

# ESTABILIDAD Y ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN DE ESTRUCTURAS DE VIGAS Y COLUMNAS DE TIMOSHENKO CON CONEXIONES SEMIRRÍGIDAS: MÉTODO PENDIENTE-DEFLEXIÓN

## STABILITY AND SECOND-ORDER ANALYSIS OF TIMOSHENKO BEAM-COLUMN STRUCTURES WITH SEMIRIGID CONNECTIONS: SLOPE-DEFLECTION METHOD

J. DARIO ARISTIZABAL-OCHOA

*Profesor, Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, jdaristi2@yahoo.com*

Recibido para revisar julio 29 de 2008, aceptado marzo 3 de 2009, versión final marzo 10 de 2009

**RESUMÉN:** Un nuevo conjunto de ecuaciones pendiente-deflexión para la viga-columna de Timoshenko de sección transversal simétrica con conexiones semirrígidas que incluyen los efectos combinados de deformaciones por cortante y por flexión, y los efectos de segundo orden causados por cargas axiales es desarrollado de una manera clásica. El método propuesto que también incluye los efectos de la componente de cortante de las fuerzas axiales aplicadas (modelo de Haringx) tiene las siguientes ventajas: 1) puede ser utilizado en la estabilidad y en el análisis de segundo orden de estructuras aporricadas compuestas de vigas y columnas de Timoshenko con conexiones rígidas, semirrígidas y simples; 2) los efectos de las conexiones están condensados dentro de las ecuaciones pendiente-deflexión para cargas axiales de tracción y compresión sin introducir grados de libertad ni ecuaciones adicionales; 3) es más exacto que cualquier otro método disponible en la literatura técnica y con la capacidad de capturar el fenómeno del pandeo de columnas bajo fuerzas de tracción axial; 4) es poderoso, práctico, versátil y fácil de enseñar. Estudios analíticos indican que las deformaciones por cortante incrementan las deflexiones laterales y reducen la cargas críticas axiales de estructuras aporricadas hechas de columnas y vigas con baja rigidez a cortante.

**PALABRAS CLAVE:** Viga; viga-columna; grandes deflexiones; análisis no lineal; conexiones semirrígidas; análisis de segundo orden; estabilidad; análisis estructural, post pandeo.

**ABSTRACT:** A new set of slope-deflection equations for Timoshenko beam-columns of symmetrical cross section with semi-rigid connections that include the combined effects of shear and bending deformations, and second-order axial load effects is developed in a classical manner. The proposed method that also includes the effects the shear component of the applied axial forces (Haringx Model) has the following advantages: 1) it can be utilized in the stability and second-order analysis of framed structures made up of Timoshenko beam-columns with rigid, semi-rigid, and simple end connections; 2) the effects of semi-rigid connections are condensed into the slope-deflection equations for tension or compression axial loads without introducing additional degrees of freedom and equations; 3) it is more accurate than any other method available and capable of capturing the phenomena of buckling under axial tension forces; and 3) it is powerful, practical, versatile and easy to teach. Analytical studies indicate that shear deformations increase the lateral deflections and reduce the critical axial loads of framed structures made of members with low shear stiffness.

**KEY WORDS:** Beams; beam-columns; large deflections; nonlinear analysis; semirigid connections; Second-order analysis; stability; structural analysis.

## 1. INTRODUCCIÓN

El método pendiente-deflexión (PD) representa el punto de inicio en la evolución del método matricial de rigidez como este es conocido actualmente [1]. Este fue presentado en 1915 por Wilson y Maney [2] en un *Bulletin* desde la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign como un método general para ser usado en el análisis de vigas con nudos rígidos sujetos a cargas transversales.

El método PD puede ser utilizado para analizar todo tipo de vigas y pórticos estáticamente indeterminados. Las ecuaciones clásicas de pendiente-deflexión son derivadas por medio del teorema del momento-área considerando la deformación causada sólo por los momentos de flexión y despreciando los debidos por fuerzas de cortantes y axiales. Básicamente, un número de ecuaciones simultáneas son planteadas con incógnitas como las rotaciones angulares y los desplazamientos de cada nodo. Una vez que estas ecuaciones han sido solucionadas, los momentos en todos los nudos pueden ser determinados. El método PD es simple de explicar y aplicar ya que se basa en el equilibrio de los nudos y de los elementos. El método PD clásico es enseñado en cursos elementales de análisis estructural [3, 4] y empleados en el diseño estructural [5] porque este provee una perspectiva clara y completa de cómo los momentos internos y las deformaciones están interrelacionados, conceptos que son esenciales en la ingeniería estructural.

Sin embargo, los avances en materiales compuestos de alta capacidad de resiliencia y baja rigidez a cortante así como la necesidad para vigas y columnas más ligeras y resistentes ha creado gran interés en los efectos en la cortante y análisis de segundo orden de estructuras aporticadas. Por ejemplo, los aislantes elastoméricos y los elementos livianos hechos de materiales poliméricos pueden someterse a grandes deflexiones bajo combinaciones de cargas axiales y transversales sin exceder su límite elástico. Las ecuaciones pendiente-deflexión para una viga de Timoshenko sin carga axial incluyendo los efectos de la deformación por cortante y las cargas transversales fueron inicialmente desarrolladas por Bryan y Baile [6].

Previamente, Lin, Glauser y Johnson [7] habían desarrollado las ecuaciones de pendiente-deflexión para elementos de alma abierta incluyendo el efecto de la deformación de cortante, carga axial y extremos con placas rígidas. Por otro lado, la estabilidad y el análisis de segundo orden de columnas esbeltas y de estructuras con conexiones semirrígidas fueron investigados por Aristizabal-Ochoa [8] y [9] empleando las funciones clásicas de estabilidad. Sin embargo, la estabilidad de estructuras aporticadas usando el método clásico de pendiente-deflexión incluyendo los efectos combinados de las deformaciones por cortante y flexión, los efectos de segundo orden  $P-\Delta$ , y conexiones semirrígidas no es todavía conocido.

El principal objetivo de esta publicación es presentar un nuevo conjunto de ecuaciones de pendiente-deflexión para la estabilidad y el análisis de segundo orden de estructuras aporticadas hechas de vigas y columnas de Timoshenko de sección transversal simétrica con conexiones semirrígidas bajo cargas axiales en los extremos incluyendo los efectos combinados de: 1) deformaciones de flexión y de cortante; y 2) la componente inducida por las cargas axiales en la cortante (Modelo de Haringx).

El método propuesto el cual es basado en las funciones de estabilidad “modificadas” para la viga-columna de Timoshenko con conexiones semirrígidas desarrolladas por Aristizabal-Ochoa [10] y [11] posee las siguientes ventajas: 1) los efectos de las conexiones son condensadas dentro de las ecuaciones de pendiente-deflexión para cargas axiales de tracción o de compresión sin introducir grados de libertad y ecuaciones adicionales; 2) es más exacto que cualquier otro método disponible y capaz de capturar el fenómeno de pandeo bajo cargas axiales de tracción en columnas cortas de elastoméricos laminados comúnmente usados como aislantes sísmicos en edificios; 3) el método es poderoso, práctico, versátil y fácil de enseñar. Cuatro ejemplos son incluidos que demuestran la eficacia del método propuesto y sus ecuaciones.

## 2. MODELO ESTRUCTURAL

### 2.1 Suposiciones

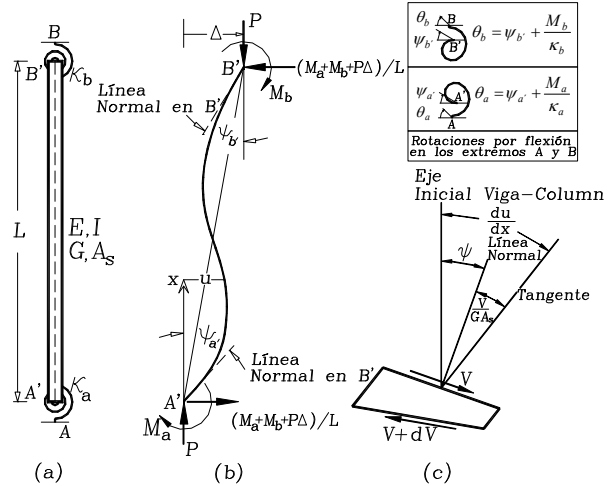
Consideremos una viga-columna prismática que conecta los puntos A y B como muestra la fig. 1(a). El elemento esta formado por una viga-columna A'B', y las conexiones AA' y BB' a flexión con rigideces  $\kappa_a$  y  $\kappa_b$  en los extremos A y B, respectivamente. Se supone que la viga-columna A'B' de luz  $L$ : 1) se flexa alrededor del los ejes principales de su sección transversal con un momento de inercia  $I$ , área efectiva de cortante  $A_s$ ; 2) está hecha de un material elástico lineal homogéneo con modulo de Young  $E$  y modulo de cortante  $G$ , respectivamente; 3) su eje centroidal es una línea recta; y 4) esta cargada axialmente en el extremo A con  $P$  a lo largo de su eje centroidal.

