de donde

$$h(x,y) = \frac{k}{x}y + g(x) \qquad (3)$$

Derivando en esta última igualdad respecto a la variable x se obtiene:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-ky}{x^2} + g'(x) \qquad (4)$$

Ahora, en (2) se hace $u = 1 + t/x, v = 0$ y obtenemos

$$x\frac{h(x+t,y)-h(x,y)}{t} = \frac{h\left(1+\frac{t}{x},0\right)-h(1,0)}{\frac{t}{x}}$$

Tomando el límite cuando $t \to 0$ obtenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{c}{x} \qquad (5)$$

De (4) y (5) se llega a:

$$\frac{-ky}{x^2} + g'(x) = \frac{c}{x}$$

Para que esta última igualdad sea válida debe ser que $k = 0$, de donde

$$g'(x) = \frac{c}{x}$$

Así, $g(x) = c\ln x + d$ y en particular $g(1) = d$. De (3) se tiene que

$$h(1,0) = g(1) = 0$$

Luego, $d = 0$, o sea que $g(x) = c\ln x$. Remplazando en (3) se llega a que los homomorfismos $h : G \to R$ quedan caracterizados como:

$$h(x,y) = c\ln x$$

3.1.2 Homomorfismos de R en G.

Sea $h : R \to G$ un homomorfismo. En primer lugar,

$$h(x) = (\varphi(x), \phi(x)).$$

Ahora, como h es homomorfismo entonces

$$h(x+y) = h(x)h(y) \qquad (6)$$

Por un lado se tiene que

$$h(x+y) = (\varphi(x+y), \phi(x+y))$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} h(x)h(y) &= (\varphi(x),\phi(x))(\varphi(y),\phi(y)) \\ &= (\varphi(x)\varphi(y), \phi(x)+\varphi(x)\phi(y)) \end{aligned}$$

Remplazando las dos últimas relaciones en (6), se obtienen las siguientes relaciones funcionales:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (7)$$
$$\phi(x+y) = \phi(x) + \varphi(x)\phi(y) \qquad (8)$$

Como $h(0) = (1,0)$ se tienen además las condiciones iniciales $\varphi(0) = 1,\ \phi(0) = 0$.

De (7) y las condiciones iniciales obtenemos

$$\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}=\varphi(x)\frac{[\varphi(y)-\varphi(0)]}{y},\ y\neq 0$$

Tomando el límite cuando $y\to 0$ se llega a que $\varphi'(x)=\varphi(x)k$, de donde $\varphi(x)=e^{kx}\tilde{c}$. De esta igualdad se sigue que $\varphi(0)=\tilde{c}$ y usando las condiciones iniciales se tiene que $\tilde{c}=1$, así que

$$\varphi(x)=e^{kx} \qquad (9)$$

Ahora, de (8) y (9) junto con las condiciones iniciales, se tiene que:

$$\frac{\phi(x+y)-\phi(x)}{y}=e^{kx}\,\frac{[\phi(y)-\phi(0)]}{y},\ y\neq 0$$

Tomando el límite cuando $y\to 0$ se obtiene $\phi'(x)=ce^{kx}$, de donde $\phi(x)=\frac{c}{k}e^{kx}+d$. De esta igualdad se sigue que $\phi(0)=\frac{c}{k}+d$ y usando las condiciones iniciales se llega a que $d=\frac{-c}{k}$. Por lo tanto,

$$\phi(x)=\frac{c}{k}\left(e^{kx}-1\right) \qquad (10)$$

De (9) y (10) concluimos que los homomorfismos $h:R\to G$ quedan caracterizados como:

$$h(x)=\left(e^{kx},\frac{c}{k}\left(e^{kx}-1\right)\right)$$

3.1.3 Homomorfismos de G en G. Sea $h:G\to G$

Un homomorfismo. En primer lugar,

$$h(x,y)=(\varphi(x,y),\phi(x,y))$$

Como h es homomorfismo, entonces

$$h((x,y)(u,v))=h(x,y)h(u,v) \qquad (11)$$

Por un lado

$$\begin{aligned}h((x,y)(u,v))&=h(xu,y+xv) \qquad (12)\\&=(\varphi(xu,y+xv),\phi(xu,y+xv))\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}&h(x,y)h(u,v)= \qquad (13)\\&(\varphi(x,y),\phi(x,y))(\varphi(u,v),\phi(u,v))\\&=(\varphi(x,y)\varphi(u,v),\phi(x,y)+\varphi(x,y)\phi(u,v))\end{aligned}$$

