

# MATRICES DE RIGIDEZ Y DE CARGA DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN DE UNA VIGA-COLUMNA ORTOTRÓPICA CON CONEXIONES SEMIRRÍGIDAS: II) EJEMPLOS

## FIRST AND SECOND ORDER STIFFNESS AND LOAD MATRICES OF AN ORTHOTROPIC BEAM COLUMN WITH SEMIRIGID CONNECTIONS: II) EXAMPLES

J. DARIO ARISTIZABAL-OCHOA

*Profesor Titular Generación 125-Años, Facultad de Minas, Universidad Nacional, Medellín-Colombia, jdaristi@unal.edu.co*

Recibido para revisar Mayo 19 de 2009, aceptado Octubre 8 de 2009, versión final Noviembre 15 de 2009

**RESUMEN:** Las matrices de rigidez y de carga de primer y segundo orden de una viga-columna de Timoshenko ortotrópica de sección transversal simétrica con conexiones semirrígidas incluyendo los efectos de la carga axial en los extremos (tracción o compresión) y de las fuerzas cortantes a lo largo del elemento fueron deducidas en el primer artículo. El modelo de Haringx descrito por Timoshenko y Gere (1961) fue adoptado en la formulación de las matrices. Ambas matrices serán utilizadas en los análisis elásticos de estabilidad, de primer y de segundo orden de estructuras aporticadas con elementos viga-columna de Timoshenko de sección transversal simétrica con conexiones rígidas, semirrígidas y simples en los cinco adjuntos en este artículo. Estudios analíticos indican que la carga de pandeo y la rigidez de estructuras aporticadas son reducidas por efecto de la deformación por cortante a lo largo de cada elemento. Además, el fenómeno de pandeo bajo fuerzas de tracción en elementos con rigidez a cortante relativamente baja es incluido en las ecuaciones propuestas. El pandeo por tracción no debe ser ignorado en el análisis de estabilidad de elementos viga-columna con rigidez a cortante  $GA_s$  del mismo orden de magnitud que  $EI/I^2$ . La validez de ambas matrices es verificada con soluciones disponibles de análisis de estabilidad y de comportamiento elástico geométrico no lineal de estructuras viga-columna. Se incluyen cinco ejemplos que demuestran la eficiencia del método propuesto y de las matrices correspondientes.

**PALABRAS CLAVE:** Pandeo; Columnas; Tipos de construcción; Pórticos; Efectos  $P-\Delta$ ; Deformaciones por cortante; Análisis de segundo orden; Conexiones semirrígidas; Estabilidad; Pandeo por tracción.

**ABSTRACT:** The first- and second-order stiffness and load matrices of an orthotropic Timoshenko beam-column of symmetric cross section with semirigid connections including the effects of end axial loads (tension or compression) and shear deformations along the member are derived in the first article. The “modified” stability approach based on Haringx’s model described by Timoshenko and Gere (1961) is utilized in all matrices. Both matrices are used in the stability, first- and the second-order elastic analyses of framed structures made of Timoshenko beam-columns with rigid, semirigid and simple connections of symmetric cross sections in the five examples included in this article. Analytical studies indicate that the buckling load and the stiffness of framed structures are reduced by the shear deformations along the members. In addition, the phenomenon of buckling under axial tension forces in members with relatively low shear stiffness is captured by the proposed equations. Tension buckling must not be ignored in the stability analysis of beam-columns with shear stiffness  $GA_s$  of the same order of magnitude as  $EI/I^2$ . The validity of both matrices is verified against available solutions of stability analysis and nonlinear geometric elastic behavior of beam-column structures. Five examples are included that demonstrate the effectiveness of the proposed method and corresponding matrices.

**KEYWORDS:** Buckling; Columns; Construction Types; Computer applications; Frames; Loads;  $P-\Delta$  Effects; Shear deformations; Second-order analysis; Semirigid Connections; Stability; Tension Buckling.

## 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de esta publicación es presentar las posibles usos de las matrices de rigidez y de carga de primer y de segundo orden de un elemento viga-columna ortotrópica de Timoshenko con conexiones semirrígidas y de sección transversal simétrica utilizando el modelo de Haringx. Los efectos geométricos no lineales previamente descritos en el primer artículo son incluidos en los coeficientes de rigidez axial y transversal y el vector de carga.

## 2. EJEMPLOS

### 2.1 Ejemplo 1. Matrices de rigidez y de carga para una viga-columna ortotrópica pultruida (FRP)

Determine los principales coeficientes de rigidez (i.e.,  $k_{11}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{22}$  y  $k_{33}$ ) para una viga-columna I ortotrópica pultruida (FRP) de  $200 \times 200 \times 10$

descrita por Roberts (2002) para cargas axiales:  $P=40$  kN (compresión) y  $P=-40$  kN (tracción) con las siguientes propiedades:  $h=8,500$  mm;  $A=5,800$  mm<sup>2</sup>;  $E_x I_x=7.85 \times 10^8$  KN-mm<sup>2</sup>;  $E_y I_y=2.48 \times 10^8$  KN-mm<sup>2</sup>;  $G_x A_{sx}=5,340$  KN;  $G_y A_{sy}=6,710$  KN;  $G_e J_e=8.56 \times 10^5$  KN-mm<sup>2</sup>; módulos elásticos  $E_x=18.863$  KN/mm<sup>2</sup>,  $E_y=18.633$  KN/mm<sup>2</sup>,  $E_z=17$  KN/mm<sup>2</sup>,  $G_x=2.671$  KN/mm<sup>2</sup>,  $G_y=2.012$  KN/mm<sup>2</sup>, y  $G_e=4.428$  KN/mm<sup>2</sup>. También determine los momentos fijos para una carga uniformemente distribuida  $w$  aplicada a todo lo largo de la luz  $h$  y para una carga concentrada  $W$  aplicada en la mitad de la luz en cada uno de los planos principales. Suponga que  $\rho_{ax}=\rho_{ay}=\rho_{bx}=\rho_{by}=1$  alrededor de los ejes locales  $x$  y  $y$ , respectivamente.