Los conexiones a flexión tienen rigideces  $\kappa_a$  y  $\kappa_b$  (cuyas unidades son en fuerza-distancia/radian) en el plano principal del elemento. Las relaciones  $R_a = \kappa_a / (EI/L)$  y  $R_b = \kappa_b / (EI/L)$  se denominan como los índices de rigidez de las conexiones. Estos índices varían desde cero (i.e.,  $R_a = R_b = 0$ ) para conexiones simples (o articuladas) hasta infinito ( $R_a = R_b = \infty$ ) para conexiones restringidas o rígidas. Nótese que el algoritmo propuesto puede ser empleado en el análisis inelástico de viga-columnas con comportamiento inelástico concentrado en las conexiones. Esto puede llevarse a cabo mediante la actualización de la rigideces  $\kappa_a$  y  $\kappa_b$  para cada incremento de carga en un incremento lineal adoptado.

Por conveniencia los siguientes dos parámetros son introducidos:

$$\rho_a = \frac{1}{1 + 3/R_a}; \text{ y } \rho_b = \frac{1}{1 + 3/R_b} \quad (1a-b)$$

Donde  $\rho_a$  y  $\rho_b$  son llamados los factores de fijeza. Para conexiones articuladas, los factores de fijeza  $\rho$  y los índices de rigidez  $R$  son cero; pero para conexiones rígidas, el factor de fijeza es 1 y el índice de rigidez es infinito. Por lo tanto el factor de fijeza solo puede variar desde 0 hasta 1 para conexiones elásticas (mientras el índice de rigidez  $R$  puede variar desde 0 hasta  $\infty$ ), es más conveniente usar en los análisis elásticos de estructuras con conexiones semirrígidas.



**Figura 1.** Viga-Columna bajo momentos en los extremos con conexiones semirrígidas: (a) modelo estructural; (b) grados de libertad, fuerzas y momentos en el planos de la flexión; (c) rotaciones en una sección transversal y en los extremos A y B

**Figure 1.** Beam-Column under end moments with semi-rigid connections: (a) Structural Model; (b) Degrees of Freedom, Forces and Moments in the plane of bending; (c) Rotations at a cross section and at ends A and B

## 3. PROPUESTA DE LAS ECUACIONES DE PENDIENTE-DEFLEXIÓN

Para investigar la estabilidad lateral y análisis de segundo-orden de estructuras aperticadas con conexiones semirrígidas, es necesario primero establecer las relaciones entre los momentos flectores en los extremos y las correspondientes rotaciones para cada miembro del pórtico y luego aplicar las condiciones de compatibilidad de deformaciones en cada nudo. La aplicación del método clásico de pendiente-deflexión en la estabilidad de pórticos planos (con conexiones rígidas y sin cargas transversales excluyendo los efectos por cortante) es bien explicado por Salmon y Johnson [5], páginas 835-843. Las ecuaciones propuestas de pendiente-deflexión para pórticos planos con conexiones semirrígidas incluyendo los efectos por cortante y sin carga transversal a lo largo de cada miembro son como siguen:

$$M_a = S_{aa} \frac{EI}{L} (\theta_a - \Delta/L) + S_{ab} \frac{EI}{L} (\theta_b - \Delta/L) \quad (2a)$$

$$M_b = S_{ba} \frac{EI}{L} (\theta_a - \Delta/L) + S_{bb} \frac{EI}{L} (\theta_b - \Delta/L) \quad (2b)$$

Donde los valores de  $\theta_a$  y  $\theta_b$  son las rotaciones de los extremos A y B medidos con respecto la eje inicial del miembro, y  $\Delta/L$  el ángulo de rotación de la cuerda del miembro AB. Ambas rotaciones y momentos en los extremos ( $M_a$  y  $M_b$ ) son positivas en sentido de las agujas del reloj como se muestra en la fig. 1.  $S_{aa}$ ,  $S_{ab}$ ,  $S_{ba}$  y  $S_{bb}$  son llamados coeficientes de rigidez de la viga-columna de Timoshenko AB con conexiones semirrígidas en ambos extremos. Los coeficientes son listados en la sección que sigue para su fácil referencia.

### 3.1 Coeficientes de rigidez de primer orden

#### 3.1.1 Para $P=0$

$$S_{aa} = \frac{3\rho_a(4 + \rho_b\Gamma)}{(4 - \rho_a\rho_b) + (\rho_a + \rho_b + \rho_a\rho_b)\Gamma} \quad (3)$$

$$S_{ab} = S_{ba} = \frac{3\rho_a\rho_b(2 - \Gamma)}{(4 - \rho_a\rho_b) + (\rho_a + \rho_b + \rho_a\rho_b)\Gamma} \quad (4)$$

$$S_{bb} = \frac{3\rho_b(4 + \rho_a\Gamma)}{(4 - \rho_a\rho_b) + (\rho_a + \rho_b + \rho_a\rho_b)\Gamma} \quad (5)$$

### 3.2 Coeficientes de rigidez de segundo orden

#### 3.2.1 Para $P > 0$ (compresión) o $[I + P/(GA_s)]P > 0$

$$S_{aa} = \left[ 3\rho_a(1 - \rho_b)\beta\phi^2 + 9\rho_a\rho_b \left( 1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi} \right) \right] / Den \quad (6)$$

$$S_{ab} = S_{ba} = 9\rho_a\rho_b \left( \frac{\beta\phi}{\sin\phi} - 1 \right) / Den \quad (7)$$

$$S_{bb} = \left[ 3\rho_b(1 - \rho_a)\beta\phi^2 + 9\rho_a\rho_b \left( 1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi} \right) \right] / Den \quad (8)$$

$$Den = (1 - \rho_a)(1 - \rho_b)\beta\phi^2 + 3(\rho_a + \rho_b - 2\rho_a\rho_b) \left( 1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi} \right) + 9\rho_a\rho_b \left( \frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - \beta \right)$$

#### 3.2.1 Para $P < 0$ (tensión) y $[I + P/(GA_s)]P < 0$

$$S_{aa} = \left[ -3\rho_a(1 - \rho_b)\beta\phi^2 + 9\rho_a\rho_b \left( 1 - \frac{\beta\phi}{\tanh\phi} \right) \right] / De \quad (9)$$

$$S_{ab} = S_{ba} = 9\rho_a\rho_b \left( \frac{\beta\phi}{\sinh\phi} - 1 \right) / De \quad (10)$$

$$S_{bb} = \left[ -3\rho_b(1 - \rho_a)\beta\phi^2 + 9\rho_a\rho_b \left( 1 - \frac{\beta\phi}{\tanh\phi} \right) \right] / De \quad (11)$$

$$De = -(1 - \rho_a)(1 - \rho_b)\beta\phi^2 + 3(\rho_a + \rho_b - 2\rho_a\rho_b) \left( 1 - \frac{\beta\phi}{\tanh\phi} \right) + 9\rho_a\rho_b \left( \frac{\tanh(\phi/2)}{\phi/2} - \beta \right)$$

$$\text{Donde: } \Gamma = \frac{12(EI/L^2)}{GA_s}; \text{ y } \phi = \sqrt{P/(\beta EI/L^2)}.$$

Nótese que el método propuesto y las ecuaciones listadas arriba son válidos para miembros sujetos a fuerzas axiales de tracción y compresión. Cuando  $\phi^2$  es negativo (i.e.,  $[I + P/(GA_s)]P < 0$ ), los siguientes tres cambios fueron realizados en las ecs. (6)-(8) para obtener las ecs. (9)-(11): 1)  $\sin\phi$  por  $i \sinh\phi$ , 2)  $\tan\phi$  por  $i \tanh\phi$ , y 3)  $\phi$  por  $i\phi$  (donde:  $i = \sqrt{-1}$ ). Las ecuaciones (2a) y (2b) son derivadas en el Apéndice I.

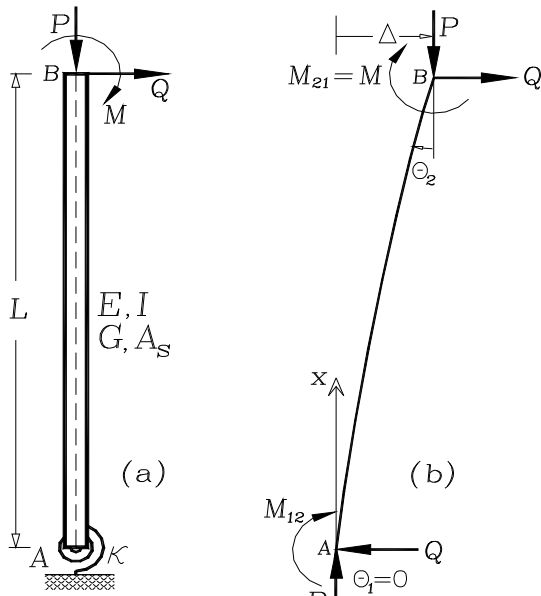
Para verificar los coeficientes dados por las ecs. (3)-(5), los numeradores y denominadores de las ecs. (6)-(8) deben ser diferenciados cuatro veces de acuerdo con la regla de L'Hospital y luego aplicar el límite  $P=0$ . Sin embargo, realizar este proceso es realmente tedioso y engorroso, las derivaciones de las ecs. (3)-(5) son también presentadas en el Apéndice I.