Remplazando (12) y (13) en (11) se obtienen las siguientes relaciones funcionales:

$$\varphi(xu,y+xv)=\varphi(x,y)\varphi(u,v) \qquad (14)$$

$$\phi(xu,y+xv)=\phi(x,y)+\varphi(x,y)\phi(u,v) \qquad (15)$$

También, como h es homomorfismo se sigue que $h(1,0)=(1,0)$, de donde se tienen las condiciones iniciales

$$\varphi(1,0)=1,\ \phi(1,0)=0\,.$$

En (14) se hace $u=1+t/x$, $v=0$ y se obtiene

$$\varphi(x+t,y)=\varphi(x,y)\varphi\left(1+\frac{t}{x},0\right)$$

Usando las condiciones iniciales, se llega a:

$$x\frac{\varphi(x+t,y)-\varphi(x,y)}{t}=\varphi(x,y)\frac{\varphi\left(1+\frac{t}{x},0\right)-\varphi(1,0)}{\frac{t}{x}}$$

Tomando el límite cuando $t\to 0$ en esta última igualdad obtenemos la ecuación diferencial parcial

$$x\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=\varphi(x,y)k$$

de donde

$$\ln\varphi(x,y)=k\ln x+g(y) \qquad (16)$$

En esta igualdad derivamos respecto a y y se tiene:

$$\frac{1}{\varphi(x,y)}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=g'(y) \qquad (17)$$

Usando nuevamente la relación (14), hacemos $u=1, v=t/x$ y se obtiene:

$$x\frac{\varphi(x,y+t)-\varphi(x,y)}{t}=\varphi(x,y)\frac{\varphi\left(1,\frac{t}{x}\right)-\varphi(1,0)}{\frac{t}{x}}$$

Tomando el límite cuando $t\to 0$ en esta última igualdad se llega a:

$$x\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=c\varphi(x,y)$$

de donde

$$\frac{1}{\varphi(x,y)}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=\frac{c}{x} \qquad (18)$$

De (17) y (18) se tiene que $g'(y)=\frac{c}{x}$ y para que esta igualdad tenga sentido, debe ser que $c=0$ y de ahí que $g(y)=d$. Ahora, de (16) se tiene que

$$\ln\varphi(1,0)=k\ln 1+g(0)$$

de donde $g(0)=0$. Luego, $d=0$, es decir, $g(y)=0$. De esta forma, de (16) se sigue que

$$\varphi(x,y)=x^k \qquad (19)$$

Para encontrar la función ϕ, en (15) se hace $u=1+t/x, v=0$ y razonando como antes se obtiene

$$\phi(x,y)=\frac{c}{k}\left(x^k-1\right) \qquad (20)$$

En conclusión, de (19) y (20) se tiene que los homomorfismos $h:G\to G$ quedan caracterizados como:

$$h(x,y)=\left(x^k,\frac{c}{k}\left(x^k-1\right)\right) \qquad (21)$$

Se observa en los ejemplos que los homomorfismos encontrados dependen únicamente de la primera variable.
También en este ejemplo, se tiene que los homomorfismos de G en G se obtienen realizando la composición de los homomorfismos de G en R con los de R en G.

4. CÁLCULO DE DERIVADAS

4.1 Una vez hecho el cálculo de los homomorfismos $h:G\to R$, $h:R\to G$ y $h:G\to G$ pasamos a calcular derivadas. El grupo G es localmente compacto y satisface las condiciones para que haya unicidad de la derivada (comentario 3 de los preliminares).