#### Solución:

Los coeficientes principales de rigidez y los momentos fijos en los extremos se presentan a continuación.

a) Rigideces a flexión y momentos fijos en los extremos para  $P=40$  KN (compresión)

$P=40$ KN (compresión)	$\rho_{ax}=\rho_{ay}=\rho_{bx}=\rho_{by}=1$	$\rho_{ax}=\rho_{ay}=\rho_{bx}=\rho_{by}=0.75$	$\rho_{ax}=\rho_{ay}=\rho_{bx}=\rho_{by}=0.50$
$(k_{11})_x=(k_{22})_x$	$0.854254(4E_x I_x/h)$	$0.572224(4E_x I_x/h)$	$0.358332(4E_x I_x/h)$
$(k_{12})_x$	$1.038567(2E_x I_x/h)$	$0.561321(2E_x I_x/h)$	$0.253559(2E_x I_x/h)$
$(k_{11})_y=(k_{22})_y$	$0.525720(4E_y I_y/h)$	$0.321250(4E_y I_y/h)$	$0.156179(4E_y I_y/h)$
$(k_{12})_y$	$1.294652(2E_y I_y/h)$	$0.899608(2E_y I_y/h)$	$0.602634(2E_y I_y/h)$
$FEM_{ax}=-FEM_{bx}$ (debido a $w$ )	$-0.089653(w h^2)$	$-0.078035(w h^2)$	$-0.061974(w h^2)$
$FEM_{ay}=-FEM_{by}$ (debido a $W$ )	$-0.136664(Wh)$	$-0.118954(Wh)$	$-0.094471(Wh)$
$FEM_{ax}=-FEM_{bx}$ (debido a $w$ )	$-0.106684(w h^2)$	$-0.112779(w h^2)$	$-0.127329(w h^2)$
$FEM_{ay}=-FEM_{by}$ (debido a $W$ )	$-0.169251(Wh)$	$-0.178921(Wh)$	$-0.202004(Wh)$

b) Rigideces a flexión y momentos fijos en los extremos para  $P=-40$  KN (Tracción)

$P=-40$ KN (tracción)	$\rho_{ax}=\rho_{ay}=\rho_{bx}=\rho_{by}=1$	$\rho_{ax}=\rho_{ay}=\rho_{bx}=\rho_{by}=0.75$	$\rho_{ax}=\rho_{ay}=\rho_{bx}=\rho_{by}=0.5$
$(k_{11})_x=(k_{22})_x$	$1.096206(4E_x I_x/h)$	$0.708913(4E_x I_x/h)$	$0.425849(4E_x I_x/h)$
$(k_{12})_x$	$0.904982(2E_x I_x/h)$	$0.416787(2E_x I_x/h)$	$0.158894(2E_x I_x/h)$
$(k_{11})_y=(k_{22})_y$	$1.332487(4E_y I_y/h)$	$0.816889(4E_y I_y/h)$	$0.468262(4E_y I_y/h)$
$(k_{12})_y$	$0.846145(2E_y I_y/h)$	$0.338485(2E_y I_y/h)$	$0.114474(2E_y I_y/h)$
$FEM_{ax}=-FEM_{bx}$ (debido a $w$ )	$-0.078074(w h^2)$	$-0.060706(w h^2)$	$-0.042014(w h^2)$
$FEM_{ay}=-FEM_{by}$ (debido a $W$ )	$-0.115409(Wh)$	$-0.089736(Wh)$	$-0.062105(Wh)$
$FEM_{ax}=-FEM_{bx}$ (debido a $w$ )	$-0.070266(w h^2)$	$-0.050041(w h^2)$	$-0.031758(w h^2)$
$FEM_{ay}=-FEM_{by}$ (debido a $W$ )	$-0.100985(Wh)$	$-0.071917(Wh)$	$-0.045642(Wh)$

c) Coeficiente de rigidez axial  $s_f$

Para  $P=+40$  KN (compresión) y  $M_{xa}=M_{ya}=-M_{xb}=-M_{yb}=0.4$  KN-m:  $s_f=0.644555$

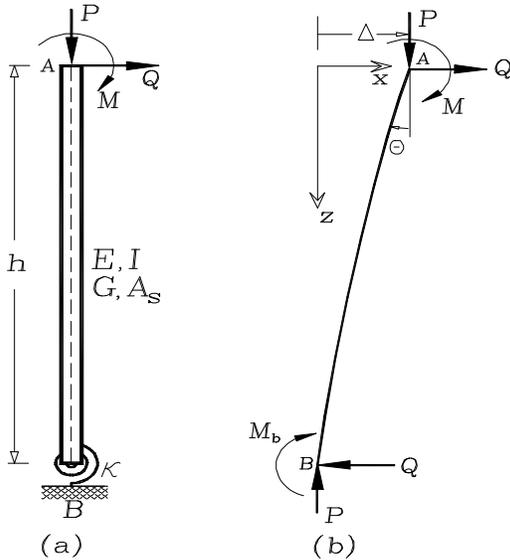
Para  $P=+40$  KN (compresión) y  $M_{xa}=M_{ya}=M_{xb}=M_{yb}=0.4$  KN-m:  $s_f=0.997303$