Los cuatro ejemplos presentados en la sección que sigue muestran la efectividad, simplicidad y precisión del método pendiente-deflexión propuesto y las correspondientes ecuaciones listadas arriba. Los ejemplos 1 y 2 son acerca del análisis de estabilidad de estructuras viga-columna sujetas a fuerzas en los nudos causando tensión y/o compresión en los miembros. Los ejemplos 3 y 4 muestran la aplicación del método propuesto en pórticos planos sujetos a cargas axiales de compresión y/o de tracción.

## 4. EJEMPLOS

### 4.1 Ejemplo 1- Análisis de Segundo orden de una columna en voladizo bajo varias cargas

Determine la ecuación carga-deflexión de segundo-orden de la columna en voladizo de la fig. 2. Compare las expresiones resultantes con aquellas obtenidas por Timoshenko y Gere [12], paginas 5 y 13 para una columna en voladizo Bernoulli-Euler empotrada (esto es,  $\rho = \beta = 1$ ).



**Figura 2.** EJEMPLO 1: Análisis de segundo orden de una columna en voladizo: (a) Modelo estructural; y (b) Forma deflectada y acciones en los extremos

**Figure 2.** EXAMPLE 1: Second-Order Analysis of a Cantilever Column: (a) Structural Model; and (b) Deflected Shape and end Actions

**Solución:** Aplicando equilibrio (fig. 2b):

$$M_{21} = M \quad (12)$$

$$M_{12} + M + P\Delta + QL = 0 \quad (13)$$

Ahora utilizando las ecs. (2a) y (2b)

$$M_{12} = S_{11} \frac{EI}{L} (\theta_1 - \Delta/L) + S_{12} \frac{EI}{L} (\theta_2 - \Delta/L) \quad (14)$$

$$M_{21} = S_{21} \frac{EI}{L} (\theta_1 - \Delta/L) + S_{22} \frac{EI}{L} (\theta_2 - \Delta/L) \quad (15)$$

En este ejemplo  $\rho_a = \rho$  y  $\rho_b = 1$ ; luego para  $P > 0$  (compresión) y usando las ecs. (6)-(8):

$$S_{11} = \frac{3\rho \left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right)}{(1-\rho) \left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right) + 3\rho \left(\frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - \beta\right)} \quad (16)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{3\rho \left(\frac{\beta\phi}{\tan\phi} - 1\right)}{(1-\rho) \left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right) + 3\rho \left(\frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - \beta\right)} \quad (17)$$

$$S_{22} = \frac{(1-\rho)\beta\phi^2 + 3\rho \left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right)}{(1-\rho) \left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right) + 3\rho \left(\frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - \beta\right)} \quad (18)$$

Sabiendo que  $\theta_1 = 0$  y utilizando las ecs. (14) y (15) las siguientes expresiones pueden ser obtenidas de las ecs. (12) y (13):

$$\theta_2 = \left(1 + \frac{S_{21}}{S_{22}}\right) \frac{\Delta}{L} + \frac{M}{S_{22}} \frac{L}{EI} \quad (19)$$

$$\text{y } \Delta = \frac{QL + M(1 + S_{12}/S_{22})}{EI/L(S_{11} - S_{12}^2/S_{22}) - PL} L \quad (20)$$

La ecuación (20) puede ser reducida a

$$\Delta = \frac{QL^3}{EI\phi^2} \left(\frac{\tan\phi}{\phi} - 1\right) + \frac{ML^2}{EI} \left(\frac{1 - \cos\phi}{\phi^2 \cos\phi}\right) \text{ la cual es}$$

idéntica a la superposición de las ecs. (g) y (1-33) presentadas por Timoshenko y Gere [12], páginas 5 y 14 para casos particulares de una columna en voladizo Bernoulli-Euler empotrada ( $\rho = \beta = 1$ ) sometida a carga lateral  $Q$  y momento  $M$ , respectivamente. El comportamiento al post-pandeo y a grandes deflexiones de una columna Timoshenko en voladizo sujeta a cargas en el extremo superior es discutido en detalle por Aristizábal-Ochoa [11].

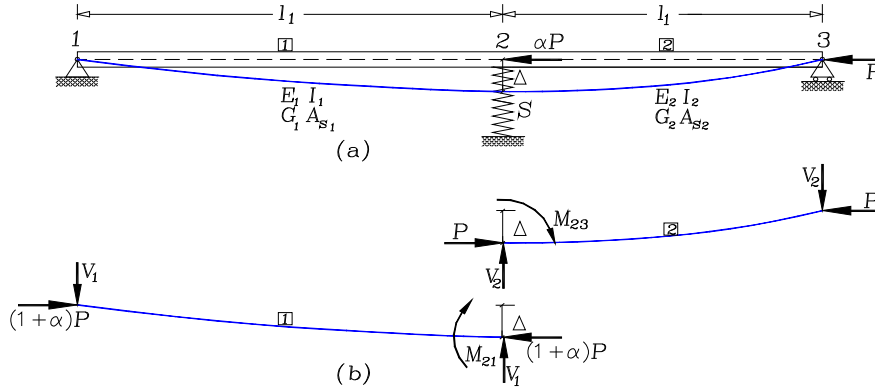
#### 4.2 Ejemplo 2-. Estabilidad de una columna de dos luces con soporte intermedio

Determine la carga crítica de pandeo de una columna continua de dos luces mostrada en la fig. 3a. Suponga que los miembros 1 y 2 son horizontales inicialmente con propiedades  $(GA_s)_1$ ,  $(EI)_1$ ,  $l_1$  y  $(GA_s)_2$ ,  $(EI)_2$ ,  $l_2$ , respectivamente. También suponga que las cargas aplicadas  $\alpha P$  y  $P$  permanecen horizontales y son aplicadas en los

nudos 2 y 3, respectivamente. Incluya los efectos de la rigidez transversal  $S$  del soporte intermedio 2. Compare los resultados obtenidos con los presentados por Timoshenko y Gere [12], páginas

70 y 99 cuando el miembro es hecho de dos viga-columnas Euler-Bernoulli.

**Solución:** Del equilibrio de momento de los segmentos de viga 1 y 2 (fig. 3b) se obtiene las siguientes dos ecuaciones:



**Figura 3.** Ejemplo 2: Análisis de estabilidad de una viga-columna de dos luces con un soporte elástico intermedio: (a) Modelo estructural y forma deflectada; y (b) Fuerzas en cada elemento

**Figure 3.** Example 2: Stability Analysis of a two Span Beam-column with an Intermediate Elastic Support: (a) Structural Model and Deflected Shape; and (b) Forces and Moments on Elements 1 and 2

$$M_{21} + (P + \alpha P)\Delta - V_1 l_1 = 0 \quad (21)$$

$$M_{23} - P\Delta + V_2 l_2 = 0 \quad (22)$$

Del momento de equilibrio del nudo 2:

$$M_{21} + M_{23} = 0 \quad (23)$$

Sabiendo que  $V_1 + V_2 = S\Delta$  y utilizando la ec. (23), entonces de las ecs. (21) y (22) se obtiene la siguiente expresión:

$$M_{21} \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right) + \left[ \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} + \alpha \right) P - S l_1 \right] \Delta = 0 \quad (24)$$

En este ejemplo  $\rho_a = 0$  y  $\rho_b = 1$  para el elemento 1, y  $\rho_a = 1$  y  $\rho_b = 0$  para el elemento 2. Luego

llamando  $\phi$  la rotación a flexión del nodo 2 con respecto al eje horizontal y utilizando las ecs. (2):

$$M_{21} = (S_{bb})_1 \frac{EI}{l_1} \left( \phi - \frac{\Delta}{l_1} \right) \text{ y } M_{23} = (S_{aa})_2 \frac{EI}{l_2} \left( \phi + \frac{\Delta}{l_2} \right)$$

Donde para  $P > 0$  y  $P(1 + \alpha) > 0$  y utilizando las ecs. (6)-(8):

$$(S_{bb})_1 = \frac{\beta_1 \phi_1^2}{1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1}} \text{ y } (S_{aa})_2 = \frac{\beta_2 \phi_2^2}{1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2}}$$

Ahora, las Ecs. (23)-(24) pueden ser presentadas en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} (S_{bb})_1 \frac{EI_1}{l_1} + (S_{aa})_2 \frac{EI_2}{l_2} & -(S_{bb})_1 \frac{EI_1}{l_1^2} + (S_{aa})_2 \frac{EI_2}{l_2^2} \\ (S_{bb})_1 \frac{EI_1}{l_1} \frac{L}{l_2} & -(S_{bb})_1 \frac{EI_1}{l_1^2} \frac{L}{l_2} + \beta_1 \phi_1^2 \frac{EI_1}{l_1^2} + \beta_2 \phi_2^2 \frac{EI_2}{l_2^2} \frac{l_1}{l_2} + S l_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \Delta \end{Bmatrix} = 0 \quad (25)$$

Haciendo el determinante de la matriz de 2x2 en la ec. (25) la ecuación característica puede ser determinada y las cargas de pandeo pueden ser calculadas. Por ejemplo para el caso particular de  $EI_1 = EI_2$  y  $l_1 = l_2 = L/2$  y  $S = 0$ , la ecuación característica es reducida a:

$$\left(1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1}\right) \left(1 + \frac{\beta_2 \phi_2^2}{\beta_1 \phi_1^2}\right) + \left(1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2}\right) \left(1 + \frac{\beta_1 \phi_1^2}{\beta_2 \phi_2^2}\right) = 4 \quad (26)$$

La ecuación (26) produce resultados idénticos a los obtenidos por Timoshenko y Gere [1961, p. 99 ec. (2-42)] cuando el miembro es simplemente apoyado hecho de una columna Euler-Bernoulli (i.e.,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ) con cargas de compresión en la mitad de la luz (nodo 2) y en extremo del nodo 3.