4.1.1 Derivada para funciones $f:G\to R$

Veamos en primer lugar qué funciones $f:G\to R$ son diferenciables. Por la caracterización de los homomorfismos $h:G\to R$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(a,b)&=\phi(x,y)\left[(x,y)(a,b)^{-1}\right]\\ &=\phi(x,y)\left[\frac{x}{a},y-\frac{b}{a}x\right]\\ &=b(x,y)\ln\frac{x}{a}\end{aligned}$$

Haciendo $y=b$ en esta igualdad se obtiene:

$$b(x,b)=\frac{f(x,b)-f(a,b)\big/x-a}{\ln x-\ln a\big/x-a}, x\neq a$$

Como b debe ser continua en (a,b) se tiene entonces que

$$b(a,b)=\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(a,b)}}{\frac{1}{a}}=a\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(a,b)}$$

Se exige entonces que exista la derivada parcial de f con respecto a x, evaluada en a.

De esta manera, la derivada de f en (a,b), evaluada en (t_1,t_2) es :

$$\phi(a,b)[(t_1,t_2)]=a\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(a,b)}\cdot ln\frac{t_1}{a}$$

4.1.2 Derivada para funciones $f: R\to G$

En primer lugar se debe ver qué funciones $f: R\to G$ son diferenciables, es decir, para qué funciones $f: R\to G$ existe $\phi: R\to \widetilde{H}om(R,G)$ continua en a y tal que

$$f(x)f(a)^{-1}=\phi(x)[x-a]$$

Tenemos que $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$, siendo f_1 y f_2 funciones de R en R con $f_1(x)>0$. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned} f(x)f(a)^{-1}&=(f_1(x),f_2(x))(f_1(a),f_2(a))^{-1}\\ &=(f_1(x),f_2(x))\left(\frac{1}{f_1(a)},\frac{-f_2(a)}{f_1(a)}\right)\\ &=\left(\frac{f_1(x)}{f_1(a)},f_2(x)-\frac{f_1(x)f_2(a)}{f_1(a)}\right) \qquad (22)\end{aligned}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la caracterización de los homomorfismos de R en G, tenemos:

$$\phi(x)[x-a]=\left(e^{h(x)(x-a)},b(x)\frac{e^{h(x)(x-a)}-1}{h(x)}\right) \quad (23)$$

De (22) y (23) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\frac{f_1(x)}{f_1(a)}=e^{h(x)(x-a)} \qquad (24)$$

$$f_2(x)-\frac{f_1(x)f_2(a)}{f_1(a)}=b(x)\left(\frac{e^{h(x)(x-a)}-1}{h(x)}\right) \quad (25)$$

Al despejar $h(x)$ en (24) se llega a:

$$h(x)=\frac{ln\, f_1(x)-ln\, f_1(a)}{x-a},\ x\neq a$$

Como h debe ser continua a, entonces

$$h(a)=\frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \qquad (26)$$

Se debe exigir entonces que f_1 sea diferenciable en a.
Ahora, de la ecuación (25) se tiene:

$$\frac{f_2(x)f_1(a)-f_1(x)f_2(a)}{f_1(a)}=b(x)\frac{\frac{f_1(x)}{f_1(a)}-1}{\frac{ln\, f_1(x)-ln\, f_1(a)}{x-a}}$$

o bien,

$$\frac{f_2(x)f_1(a)-f_1(x)f_2(a)}{x-a}=b(x)\frac{\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}}{\frac{ln\, f_1(x)-ln\, f_1(a)}{x-a}}$$

es decir,

$$\frac{(f_2(x)-f_2(a))f_1(a)}{x-a}-\frac{f_2(a)(f_1(x)-f_1(a))}{x-a}=b(x)\frac{\frac{f_1(x)-f_1(a)}{x-a}}{\frac{ln\, f_1(x)-ln\, f_1(a)}{x-a}}$$

Como b debe ser continua en a, entonces si en la anterior igualdad se toma el límite cuando $x \to a$ se tiene que:

$$b(a) = \frac{f_2'(a)f_1(a) - f_1'(a)f_2(a)}{f_1(a)} \qquad (27)$$

Se debe exigir entonces que f_2 sea diferenciable en a.