Para  $P=-40$  KN (Tracción) y  $M_{xa}=M_{ya}=-M_{xb}=-M_{yb}=0.4$  KN-m:  $s_f=1.005250$

Para  $P=-40$  KN (Tracción) y  $M_{xa}=M_{ya}=M_{xb}=M_{yb}=0.4$  KN-m:  $s_f=1.000896$

**2.2 Ejemplo 2. Análisis de segundo orden de una columna en y sujeta a varias cargas en el extremo superior**

Determine las ecuaciones carga-deflexión de segundo orden para la columna en voladizo AB mostrada en la figura 1. Compare las expresiones resultantes con las deducidas por Timoshenko y Gere (1961, páginas 5 y 13) para una columna de Bernoulli-Euler en voladizo perfectamente empotrada ( $\rho_b = \beta = 1$ ).



**Figura 1** EJEMPLO 2: Análisis de segundo orden de una columna en voladizo: (a) modelo estructural; y (b) forma deflectada y fuerzas en los extremos

**Figure 1** EXAMPLE 2: Second -Order Analysis of a Cantilever Column: (a) Structural Model and (b) Deflected shape and end forces

**Solución:** En este ejemplo  $\rho_a = 1$  y  $\rho_b = \rho$  y la rotación y la deflexión lateral en el extremo superior ( $\theta, \Delta$ ) pueden ser obtenidas utilizando las ecuaciones (15)-(17) del primer artículo como sigue:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \frac{k_{11}+k_{12}}{h} \\ \frac{k_{11}+k_{12}}{h} & \frac{k_{11}+2k_{21}+k_{22}-Ph}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M \\ Q \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Por lo tanto: 
$$\theta = -\left(1 + \frac{k_{12}}{k_{11}}\right) \frac{\Delta}{h} - \frac{M}{k_{11}} \quad (2)$$

y 
$$\Delta = \frac{Qh + M(1 + k_{12}/k_{11})}{(k_{22} - k_{12}^2/k_{11}) - Ph} h \quad (3)$$

Donde:

$$k_{11} = \frac{(1-\rho)\beta\phi^2 + 3\rho\left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right)}{(1-\rho)\left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right) + 3\rho\left(\frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - \beta\right)} \frac{EI}{h};$$

$$k_{12} = \frac{3\rho\left(\frac{\beta\phi}{\sin\phi} - 1\right)}{(1-\rho)\left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right) + 3\rho\left(\frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - \beta\right)} \frac{EI}{h};$$

$$k_{22} = \frac{3\rho\left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right)}{(1-\rho)\left(1 - \frac{\beta\phi}{\tan\phi}\right) + 3\rho\left(\frac{\tan(\phi/2)}{\phi/2} - \beta\right)} \frac{EI}{h}$$

para  $P > 0$  (compresión)

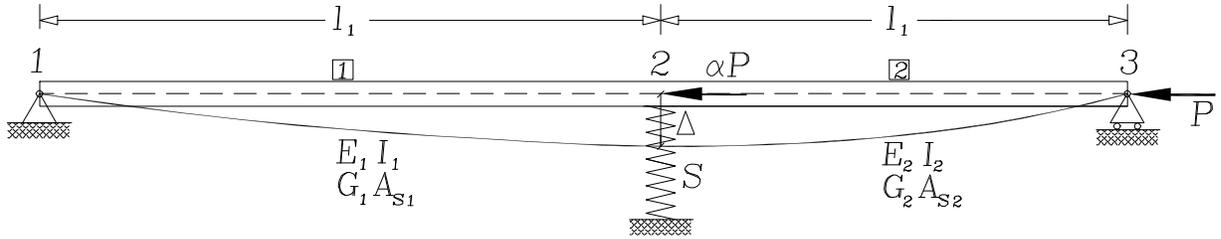
La ecuación (3) puede ser reducida a:

$$\Delta = \frac{QL^3}{EI\phi^2} \left(\frac{\tan\phi}{\phi} - 1\right) + \frac{ML^2}{EI} \left(\frac{1 - \cos\phi}{\phi^2 \cos\phi}\right)$$

la cual es idéntica a la superposición de las ecuaciones (g) y (1-33) presentadas por Timoshenko y Gere (1961, páginas 5 y 14) para el caso de una columna Bernoulli-Euler en voladizo perfectamente empotrada (i.e.,  $\rho_b = \beta = 1$ ) bajo la carga lateral  $Q$ , carga axial  $P$  y el momento flector  $M$ , respectivamente. El análisis a grandes deflexiones (vertical y horizontal) y el comportamiento post-pandeo de una columna de Timoshenko en voladizo sujetas a cargas en el extremo superior es discutido por Aristizabal-Ochoa (2007).