Otro caso interesante es cuando el valor de  $S$  se vuelve muy grande haciendo  $\Delta \approx 0$ , y entonces la ecuación característica es reducida al primer término de la ec. (25) como sigue:

$$(S_{bb})_1 \frac{EI_1}{l_1} + (S_{aa})_2 \frac{EI_2}{l_2} = 0$$

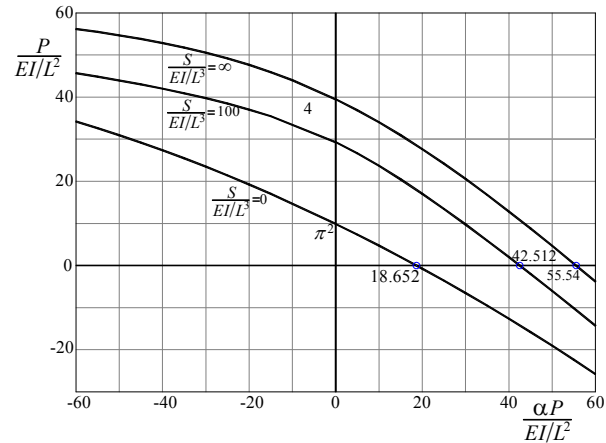
$$\text{ó } \frac{\beta_2 \phi_2^2 \tan \phi_2}{\beta_1 \phi_1^2 \tan \phi_1} \left( \frac{\tan \phi_1 - \beta_1 \phi_1}{\tan \phi_2 - \beta_2 \phi_2} \right) = - \frac{l_2 EI_1}{l_1 EI_2} \quad (27)$$

La ecuación (27) produce resultados idénticos a los obtenidos por Timoshenko y Gere [1961, p. 67, ec. (b)] para una columna Euler-Bernoulli de dos luces (esto es con  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ) con cargas de compresión localizadas en los nodos 1 y 3.

La figura 4 muestra una serie de diagramas de interacción de  $P/(EI/L^2)$ -versus- $\alpha P/(EI/L^2)$  para diferentes valores de  $S/(EI/L^3)$  obtenidos utilizando la ec. (25) para el caso particular de  $l_1 = l_2 = L/2$ ,  $(GA_s)_1 = (GA_s)_2 = \infty$  y  $(EI)_1 = (EI)_2 = EI$ . La fig. 5 muestra las variaciones de la carga crítica de pandeo de una columna simplemente apoyada con la rigidez  $S$  del apoyo elástico intermedio para diferentes valores de  $GA_s/(EI/L^2)$ .

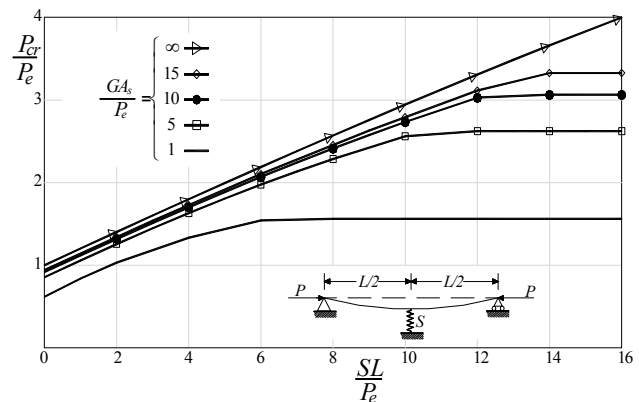
Nótese que: 1) los valores indicados en la fig. 4 a la curva  $S = 0$  son idénticos a los presentados por Timoshenko y Gere [12], página 100 tabla 2-6 para  $n = 1$ ; 2) la capacidad de carga de pandeo de la viga-columna es afectada significativamente no solo por la ubicación y rigidez del apoyo intermedio sino también por la magnitud de la

rigidez a cortante de cada segmento como es mostrado por las curvas de la fig. 5; y 3) la curva correspondiente a  $GA_s/(EI/L^2) = \infty$  en la fig. 5 muestra que la carga crítica aumenta en aproximadamente en la misma proporción que  $S$ . Esta curva es idéntica a la presentada por Timoshenko y Gere [12], página 73.



**Figura 4.** Diagramas de interacción  $P/(EI/L^2)$ -vs- $\alpha P/(EI/L^2)$  para la viga-columna de dos luces del Ejemplo 2 [para el caso particular de  $l_1 = l_2 = L/2$ ,  $(GA_s)_1 = (GA_s)_2 = \infty$  y  $(EI)_1 = (EI)_2 = EI$  con un soporte elástico intermedio  $S/(EI/L^3) = \infty, 100$ , y 0

**Figure 4.** Interaction Diagrams  $P/(EI/L^2)$ - vs- $\alpha P/(EI/L^2)$  for the two-span beam-column of Example 2 [for the particular case of  $l_1 = l_2 = L/2$ ,  $(GA_s)_1 = (GA_s)_2 = \infty$  and  $(EI)_1 = (EI)_2 = EI$ ] with an Intermediate Elastic Support with  $S/(EI/L^3) = \infty, 100$ , and 0



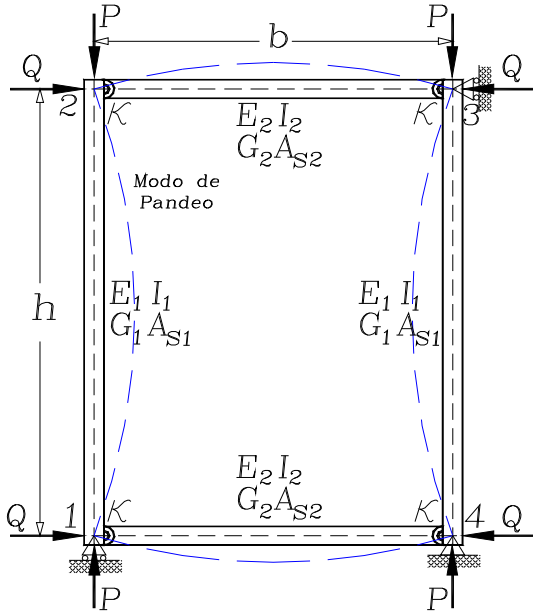
**Figura 5.** Variaciones de la carga crítica de una viga-columna simplemente soportada con la rigidez  $S$  del soporte elástico intermedio (donde  $P_e = \pi^2 EI/L^2$ )

**Figure 5.** Variations of the critical Load of a simply supported beam-column with the stiffness of the intermediate elastic support  $S$  (where  $P_e = \pi^2 EI/L^2$ )

### 4.3 Ejemplo 3-. Análisis de estabilidad de un pórtico con conexiones semirrígidas

Determine la carga crítica de pandeo de un pórtico doblemente simétrico con conexiones semirrígidas viga-a-columna de la fig. 6. Los miembros horizontales están conectados a las columnas verticales en ambos extremos con conexiones semirrígidas de rigidez  $\kappa$  (o factor de fijeza  $\rho$ ). Suponga que los miembros verticales y horizontales son rectos con las siguientes propiedades ( $G, E, A, A_s, I, h$ ) y ( $G, E, A, A_s, I, b$ ), respectivamente. También suponga que para el primer modo de pandeo como es mostrado en la Fig. 4 las cargas aplicadas  $P$  y  $Q$  son siempre verticales y horizontales, respectivamente. Incluya los efectos de las conexiones. Compare los resultados con los presentados por Timoshenko y Gere (1961, p. 62) cuando las conexiones viga-a-columna son rígidas ( $\rho = 1$ ). Estudie la estabilidad del pórtico bajo fuerzas de tracción y de compresión.