De (26) y (27) se tiene que la derivada de f en a, evaluada en t es:

$$\phi(a)[t] = \left(e^{\frac{f_1'(a)t}{f_1(a)}}, \left(f_2'(a)f_1(a) - f_1'(a)f_2(a) \right) \left(\frac{e^{\frac{f_1'(a)t}{f_1(a)}} - 1}{f_1'(a)} \right) \right)$$

4.1.3 Derivada para funciones $f : G \to G$

Como antes, veamos qué funciones $f : G \to G$ son diferenciables. Tenemos que

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

y por lo tanto,

$$f(x,y)f(a,b)^{-1} = \left(\frac{f_1(x,y)}{f_1(a,b)}, f_2(x,y) - \frac{f_1(x,y)f_2(a,b)}{f_1(a,b)} \right) \qquad (28)$$

De otro lado, teniendo en cuenta la caracterización de los homomorfismos de G en G, se tiene que

$$\phi(x,y)\left[(x,y)(a,b)^{-1}\right] = \phi(x,y)\left[\frac{x}{a}, y - \frac{b}{a}x\right] = \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{h(x,y)}, \frac{b(x,y)}{h(x,y)} \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{h(x,y)} - 1 \right) \right) \qquad (29)$$

Igualando (28) y (29) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{f_1(x,y)}{f_1(a,b)} = \left(\frac{x}{a}\right)^{h(x,y)} \qquad (30)$$

y

$$\frac{f_2(x,y)f_1(a,b) - f_1(x,y)f_2(a,b)}{f_1(a,b)} = \frac{b(x,y)}{h(x,y)} \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{h(x,y)} - 1 \right) \qquad (31)$$

De (30) se llega a:

$$h(x,y) = \frac{\dfrac{\ln f_1(x,y) - \ln f_1(a,b)}{x-a}}{\dfrac{\ln x - \ln a}{x-a}}, \; x \neq a$$

Haciendo $y = b$ y teniendo en cuenta que h debe ser continua en (a,b), entonces al tomar $x \to a$ en la última igualdad, se obtiene que

$$h(a,b) = \frac{a}{f_1(a,b)} \left. \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} \right|_{(a,b)}$$

Ahora, de (31) se sigue que:

$$\frac{f_2(x,y)f_1(a,b) - f_1(x,y)f_2(a,b)}{f_1(a,b)} = b(x,y) \frac{\dfrac{f_1(x,y) - f_1(a,b)}{f_1(a,b)}}{\dfrac{\ln f_1(x,y) - \ln f_1(a,b)}{\ln x - \ln a}}, \; x \neq a$$

o bien,

$$\frac{(f_2(x,y) - f_2(a,b))}{x-a} f_1(a,b) - \frac{(f_1(x,y) - f_1(a,b))}{x-a} f_2(a,b) = b(x,y) \frac{\dfrac{f_1(x,y) - f_1(a,b)}{x-a} \cdot \dfrac{\ln x - \ln a}{x-a}}{\dfrac{\ln f_1(x,y) - \ln f_1(a,b)}{x-a}}, \; x \neq a$$

Como b debe ser continua en (a,b), entonces haciendo $y=b$ y tomando $x\to a$ en la última igualdad, se tiene que:

$$b(a,b)=a\left.\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)}-\frac{a}{f_1(a,b)}\left.\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)}f_2(a,b)$$

De esta manera, la derivada de f en (a,b), evaluada en (t_1,t_2) es

$$\phi(a,b)[(t_1,t_2)]=(\phi_1,\phi_2)$$

Donde $\phi_1=t_1^{\frac{a}{f_1(a,b)}\left.\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)}}$ y

$$\phi_2=\frac{\left.\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)}f_1(a,b)-\left.\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)}f_2(a,b)}{\left.\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)}}.\left(t_1^{\frac{a}{f_1(a,b)}\left.\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)}}-1\right)$$