**2.3 Ejemplo 3. Estabilidad de una Viga-Columna de dos luces con un Soporte Elástico Intermedio**

Determine la carga crítica de pandeo de la viga-columna de dos luces mostrada en la figura 2. Asuma que los elementos 1 y 2 están inicialmente horizontales con propiedades  $(GA_s), (EI)_1, L_1$  y  $(GA_s)_2, (EI)_2, L_2$ , respectivamente. También suponga que las cargas aplicadas  $\alpha P$  y  $P$  permanecen siempre horizontales y son aplicadas en los nodos 2 y 3, respectivamente. Incluya los efectos de la rigidez transversal en el apoyo intermedio 2. Compare los resultados con los presentados por Timoshenko y Gere (1961, pp. 70 y 99) cuando el elemento está compuesto de dos elementos viga-columna Euler-Bernoulli.



**Figura 2. EJEMPLO 3.** Análisis de estabilidad de una viga-columna de dos luces con un apoyo elástico intermedio: modelo estructural y forma deflectada

**Figure 2. EXAMPLE 3.** Stability analysis of a two-span beam with an intermediate elastic support: structural model and deflected shape

### Solución:

Sabiendo que para el elemento AB que  $\rho_a = 0$ ,  $\rho_b = 1$  y para el elemento BC  $\rho_a = 1$ ,  $\rho_b = 0$ , los coeficientes de rigidez utilizando las expresiones (14)-(16) para  $P > 0$  y  $P(1 + \alpha) > 0$  son como sigue:

Rigidez a flexión del elemento AB en B:

$$k_{22} = \frac{\beta_1 \phi_1^2}{\left(1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1}\right)} \frac{EI_1}{L_1} \text{ y } k_{11} = k_{12} = 0$$

Rigidez a flexión del elemento BC en B:

$$k_{11} = \frac{\beta_2 \phi_2^2}{\left(1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2}\right)} \frac{EI_2}{L_2} \text{ y } k_{22} = k_{12} = 0$$

$$\text{Donde: } \phi_1 = \sqrt{(1 + \alpha)P / (\beta_1 EI_1 / L_1^2)};$$

$$\phi_2 = \sqrt{P / (\beta_2 EI_2 / L_2^2)};$$

$$\beta_1 = \frac{1}{1 + (1 + \alpha)P / (GA_s)_1};$$

$$\beta_2 = \frac{1}{1 + P / (GA_s)_2}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} (k_{22})_1 + (k_{11})_2 & -\frac{(k_{22})_1 + (k_{11})_2}{L_1} \frac{L_2}{L_2} \\ \frac{(k_{22})_1 + (k_{11})_2}{L_1} \frac{L_2}{L_2} & \frac{(k_{22})_1 - (1 + \alpha)PL_1}{L_1^2} + \frac{(k_{11})_2 - PL_2}{L_2^2} + S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \Delta \end{Bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Realizando el determinante de la matriz  $2 \times 2$  en la ecuación (4) se puede determinar la ecuación característica y de la cual se pueden calcular las cargas de pandeo. Por ejemplo, para el caso particular de  $EI_1 = EI_2$  y  $L_1 = L_2 = L/2$  y  $S = 0$ , la

ecuación característica del sistema homogéneo (28) se reduce a:

$$\left(1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1}\right) \left(1 + \frac{\beta_2 \phi_2^2}{\beta_1 \phi_1^2}\right) + \left(1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2}\right) \left(1 + \frac{\beta_1 \phi_1^2}{\beta_2 \phi_2^2}\right) = 4 \quad (5)$$

La ecuación (5) arroja resultados idénticos a los obtenidos por Timoshenko y Gere (1961, p. 99 ecuación 2-42) para un elemento simplemente apoyado compuesto por un elemento viga-columna Euler-Bernoulli (con  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ) con cargas de compresión en los nodos 2 y 3.

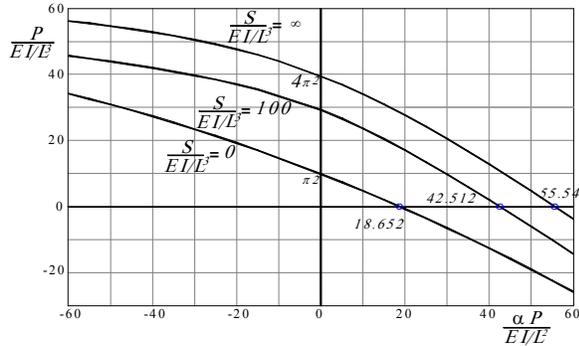
Otro caso interesante es cuando el valor de  $S$  se hace muy grande haciendo que  $\Delta \approx 0$ , y entonces la ecuación característica es reducida al primer término de la ecuación (4) como sigue:

$$(k_{22})_1 + (k_{11})_2 = 0 \quad \text{ó}$$

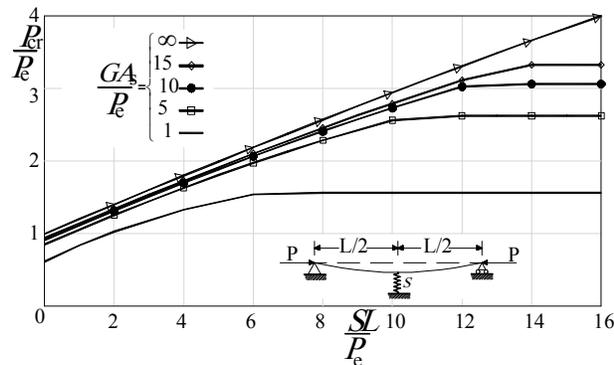
$$\frac{\beta_2 \phi_2^2}{\beta_1 \phi_1^2} \frac{\tan \phi_2}{\tan \phi_1} \left( \frac{\tan \phi_1 - \beta_1 \phi_1}{\tan \phi_2 - \beta_2 \phi_2} \right) = -\frac{L_2}{L_1} \frac{EI_1}{EI_2} \quad (6)$$

La ecuación (6) arroja resultados idénticos a los obtenidos por Timoshenko y Gere [1961, p. 67 ecuación (b)] para una viga-columna Euler-Bernoulli de dos luces (con  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ) con cargas de compresión en los nodos 1 y 3.