**Solución:** En este pórtico particular  $\rho_a = \rho_b = 1$  para ambas columnas, y  $\rho_a = \rho_b = \rho$  para ambas vigas. Ahora, del equilibrio de momento del nodo 1:



**Figura 6.** Ejemplo 3: Análisis de estabilidad de un pórtico doblemente simétrico con conexiones semirrígidas viga-a-columna (véase Timoshenko & Gere [12], página 34)

**Figure 6.** Example 3: stability analysis of a double symmetrical frame with semirigid connections (After Timoshenko & Gere [12], p. 34)

$$(M_{12})_{col.} + (M_{14})_{viga} = 0 \quad (28)$$

Debido a la simetría en el modo de pandeo, (i.e.,  $\theta_2 = \theta_4 = -\theta_1$  y consecuentemente una sola rotación desconocida y sin deriva entre los extremos de los miembros), entonces empleando las ecs. (2a) y (2b):

$$(M_{12})_{col.} = \frac{EI}{l} \theta_1 [(S_{aa})_1 - (S_{ab})_1] \quad (29)$$

$$(M_{14})_{viga} = \frac{EI}{b} \theta_1 [(S_{aa})_2 - (S_{ab})_2] \quad (30)$$

Donde:

$$(S_{aa})_1 = \frac{1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1}}{\beta_1 - \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2}}; \quad (S_{ab})_1 = \frac{\frac{\beta_1 \phi_1}{\sin \phi_1} - 1}{\beta_1 - \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2}};$$

$$(S_{aa})_2 = \left[ 3\rho(1-\rho)\beta_2\phi_2^2 + 9\rho^2 \left( 1 - \frac{\beta_2\phi_2}{\tan \phi_2} \right) \right] / Den;$$

$$(S_{ab})_2 = 9\rho^2 \left( \frac{\beta_2\phi_2}{\sin \phi_2} - 1 \right) / Den; \quad y$$

$$Den = (1-\rho)^2 \beta_2\phi_2^2 + 6\rho(1-\rho) \left( 1 - \frac{\beta_2\phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 9\rho^2 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)$$

Sustituyendo estas últimas cuatro expresiones, en las ecs. (29) y (30) y luego en la ec. (28), se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$\frac{\rho(1-\rho)\beta_2\phi_2^2 + 9\rho^2 \left( 1 - \frac{\beta_2\phi_2}{\tan \phi_2} \right) - 9\rho^2 \left( \frac{\beta_2\phi_2}{\sin \phi_2} - 1 \right)}{(1-\rho)^2 \beta_2\phi_2^2 + 6\rho(1-\rho) \left( 1 - \frac{\beta_2\phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 9\rho^2 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)} + \frac{EI_1}{EI_2} \frac{b}{h} \left[ \frac{\frac{\beta_1 \phi_1}{\sin \phi_1} (1 + \cos \phi_1) - 2}{\beta_1 - \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2}} \right] = 0 \quad (31)$$

La ecuación (31) puede ser reducida a

$$\frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2} = -\frac{b}{h} \frac{EI_1}{EI_2} \frac{\tan \phi_2/2}{\phi_2/2}$$

para un pórtico con columnas y vigas Bernoulli-Euler con  $\rho = 1$  la cual es idéntica a la ec. (2-25) de Timoshenko y Gere [12], página 63.

Las figs. 7a-c muestran una serie de diagramas de interacción  $P/(EI/L^2)$ -versus- $Q/(EI/L^2)$  para



diferentes valores de  $\rho$  y  $GA_s/(EI/L^2)$  todos obtenidos de la ec. (31) para el caso particular de  $h=b=L$ ,  $(GA_s)_1=(GA_s)_2=GA_s$  y  $(EI)_1=(EI)_2=EI$ .

Nótese que: 1) las capacidades de carga de pandeo son afectadas significativamente no solamente por la rigidez de las conexiones viga-a-columna sino también por la magnitudes de la rigidez a cortante de los miembros; y 2) el pandeo bajo fuerzas axiales de tracción es una imagen simétrica respecto al eje horizontal del pandeo bajo fuerzas axiales de compresión para miembros cortos con baja rigidez a cortante como los soportes elastoméricos de múltiples capas así como lo reporta Kelly [13].

**Ejemplo 4-. Análisis de estabilidad de un pórtico plano asimétrico**

Determine las cargas de pandeo de un pórtico plano con deriva lateral parcialmente inhibida mostrado en la fig. 8a. Los factores de fijeza  $\rho$  de la viga-a-columna y las conexiones semirígidas de la columna-a-fundación son indicadas en la fig. 7a. Suponga que: 1) los miembros horizontales y verticales son rectos inicialmente con las siguientes propiedades  $[(EI)_1, (GA_s)_1, h_1]$ ,  $[(EI)_2, (GA_s)_2, h_2]$  y  $[(EI)_3, (GA_s)_3, L]$ , respectivamente; 2) el modo de pandeo es como lo muestra la Fig. 8a y que las cargas aplicadas  $P$  y  $\alpha P$  son siempre verticales. Incluya los efectos de la rigidez  $S$  del arrojamiento lateral en el nodo 2. Compare los resultados con los presentados por Salmon Johnson [5] para un pórtico simétrico hecho de miembros Euler-Bernoulli cuando las conexiones viga-a-columna son rígidas ( $\rho_1=\rho_2=1$ ) y las bases de las columnas son perfectamente articuladas ( $\rho_3=\rho_4=0$ ) y  $\alpha=1$ . Discuta también la estabilidad del pórtico bajo fuerzas de tracción.

**Solución:** Las variables desconocidas del pórtico  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\Delta$  se muestran en la fig. 7a. Ahora, del equilibrio de momento de los nodos 1 y 2:

$$M_{13} + M_{12} = 0 \tag{32}$$

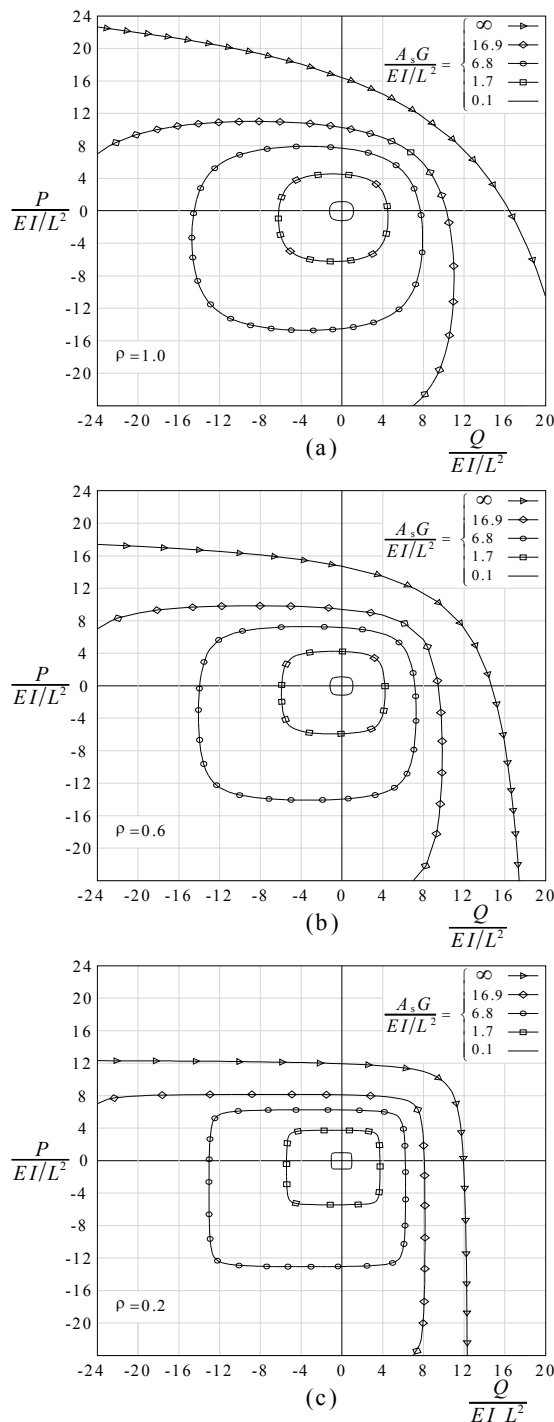
$$M_{24} + M_{21} = 0 \tag{33}$$

La tercera ecuación es obtenida aplicando equilibrio a cada miembro (ver fig. 8b):

Columna 1:  $M_{31} + M_{13} + P\Delta - V_1h_1 = 0$

Columna 2:  $M_{42} + M_{24} + \alpha P\Delta - V_1h_1 = 0$

Viga:  $V_1 + V_2 - S\Delta = 0$



**Figura 7.** Diagramas de interacción  $P/(EI/L^2)$ -vs- $Q/(EI/L^2)$  para un pórtico doblemente simétrico del ejemplo 3 con factor de fijeza viga-a-columna: (a)  $\rho=1$ ; (b)  $\rho=0.6$ ; y (c)  $\rho=0.2$   
**Figure 7.** Interaction diagrams  $P/(EI/L^2)$ -vs- $Q/(EI/L^2)$  for a double symmetrical frame of Example 3 with semirigid connections with : (a)  $\rho=1$ ; (b)  $\rho=0.6$ ; and (c)  $\rho=0.2$

De estas tres condiciones de equilibrio y las ecs. (32) y (33), se obtiene entonces la ec. (34):

$$\frac{M_{31} + M_{13}}{h_1} + \frac{M_{42} + M_{24}}{h_2} + \left[ \left( \frac{1}{h_1} + \frac{\alpha}{h_2} \right) P - S \right] \Delta = 0 \quad (34)$$