4.2 En esta sección se considerará el grupo topológico aditivo $\Omega=(M_{2\times 2},R)$ de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 con entradas reales, el cual es localmente compacto, divisible y satisface las condiciones para la unicidad de derivada. En efecto, la divisibilidad se sigue del siguiente hecho: como estamos considerando Ω como grupo aditivo la divisibilidad significa que dado $g\in\Omega$ y n natural, existe $x\in\Omega$ tal que $g=nx$, lo cual en nuestro caso se tiene. Vale además que $\lim_{m\to+\infty}\frac{x}{m}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ para todo $x\in\Omega$. La compacidad local de Ω se sigue al ver Ω como R^4.

Definimos $f:\Omega\to\Omega$ como:

$$f\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}x_{22}&0\\0&x_{12}x_{21}\end{pmatrix}$$

Se mostrará que esta función es diferenciable en cada $A\in M_{2\times 2}$. En [4] se demuestra que los homomorfismos de Ω en Ω quedan caracterizados como:

$$\varphi(X)=\varphi\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(X)&\varphi_2(X)\\\varphi_3(X)&\varphi_4(X)\end{pmatrix}$$

Donde
$\varphi_i(X)=k_{i1}x_{11}+k_{i2}x_{12}+k_{i3}x_{21}+k_{i4}x_{22}$
$i=1,2,3,4.$

Debido a la linealidad de las φ_i, se tiene que el homomorfismo φ es continuo con la topología inducida por la de R^4.

Definamos $\phi:\Omega\to\widetilde{H}om(\Omega,\Omega)$ como:

$$\phi(X)[Y]=\begin{pmatrix}a_{22}y_{11}+x_{11}y_{22}&0\\0&a_{21}y_{12}+x_{12}y_{21}\end{pmatrix}$$

Con relación a esta definición, tenemos que efectivamente $\phi(X)\in\widetilde{H}om(\Omega,\Omega)$ y que considerando en $\widetilde{H}om(\Omega,\Omega)$ la topología compacto abierta, la aplicación ϕ es continua en Ω. Además,

$$\phi(X)[X-A]=\begin{pmatrix}\phi_1(X,A)&0\\0&\phi_2(X,A)\end{pmatrix}$$

Donde

$$\phi_1(X,A)=a_{22}(x_{11}-a_{11})+x_{11}(x_{22}-a_{22}),$$
$$\phi_2(X,A)=a_{21}(x_{12}-a_{12})+x_{12}(x_{21}-a_{21})$$

Se tiene así que

$$\phi(X)[X-A]=\begin{pmatrix} x_{11}x_{22}-a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & x_{12}x_{21}-a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$
$$=f(X)-f(A)$$

Por lo tanto, f es diferenciable en A y

$$f'(A)=\phi(A)$$

Donde

$$\phi(A)[Y]=\begin{pmatrix} a_{22}y_{11}+a_{11}y_{22} & 0 \\ 0 & a_{21}y_{12}+a_{12}y_{21} \end{pmatrix}$$

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a los jurados del artículo por sus acertados comentarios, los cuales permitieron mejorar su presentación.

REFERENCIAS

[1] ACOSTA G. ERNESTO, DELGADO CÉSAR. Fréchet vs. Carathédory. American Mathematical Monthly, April 1994.

[2] ACOSTA G. ERNESTO. Differentiability in Topological Groups. Soochow Journal of Mathematics, Volume 22, No.1, pp 39-48. January 1996.

[3] CASANOVA T. SIMEÓN. Teorema del Valor Medio en Grupos Topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. U.Nal. de Colombia, 1997.

[4] GRANADA D. HÉCTOR. Diferenciación en grupos metrizables. Tesis de grado en Matemáticas. U.Nal. de Colombia, Sede Manizales. Marzo de 2005.