La figura 3 muestra una serie de diagramas de interacción de  $P/(EI/L^2)$ -versus- $\alpha P/(EI/L^2)$  para diferentes valores de  $S/(EI/L^3)$  todos obtenidos utilizando la ecuación (4) para el caso particular de  $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $(GA_s)_1 = (GA_s)_2 = \infty$  y  $(EI)_1 = (EI)_2 = EI$ . La figura 4 muestra la variación de la carga de pandeo de una viga simplemente apoyada con la rigidez  $S$  del soporte elástico intermedio localizado en la mitad de la luz para diferentes valores de  $GA_s/(EI/L^2)$ .



**Figura 3.** Diagramas de interacción  $P/(EI/L^2)$ -versus- $\alpha P/(EI/L^2)$  para la viga-columna de dos luces del ejemplo 3 [para el caso particular de  $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $(GA_s)_1 = (GA_s)_2 = \infty$  y  $(EI)_1 = (EI)_2 = EI$  con un Apoyo elástico Intermedio con  $S/(EI/L^3) = \infty, 100$ , y 0  
**Figure 3.** Interaction Diagrams  $P/(EI/L^2)$ -vs- $\alpha P/(EI/L^2)$  for the two-span beam-column of example 3 [for the particular case of  $L_1 = L_2 = L/2$ ,  $(GA_s)_1 = (GA_s)_2 = \infty$  and  $(EI)_1 = (EI)_2 = EI$  with an intermediate elastic support with  $S/(EI/L^3) = \infty, 100$ , and 0

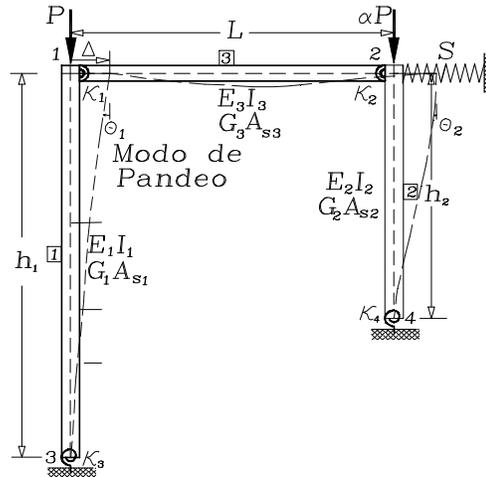


**Figura 4.** Variaciones de la carga crítica de una viga-columna simplemente apoyada con la rigidez del apoyo elástico intermedio  $S$   
 [esta curva es idéntica a la presentada por Timoshenko y Gere (1961, p. 73)].  
**Figure 4.** Variations of the critical loads of a simple supported beam column with the stiffness of the intermediate elastic support  $S$

Nótese que: 1) los valores indicados en la figura 3 correspondientes a la curva con  $S = 0$  son idénticos a los presentados por Timoshenko y Gere (1961, p. 100 Tablas 2-6 para  $n = 1$ ); 2) la capacidad de carga de pandeo de la viga-columna es afectada significativamente no solo por la ubicación cortante de los elementos como lo muestran las curvas de la figura 4; y 3) la curva correspondiente a  $GA_s/(EI/L^3) = \infty$  en la figura 4 muestra que la carga crítica se incrementa en aproximadamente la misma

proporción que  $S$  y la rigidez del soporte medio sino también por la magnitud de la rigidez  $a$

**2.4 Ejemplo 4. Análisis de la estabilidad de un pórtico plano con deriva lateral parcialmente inhibida sujeto a cargas axiales**



**Figura 5.** EJEMPLO 4: Análisis de estabilidad de un pórtico plano asimétrico con deriva lateral parcialmente inhibida: modelo estructural, cargas, grados de libertad y elemento reflectado  
**Figure 5.** EXAMPLE 4: Stability Analysis of an unsymmetrical frame with lateral sway partially inhibited: structural model, loads, degrees of freedom on deflected member.

Determine las cargas de pandeo del pórtico plano (figura 5) con deriva lateral parcialmente inhibida. Los factores de fijez  $\rho$  de las conexiones semirrígidas viga a columna y el de la columna a la fundación son indicados en la figura 5. Suponga que: 1) los elementos horizontales y verticales tienen cada uno las siguientes propiedades  $[(EI)_1, (GA_s)_1, h_1]$ ,  $[(EI)_2, (GA_s)_2, h_2]$  y  $[(EI)_3, (GA_s)_3, L]$ , respectivamente; y 2) las cargas axiales aplicadas  $P$  y  $\alpha P$  son siempre verticales. Incluya los efectos de la rigidez  $S$  de la riostra lateral en el nodo 2 y desprecie los efectos de las deformaciones axiales en todos los miembros. Compare estos resultados con los presentados por Salmon y Johnson (1996) para un pórtico simétrico compuesto de elementos Euler-Bernoulli cuando las conexiones viga a columna son rígidas (i.e.,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ) y las bases de las columnas están perfectamente articuladas (i.e.,  $\rho_3 = \rho_4 = 0$ ) y  $\alpha = 1$ . Discuta también la estabilidad del pórtico bajo fuerzas axiales de tracción.