Ahora usando las ecs. (2a) y (2b):

$$M_{12} = \frac{EI_3}{L} \theta_1 (S_{aa})_3 + \frac{EI_3}{L} \theta_2 (S_{ab})_3 \quad (35)$$

$$M_{21} = \frac{EI_3}{L} \theta_1 (S_{ba})_3 + \frac{EI_3}{L} \theta_2 (S_{bb})_3 \quad (36)$$

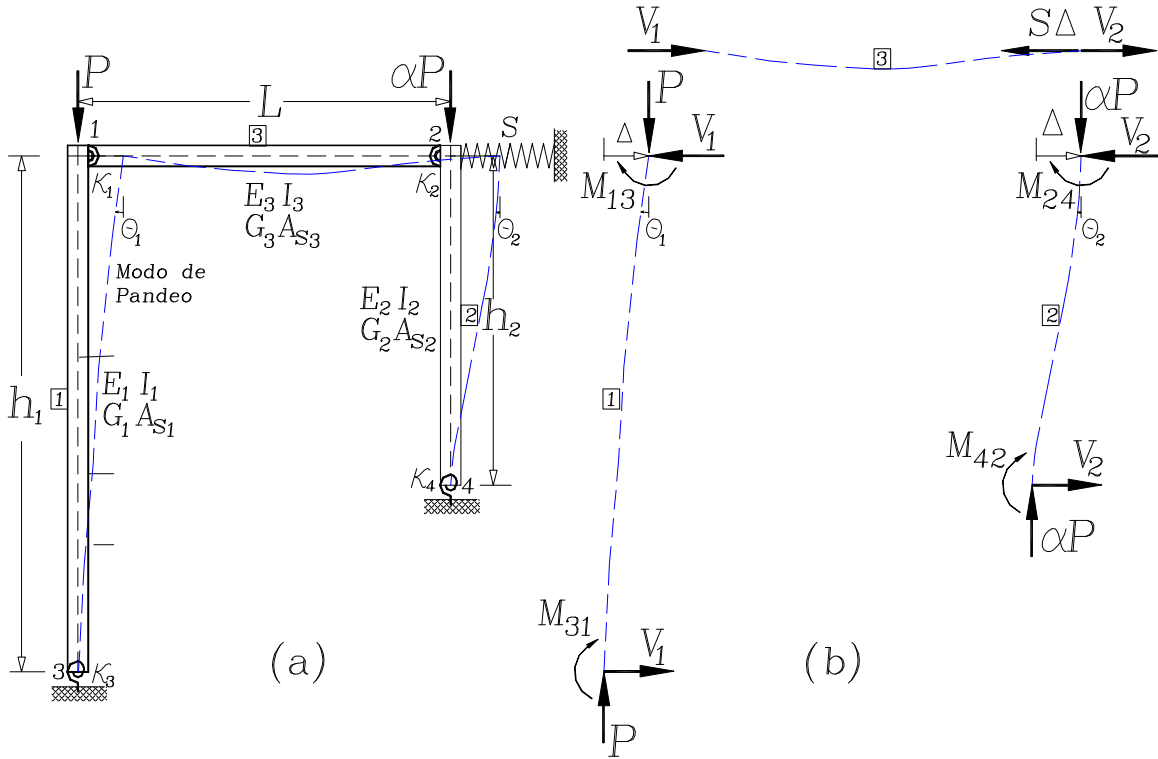
$$M_{31} = \frac{EI_1}{h_1} \theta_1 (S_{ab})_1 - \frac{EI_1}{h_1^2} [(S_{aa})_1 + (S_{ab})_1] \Delta \quad (37)$$

$$M_{13} = \frac{EI_1}{h_1} \theta_1 (S_{bb})_1 - \frac{EI_1}{h_1^2} [(S_{bb})_1 + (S_{ab})_1] \Delta \quad (38)$$

$$M_{42} = \frac{EI_2}{h_2} \theta_2 (S_{ab})_2 - \frac{EI_2}{h_2^2} [(S_{aa})_2 + (S_{ab})_2] \Delta \quad (39)$$

$$M_{24} = \frac{EI_2}{h_2} \theta_2 (S_{bb})_2 - \frac{EI_2}{h_2^2} [(S_{bb})_2 + (S_{ab})_2] \Delta \quad (40)$$

Sustituyendo (35)-(40) en las Ecs. (32), (33) y (34) se obtiene el siguiente sistema homogéneo 3×3:



**Figura 8.** Ejemplo 4: Análisis de estabilidad de un pórtico asimétrico con deriva lateral parcialmente inhibida: (a) Modelo estructural y cargas; (b) Fuerzas y momentos en cada miembro deflectado.

**Figure 8.** Example 4: Stability Analysis of an Unsymmetrical Frame with Lateral Sway Partially Inhibited: (a) Structural Model and Loads; (b) Forces on each Deflected Member

$$\begin{bmatrix} (S_{bb})_1 \frac{EI_1}{h_1} + (S_{aa})_3 \frac{EI_3}{L} & (S_{ab})_3 \frac{EI_3}{L} & -[(S_{ab})_1 + (S_{bb})_1] \frac{EI_1}{h_1^2} \\ (S_{ab})_3 \frac{EI_3}{L} & (S_{bb})_2 \frac{EI_2}{h_2} + (S_{bb})_3 \frac{EI_3}{L} & -[(S_{ab})_2 + (S_{bb})_2] \frac{EI_2}{h_2^2} \\ -[(S_{ab})_1 + (S_{bb})_1] \frac{EI_1}{h_1^2} & -[(S_{ab})_2 + (S_{bb})_2] \frac{EI_2}{h_2^2} & S - \left( \frac{1}{h_1} + \frac{\alpha}{h_2} \right) P + [(S_{ab})_1 + 2(S_{ab})_1 + (S_{bb})_1] \frac{EI_1}{h_1} + [(S_{ab})_2 + 2(S_{ab})_2 + (S_{bb})_2] \frac{EI_2}{h_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = 0 \quad (41)$$

Donde:

$$(S_{aa})_1 = \frac{3\rho_3 \left( \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} - 1 \right)}{(1-\rho_3) \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right) + 3\rho_3 \left( \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2} - \beta_1 \right)}$$

$$(S_{ab})_1 = \frac{3\rho_3 \left( \frac{\beta_1 \phi_1}{\sin \phi_1} - 1 \right)}{(1-\rho_3) \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right) + 3\rho_3 \left( \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2} - \beta_1 \right)}$$

$$(S_{bb})_1 = \frac{(1-\rho_3)\beta_1\phi_1^2 + 3\rho_3 \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right)}{(1-\rho_3) \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right) + 3\rho_3 \left( \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2} - \beta_1 \right)}$$

$$(S_{aa})_2 = \frac{3\rho_4 \left( \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} - 1 \right)}{(1-\rho_4) \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 3\rho_4 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)}$$

$$(S_{ab})_2 = \frac{3\rho_4 \left( \frac{\beta_2 \phi_2}{\sin \phi_2} - 1 \right)}{(1-\rho_4) \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 3\rho_4 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)}$$

$$(S_{bb})_2 = \frac{(1-\rho_4)\beta_2\phi_2^2 + 3\rho_4 \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right)}{(1-\rho_4) \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 3\rho_4 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)}$$

$$(S_{aa})_3 = \frac{3\rho_1(4 + \Gamma\rho_2)}{(4 - \rho_1\rho_2) + \Gamma(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)}$$

$$(S_{ab})_3 = \frac{3\rho_1\rho_2(2 - \Gamma)}{(4 - \rho_1\rho_2) + \Gamma(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)}$$

$$(S_{bb})_3 = \frac{3\rho_2(4 + \Gamma\rho_1)}{(4 - \rho_1\rho_2) + \Gamma(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)}$$

Haciendo el determinante de la matriz de 3x3 de la ec. (41) igual a cero, la ecuación característica es determinada y así las cargas de pandeo pueden ser calculadas.

Para el caso particular de un pórtico simétrico no arriostrado con columnas y vigas Bernoulli-Euler con  $EI_1 = EI_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $\rho_3 = \rho_4 = 0$ ,  $S = \Gamma = 0$ , y suponiendo que  $\theta_1 = \theta_2$  la ec. (41) característica puede ser reducida a:

$$\phi_1 \tan \phi_1 = 6 \frac{EI_3 / L}{EI_1 / h} \tag{42}$$

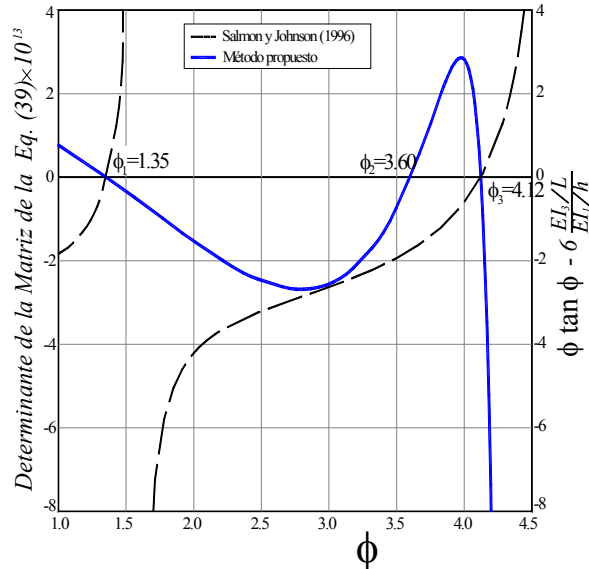
Otro caso interesante es cuando el valor de  $S$  se hace muy grande haciendo  $\Delta \approx 0$  (esto es, para un pórtico con deriva inhibida), entonces la ecuación característica es reducida a las primeras dos filas y columnas de la ec. (41):

$$\begin{vmatrix} (S_{bb})_1 \frac{EI_1}{h_1} + (S_{aa})_3 \frac{EI_3}{L} & (S_{ab})_3 \frac{EI_3}{L} \\ (S_{ab})_3 \frac{EI_3}{L} & (S_{bb})_2 \frac{EI_2}{h_2} + (S_{aa})_3 \frac{EI_3}{L} \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

Para el caso particular de un pórtico simétrico con columnas y vigas Bernoulli-Euler con  $EI_1 = EI_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $\rho_3 = \rho_4 = 0$ ,  $\Gamma = 0$  y asumiendo que  $\theta_1 = -\theta_2$  la ec. (43) característica puede ser reducida además a:

$$\frac{\phi_1^2 \sin \phi_1}{\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1} = -2 \frac{EI_3 / L}{EI_1 / h} \tag{44}$$

Las Ecs. (42) y (43) son idénticas a las Ecs. (14-2-30) y (14-2-18) presentadas por Salmon y Gere [5] páginas 900-912 para pórticos simétricos arriostrados y no arriostrados, respectivamente. Se debe enfatizar que la ec. (42) es únicamente capaz de capturar los modos antisimétricos de pandeo del pórtico simétrico no arriostrado (ya que se supuso que  $\theta_1 = \theta_2$ ). Así mismo, la ec. (44) es únicamente capaz de capturar los modos simétricos de pandeo de este pórtico simétrico arriostrado (ya que se supuso que  $\theta_1 = -\theta_2$ ). La fig. 9 muestra que los tres primeros auto-valores se obtuvieron empleando la ecuación característica (43) y los dos primeros obtenidos usando la ec. (44). Por tanto, el método propuesto es más poderoso desde que es capaz de capturar todos los modos de pandeo incluyendo aquellos bajo fuerzas axiales de tensión (como se mostró en los ejemplos 2 y 3).



**Figura 9.** Comparación de resultados para un pórtico simétrico con deriva lateral inhibida usando el método propuesto y la fórmula simplificada de Salmon y Johnson [5]

**Figure 9.** Comparison of Results for a Symmetrical Frame with Lateral Sway Inhibited using the proposed method and a simplified formula after Salmon and Johnson [5]

## 5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Un nuevo conjunto de ecuaciones pendiente-deflexión que incluyen los efectos de las deformaciones por cortante y la componente a cortante inducida por las fuerzas axiales aplicadas (Modelo de Haringx) son derivadas y luego empleadas en la estabilidad y análisis de segundo-orden de estructuras aporricadas hechas de vigas y columnas de Timoshenko con conexiones rígidas, semirrígidas y simples. El método propuesto está basado en las funciones de estabilidad “modificadas” para viga-columnas con conexiones semirrígidas desarrolladas por Aristizábal-Ochoa [10] y [11]. La validez y efectividad de las ecuaciones propuestas son verificadas contra cuatro soluciones bien documentadas sobre la estabilidad elástica y análisis de segundo-orden de viga-columnas y pórticos planos.

Las ventajas del método propuesto son: 1) los efectos de las conexiones semirrígidas son condensadas dentro de dos ecuaciones no lineales con tres incógnitas (las rotaciones en los extremos y la deriva lateral entre los extremos de los miembros) para cargas axiales de tracción y de

compresión sin introducir grados de libertad y ecuaciones adicionales; 2) más preciso que cualquier otro método disponible y capaz de capturar el fenómeno de pandeo bajo fuerzas axiales de tracción. Estas ventajas son particularmente importantes en el análisis de columnas cortas como son los apoyos elastoméricos laminados comúnmente usados en aislamiento sísmico de edificios; y 3) el método es poderoso, práctico, versátil, y fácil de enseñar.

Estudios analíticos indican que los efectos de la cortante aumentan las deflexiones laterales de estructuras aporricadas, y reducen sus cargas críticas axiales. Los efectos de las deformaciones por cortante y efectos  $P-\Delta$  (de segundo-orden) deben ser considerados en el análisis columnas con áreas de cortante relativamente bajas (como vigas y columnas de alma abierta o perforada) o bajo módulo de cortante  $G$  (como soportes elastoméricos y columnas cortas hechas de materiales compuestos) resultando en miembros con rigidez a cortante  $GA_s$  del mismo orden de magnitud de  $EI/L^2$ . Los efectos de cortante son también de gran importancia en la estática, estabilidad y comportamiento dinámico de soportes elastoméricos laminados usados en el aislamiento sísmico de edificios.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue llevada a cabo por la Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas en Medellín. El autor quiere expresar su aprecio a la Escuela de Ingeniería Civil, al DIME por el apoyo financiero y también a Jhon Monsalve-Cano, Jaime Hernández-Urrea, Camilo Builes-Mejía y David Padilla-Llano miembros del Grupo de Estabilidad Estructural en la preparación de los cuatro ejemplos.

## 7. APÉNDICE I

### 7.1 Derivación de las Ecs. (2a) y (2b)

El análisis de estabilidad de una columna prismática incluyendo las deformaciones por flexión y cortante (figs. 1a-c) es formulada usando la aproximación “modificada” propuesta por Timoshenko y Gere (1961, página 134). Esta aproximación ha sido utilizada por Kelly [13] en

el análisis de apoyos elastoméricos de aislamiento y por Aristizábal-Ochoa [10] y [11] en el análisis de estabilidad de columnas y pórticos. Las ecuaciones gobernantes son:

$$\beta EI u''(x) + P u(x) = -M_a - (M_a + M_b + P\Delta) \frac{x}{L} \quad (45a)$$

$$\beta EI \psi''(x) + P \psi(x) = \frac{M_a + M_b + P\Delta}{L} \quad (45b)$$

Donde:  $u(x)$ = deflexión lateral de la línea central de la viga-columna; y  $\psi(x)$ =rotación de la sección transversal debido solamente a flexión como muestra las figs. 1b-c.

Las soluciones de las ecuaciones (45a)-(45b) diferenciales lineales de segundo orden son:

$$u(x) = A \cos\left(\frac{x}{L} \phi\right) + B \sin\left(\frac{x}{L} \phi\right) + \frac{x}{L} \left( \frac{M_a + M_b + P\Delta}{P} \right) - \frac{M_a}{P} \quad (46a)$$

$$\psi(x) = C \cos\left(\frac{x}{L} \phi\right) + D \sin\left(\frac{x}{L} \phi\right) + \frac{I}{L} \left( \frac{M_a + M_b + P\Delta}{P} \right) \quad (46b)$$

Los coeficientes desconocidos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$  pueden ser obtenidos de las siguientes condiciones de borde:

$$\text{En } A' (x=0): u=0, \psi = \psi_a$$

$$\text{En } B' (x=h): u=\Delta, \psi = \psi_b$$

Donde:  $\psi_a$  y  $\psi_b$ = rotaciones de las secciones transversales en los extremos  $A'$  y  $B'$  con respecto al eje vertical debido a la flexión, respectivamente.

Por lo tanto:

$$A = \frac{M_a}{P}; B = \frac{M_a}{P} \tan(\phi/2) - \frac{M_a + M_b}{P \sin \phi};$$

$$C = \psi_a - \frac{I}{L} \left( \frac{M_a + M_b}{P} + \Delta \right);$$

$$D = \frac{\psi_a' - \psi_b' \cos \phi}{\sin \phi} - \left( \frac{M_a + M_b}{P} + \Delta \right) \tan(\phi/2)$$

$$\text{Ya que } V = P\psi - \frac{M_a + M_b + P\Delta}{L} \text{ y } u' = \psi + V/(GA_s)$$

las siguientes expresiones para  $\psi_a$  y  $\psi_b$  pueden ser obtenidas:

$$\psi_a = \frac{\sin \phi - \beta \phi \cos \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_a}{EI/L} + \frac{\sin \phi - \beta \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_b}{EI/L} + \frac{\Delta}{L} \quad (47a)$$

$$\psi_b = \frac{\sin \phi - \beta \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_a}{EI/L} + \frac{\sin \phi - \beta \phi \cos \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_b}{EI/L} + \frac{\Delta}{L} \quad (47b)$$

Sin embargo, las rotaciones en los extremos A

y B son:  $\theta_a = \psi_a' + \frac{M_a}{\kappa_a}$  y  $\theta_b = \psi_b' + \frac{M_b}{\kappa_b}$ ,

respectivamente. Por lo tanto:

$$\theta_a - \frac{\Delta}{L} = \frac{\sin \phi - \beta \phi \cos \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_a}{EI/L} + \frac{\sin \phi - \beta \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_b}{EI/L} + \frac{M_a}{\kappa_a} \quad (48a)$$

$$\theta_b - \frac{\Delta}{L} = \frac{\sin \phi - \beta \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_a}{EI/L} + \frac{\sin \phi - \beta \phi \cos \phi}{\beta \phi^2 \sin \phi} \frac{M_b}{EI/L} + \frac{M_b}{\kappa_b} \quad (48b)$$

Donde:  $\Delta$ = deriva relativa del extremo B con respecto al extremo A; y  $\theta_a$  y  $\theta_b$ = rotaciones de los extremos A y B debido a flexión con respecto al eje vertical, respectivamente.