**Solución:**

En este caso particular hay tres incógnitas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\Delta$  como muestra la figura 5. Aplicando

$$\begin{bmatrix} (k_{22})_1 + (k_{11})_3 & (k_{12})_3 & -\frac{(k_{12})_1 + (k_{22})_1}{h_1} \\ (k_{12})_3 & (k_{22})_2 + (k_{22})_3 & -\frac{(k_{12})_2 + (k_{22})_2}{h_2} \\ -\frac{(k_{12})_1 + (k_{22})_1}{h_1} & -\frac{(k_{12})_2 + (k_{22})_2}{h_2} & S - \left(\frac{1}{h_1} + \frac{\alpha}{h_2}\right)P + \frac{(k_{11})_1 + 2(k_{12})_1 + (k_{22})_1}{h_1^2} + \frac{(k_{11})_2 + 2(k_{12})_2 + (k_{22})_2}{h_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = 0 \quad (7)$$

Donde:

$$(k_{11})_1 = \frac{3\rho_3 \left( \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} - 1 \right)}{(1-\rho_3) \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right) + 3\rho_3 \left( \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2} - \beta_1 \right)} \frac{E_1 I_1}{h_1},$$

$$(k_{12})_1 = \frac{3\rho_3 \left( \frac{\beta_1 \phi_1}{\sin \phi_1} - 1 \right)}{(1-\rho_3) \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right) + 3\rho_3 \left( \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2} - \beta_1 \right)} \frac{E_1 I_1}{h_1},$$

$$(k_{22})_1 = \frac{(1-\rho_3)\beta_1 \phi_1^2 + 3\rho_3 \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right)}{(1-\rho_3) \left( 1 - \frac{\beta_1 \phi_1}{\tan \phi_1} \right) + 3\rho_3 \left( \frac{\tan(\phi_1/2)}{\phi_1/2} - \beta_1 \right)} \frac{E_1 I_1}{h_1},$$

$$(k_{11})_2 = \frac{3\rho_4 \left( \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} - 1 \right)}{(1-\rho_4) \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 3\rho_4 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)} \frac{E_2 I_2}{h_2},$$

$$(k_{12})_2 = \frac{3\rho_4 \left( \frac{\beta_2 \phi_2}{\sin \phi_2} - 1 \right)}{(1-\rho_4) \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 3\rho_4 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)} \frac{E_2 I_2}{h_2},$$

$$(k_{22})_2 = \frac{(1-\rho_4)\beta_2 \phi_2^2 + 3\rho_4 \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right)}{(1-\rho_4) \left( 1 - \frac{\beta_2 \phi_2}{\tan \phi_2} \right) + 3\rho_4 \left( \frac{\tan(\phi_2/2)}{\phi_2/2} - \beta_2 \right)} \frac{E_2 I_2}{h_2},$$

$$(k_{11})_3 = \frac{3\rho_1(4 + \Gamma\rho_2)}{(4 - \rho_1\rho_2) + \Gamma(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)} \frac{E_3 I_3}{L},$$

$$(k_{12})_3 = \frac{3\rho_1\rho_2(2 - \Gamma)}{(4 - \rho_1\rho_2) + \Gamma(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)} \frac{E_3 I_3}{L} \text{ y}$$

$$(k_{11})_3 = \frac{3\rho_2(4 + \Gamma\rho_1)}{(4 - \rho_1\rho_2) + \Gamma(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)} \frac{E_3 I_3}{L}$$

equilibrio, se obtiene el siguiente sistema homogéneo 3×3

Haciendo el determinante de la matriz 3×3 de la ecuación (7) igual a cero se determina la ecuación característica de la cual las cargas de pandeo pueden ser calculadas. En el caso particular de un pórtico simétrico no arriostrado con columnas Bernoulli-Euler y viga con  $EI_1 = EI_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $\rho_3 = \rho_4 = 0$ ,  $S = \Gamma = 0$ , y suponiendo que  $\theta_1 = \theta_2$  la ecuación característica de (7) es reducida a:

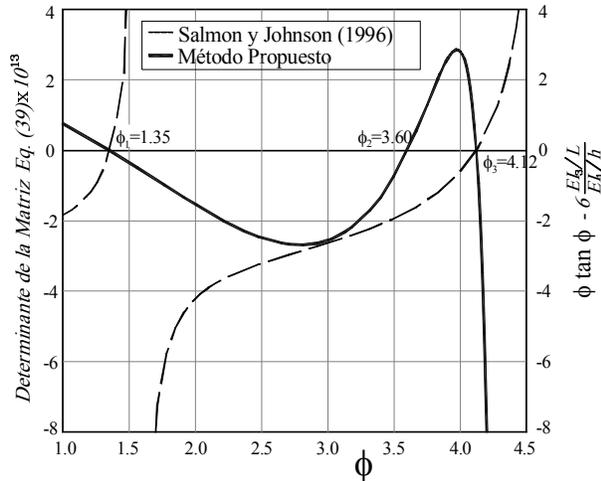
$$\phi_1 \tan \phi_1 = 6 \frac{EI_3 / L}{EI_1 / h} \quad (8)$$

Otro caso interesante es cuando el valor de  $S$  toma valores muy grandes haciendo que  $\Delta \approx 0$  (i.e., para un marco con deriva lateral inhibida), entonces la ecuación característica se reduce a las primeras dos filas y columnas de la ecuación (7):

$$\begin{vmatrix} (S_{bb})_1 \frac{EI_1}{h} + (S_{aa})_3 \frac{EI_3}{L} & (S_{ab})_3 \frac{EI_3}{L} \\ (S_{ab})_3 \frac{EI_3}{L} & (S_{bb})_2 \frac{EI_2}{h} + (S_{aa})_3 \frac{EI_3}{L} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

En el caso particular de un pórtico simétrico con columnas Bernoulli-Euler y viga con  $EI_1 = I_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $\rho_3 = \rho_4 = 0$ ,  $\Gamma = 0$  y suponiendo que  $\theta_1 = \theta_2$  la ecuación característica (9) puede ser reducida a:

$$\frac{\phi_1^2 \sin \phi_1}{\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1} = -2 \frac{EI_3 / L}{EI_1 / h} \quad (10)$$



**Figura 6.** Comparación de los resultados para un pórtico simétrico con deriva lateral inhibida usando el método propuesto y una fórmula simplificada de Salmon y Johnson (1996)

**Figure 6.** Comparison of results for a symmetrical frame with lateral sway inhibited using the proposing method and a simplified formula after Salmon y Johnson (1996)

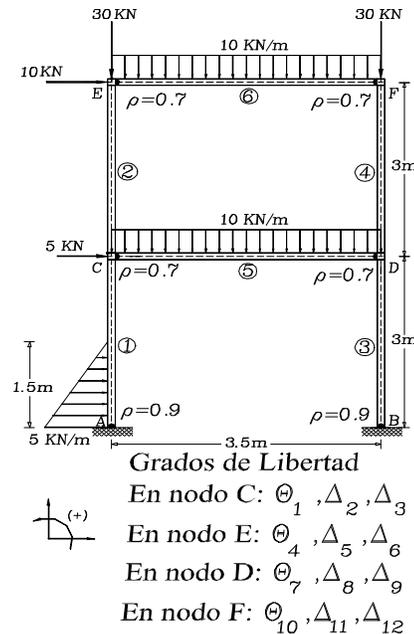
Las ecuaciones (8) y (10) son idénticas a las ecuaciones (14-2-30) y (14-2-18) presentadas por Salmon y Johnson (1996, páginas 900-912) para marcos simétricos arriostrados y no arriostrados, respectivamente. Se debe enfatizar que la ecuación (32) solo es capaz de capturar los modos anti-simétricos de pandeo del pórtico simétrico no arriostrado (dado que se supuso que  $\theta_1 = \theta_2$ ). Igualmente, la ecuación (10) solo es capaz de capturar los modos simétricos de pandeo del pórtico simétrico arriostrado (dado que se supuso que  $\theta_1 = -\theta_2$ ).

La figura 6 muestra los tres primeros valores propios obtenidos usando la ecuación característica (7) y los dos primeros obtenidos usando la ecuación (8). Por lo tanto, el método propuesto es más potente dado que es capaz de capturar todos los modos de pandeo incluyendo aquellos bajo fuerzas axiales de tracción (como se mostró en los Ejemplos 2 y 3).

**2.4 Ejemplo 5. Análisis de segundo orden de un pórtico plano con conexiones semirrígidas**

Determine las fuerzas internas de segundo orden de cada elemento para el pórtico plano mostrado

en la figura 7. El pórtico está hecho de elementos viga-columna ortotrópica pultruida FRP) descrita en el Ejemplo 1 con la flexión alrededor del eje  $x$ . Suponga que:  $A = 5800 \text{ mm}^2$ ;  $E_x I_x = 7.85 \times 10^8 \text{ KN-mm}^2$ ;  $G_x A_{sx} = 5340 \text{ KN}$ ; modulo de elasticidad  $E_x = 18.863 \text{ KN/mm}^2$ ,  $E_z = 17 \text{ KN/mm}^2$  y  $G_x = 2.671 \text{ KN/mm}^2$ . Incluir los efectos de la deformación por cortante y también los efectos de los momentos flectores sobre la rigidez axial.



**Figura 7. EJEMPLO 5:** Análisis de primer y segundo orden de un pórtico no arriostrado con conexiones semirrígidas: modelo estructural y grados de libertad

**Figure 7. EXAMPLE 5:** First and second order analysis of an unbraced frame with semirigid connections: structural model and degrees of freedom