Nótese que las ecs. (47a) y (47b) son idénticas a las derivadas por Salmon y Johnson [5] página 902 para columnas Bernoulli-Euler (cuando  $\beta=1$ ). Ahora, expresando ecs. (48a) y (48b) en forma matricial, y luego invirtiendo la matriz de coeficientes y usando las expresiones (1a) y (1b) [ $R_a = 3\rho_a/(1-\rho_a)$  y  $R_b = 3\rho_b/(1-\rho_b)$ ], las ecs. (2a) y (2b) pueden ser obtenidas.

## 7.2 Derivaciones de las ecuaciones (3)-(5)

Las ecuaciones gobernantes (45a) y (45b) cuando  $P=0$  son reducidas a:

$$\beta EI u''(x) = -M_a - (M_a + M_b) \frac{x}{L} \quad (49a)$$

$$\beta EI \psi''(x) = \frac{M_a + M_b}{L} \quad (49b)$$

Las ecuaciones (47a) y (47b) son mucho más simples de resolver. Después de aplicar las condiciones de borde [esto es:  $u=0$ ,  $\psi=\psi_{a'}$  en A' ( $x=0$ ); y  $u=\Delta$  y  $\psi=\psi_{b'}$  en B' ( $x=L$ )] sus soluciones son:

$$u(x) = \frac{\Delta}{L}x + \frac{L}{6EI}(2M_a - M_b)x - \frac{M_a}{2EI}x^2 + \frac{1}{6EIL}(M_a + M_b)x^3 \quad (50a)$$

$$\psi(x) = \frac{\Delta}{L} + (M_a + M_b)\frac{1}{GA_s} + \frac{L}{6EI}(2M_a - M_b) - \frac{M_a}{EI}x + \frac{1}{2EIL}(M_a + M_b)x^2 \quad (50b)$$

Sabiendo que:  $\psi = u' - V/(GA_s)$  y  $V = -\frac{M_a + M_b}{L}$ ,  $\psi_a$

y  $\psi_b$  pueden ser obtenidas directamente de la ec. (50b):

$$\psi_{a'} = \left(\frac{1}{3} + \frac{EI/L^2}{GA_s}\right)\frac{M_a}{EI/L} + \left(\frac{1}{6} + \frac{EI/L^2}{GA_s}\right)\frac{M_b}{EI/L} + \frac{\Delta}{L} \quad (51a)$$

$$\psi_{b'} = \left(-\frac{1}{6} + \frac{EI/L^2}{GA_s}\right)\frac{M_a}{EI/L} + \left(\frac{1}{3} + \frac{EI/L^2}{GA_s}\right)\frac{M_b}{EI/L} + \frac{\Delta}{L} \quad (51b)$$

Como se explicó previamente, las rotaciones en A y B son:  $\theta_a = \psi_{a'} + \frac{M_a}{\kappa_a}$  y  $\theta_b = \psi_{b'} + \frac{M_b}{\kappa_b}$ , respectivamente. Por lo tanto:

$$\theta_a - \frac{\Delta}{h} = \left(\frac{1}{3} + \frac{EI/h^2}{GA_s}\right)\frac{M_a}{EI/h} \quad (52a)$$

$$+ \left(-\frac{1}{6} + \frac{EI/h^2}{GA_s}\right)\frac{M_b}{EI/h} + \frac{M_a}{\kappa_a}$$

$$\theta_b - \frac{\Delta}{h} = \left(-\frac{1}{6} + \frac{EI/h^2}{GA_s}\right)\frac{M_a}{EI/h} \quad (52b)$$

$$+ \left(\frac{1}{3} + \frac{EI/h^2}{GA_s}\right)\frac{M_b}{EI/h} + \frac{M_b}{\kappa_b}$$

Expresando las ecuaciones (52a) y (52b) en forma matricial y luego invirtiendo la matriz de coeficientes y utilizando  $R_a = 3\rho_a/(1-\rho_a)$  y  $R_b = 3\rho_b/(1-\rho_b)$ , las ecuaciones (2a)-(2b) y (3)-(4) pueden ser obtenidas.

## 8. APÉNDICE II. REFERENCIAS

- [1] SAMUELSSON, A. AND ZIENKIEWICZ, O. C. "History of the Stiffness Method," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley InterScience, Vol. 67, 149-157, 2006.
- [2] WILSON, W. M. AND MANEY, G. A. "Slope-Deflection Method," University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin 80, 1915.
- [3] NORRIS, C. H. AND WILBUR, J. B. "Elementary Structural Analysis," McGraw-Hill Book Co., 2nd Edition, 1960.
- [4] KASSIMALI, A. "Structural Analysis," Thomson-Engineering, 2nd edition, 1998.
- [5] SALMON, C. G. AND JOHNSON, J.E. "Steel Structures: Design and Behavior," 4th Ed., HarperCollins College Publishers (Chapter 14), 1996.
- [6] BRYANT, R. H. AND BAILE, O. C. "Slope Deflection Analysis Including Transverse Shear," J. of the Structural Division, Vol. 103, (2), 443-446, 1977.
- [7] LIN, F. J., GLAUSER E. C., AND JOHNSTON B. J. "Behavior of Laced and Battened Structural Members," J. Struct. Engrg., ASCE, 123(5), 1377-1401, 1960.
- [8] ARISTIZÁBAL-OCHOA, J. DARÍO "First- and Second-Order Stiffness Matrices and Load Vector of Beam-Columns with Semi-rigid Connections," J. Struct. Engrg., ASCE, 123(5), 669-678, 1997.
- [9] ARISTIZÁBAL-OCHOA, J. DARÍO. "Story Stability of Braced, Partially Braced, and Unbraced Frames: Classical approach," J. Struct. Engrg., ASCE, 123(6), 799-807, 1977.
- [10] ARISTIZÁBAL-OCHOA, J. DARÍO "Column Stability and Minimum Lateral Bracing: Effects of Shear Deformations," J. of Engineering Mechanics, Vol. 130 (10), pp. 1223-1232, 2004.

[11] ARISTIZÁBAL-OCHOA, J. DARÍO. "Large Deflection and Postbuckling Behavior of Timoshenko Beam-Columns with semirigid connections including Shear and Axial Effects," ELSEVIER Journal of Engineering Structures, Vol. 29 (6), pp. 991-1003, 2007.

[12] TIMOSHENKO, S. AND GERE, J. "Theory of Elastic Stability," 2nd Ed., McGraw-Hill, Chapter II, 1961.

[13] KELLY, J. M. "Tension Buckling in multilayer Elastomeric Bearings," J. of Engineering Mechanics, Vol. 129 (12), Nov., 2003, pp. 1363-1368. Discussion by Aristizábal-Ochoa, J. Darío, Vol. 131 (1), 106-108, 2005.

## 9. NOTACIÓN

Los siguientes símbolos son usados en este documento:

$A_s$ = área efectiva de cortante de la sección transversal de la viga-columna;

$E$  = módulo de Young del material;

$G$ = modulo de cortante del material;

$L$ = longitud de la viga-columna AB;

$I$ = momento principal de inercia de la viga-columna alrededor del eje de flexión;

$M_a$  y  $M_b$ = momentos flectores en los extremos A y B, respectivamente;

$P$ = carga axial aplicada en A (+ compresión, -tracción);

$P_{cr}$ = carga crítica axial;

$P_e = \pi^2 EI/L^2$  = carga crítica de Euler;

$R_a$  y  $R_b$ = índices de rigidez de las conexiones a flexión en A y B, respectivamente;

$u(x)$ = deflexión lateral de la línea central de la viga-columna

$\beta = \frac{I}{I + P/(GA_s)}$  = factor de reducción del la

rigidez a flexión causada por la cortante;

$\Delta$ = deriva del extremo B con respecto a A;

$\kappa_a$  y  $\kappa_b$ = rigidez a flexión de las conexiones en los extremos en A y B, respectivamente;

$\rho_a$  y  $\rho_b$ = factores de fijeza en A y B de la columna AB, respectivamente;

$\psi(x)$ = rotación de la sección transversal debido solamente a flexión como muestra la fig. 1c;

$\psi_a$  y  $\psi_b$ = rotaciones por flexión de las secciones transversales en los extremos A' y B' con respecto a la cuerda A'B', respectivamente;

$\phi = \sqrt{P/(\beta EI/L^2)}$  = función de estabilidad en el plano de flexión;

$\theta_a$  y  $\theta_b$ = rotaciones de los extremos A y B debido a flexión con respecto al eje vertical, respectivamente.

$\Gamma = \frac{12(EI/L^2)}{GA_s}$  = coeficiente de reducción por cortante.