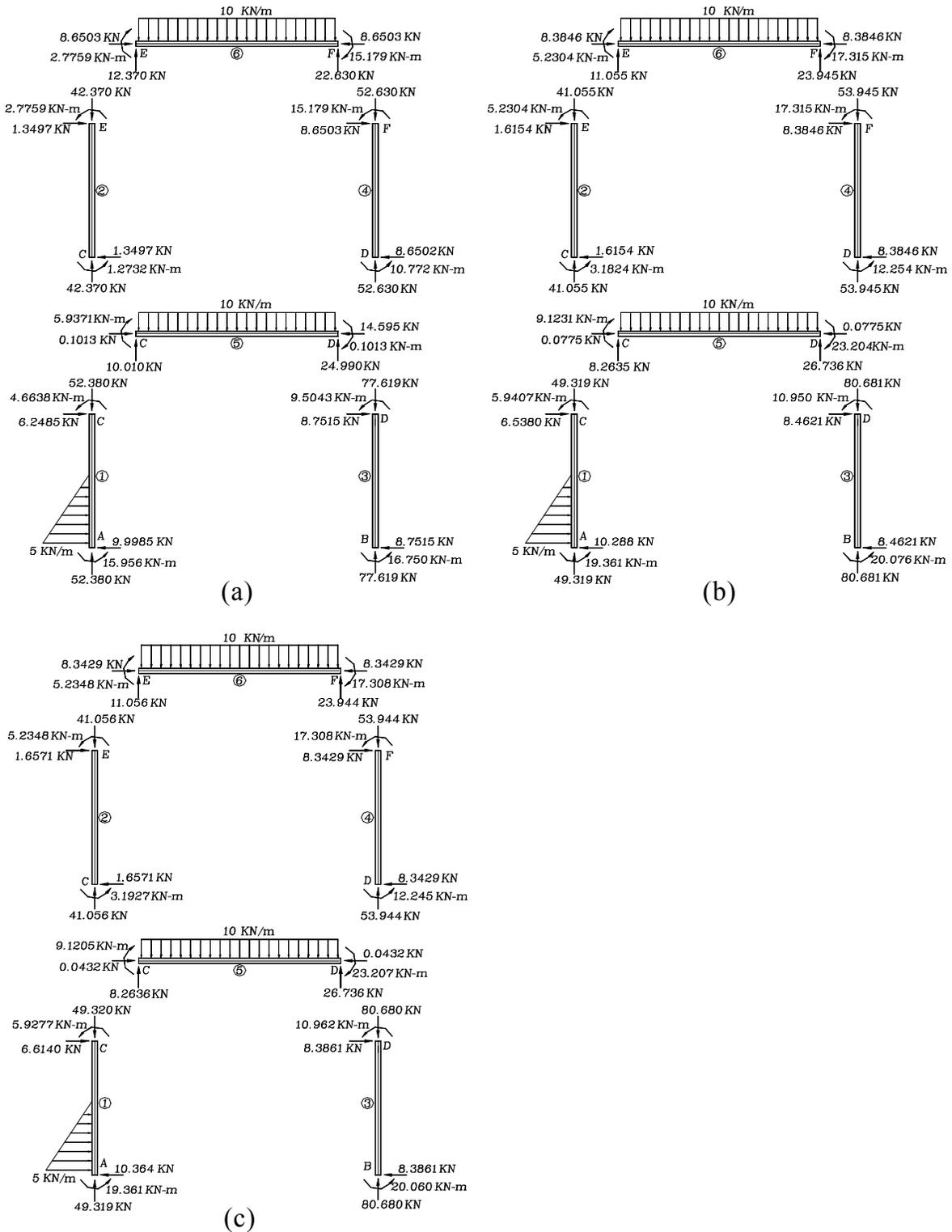
**Solución:**

Los diagramas de cuerpo libre de cada elemento del pórtico mostrando al final las fuerzas internas en los extremos obtenidas del análisis de primer orden son mostrados en la figura 8a.

En la primera iteración del análisis de segundo orden, la carga axial aplicada y la carga axial resultante de las fuerzas internas del pórtico mostradas en la figura 8a son consideradas. La matriz de rigidez global y el vector de carga del sistema de 12-DOF (ver figura 7) de cada iteración se resumen a En consecuencia, el análisis de primer orden es reducido a la solución del siguiente sistema de ecuaciones:







**Figura 8. EJEMPLO 5:** (a) Fuerzas y momentos de primer orden en los extremos, (b) Fuerzas y momentos de segundo orden en los Extremos (Iteración 1); y (c) Fuerzas y momentos de segundo orden en los extremos (segunda y última iteración)

**Figure 8. EXAMPLE 5:** (a) First-order end moments and forces, (b) Second-order end forces and moments (first iteration); and (c) Second-order end forces and moments (second and final iteration)

#### 4. AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue llevada a cabo en la Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas en Medellín. El autor quiere expresar su reconocimiento al Departamento de Ingeniería Civil de la Facultad de Minas y al DIME por el soporte financiero, a Jaime Hernandez-Urrea estudiante de doctorado de la universidad de Illinois en Champaign-Urbana, EE.UU, y Camilo Builes-Mejia estudiante de maestría de la universidad de Nevada en Reno, EE.UU y a Jhon Monsalve-Cano investigador estructural de ACCIONA (Madrid, España) miembros del Grupo de Estabilidad Estructural (GES) de la Universidad Nacional de Colombia por la preparación de las figuras de todos los ejemplos.

#### REFERENCIAS

[1] ARISTIZABAL-OCHOA, J. DARÍO. Large Deflection and Postbuckling Behavior of Timoshenko Beam-Columns with semirigid connections including Shear and Axial Effects, ELSEVIER Journal of Engineering Structures, Vol. 29 (6), June, pp. 991-1003, 2007.

[2] ROBERTS, T. M., Influence of Shear Deformation on Buckling of Pultruded Fiber Reinforced Plastic Profiles” J. of Composites for Construction, ASCE, Vol. 6(4), Nov. pp. 241-248, 2002.

[3] SALMON, C. G. AND JOHNSON, J.E., Steel Structures: Design and Behavior, 4th Ed., HarperCollins College Publishers (Chapter 14), Michigan, 1996.

[4] TIMOSHENKO, S. AND GERE, J. Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill, Chapter II, New York, 1961.