

SCORE TEST PARA EL EFECTO DEL COEFICIENTE DE SOLAPAMIENTO EN MODELOS DE SUPERFICIES DE RESPUESTA DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

SCORE TEST FOR THE OVERLAP COEFFICIENT EFFECT ON FIRST AND SECOND ORDER RESPONSE SURFACES MODELS

DARGHAN ENRIQUE

Candidato a doctor en estadística en la Universidad de los Andes, Mérida. MSc en estadística Aplicada, e_darghan@unet.edu.ve

SINHA SURENDRA

Coordinador del Doctorado de Estadística en la Universidad de los Andes, Mérida. PhD en estadística, sinha@ula.ve

GOITIA ARNALDO

Director del Instituto de Estadística Aplicada y Computación (IEAC) en la Universidad de los Andes, Mérida. PhD en estadística

Recibido para revisar septiembre 15 de 2009, aceptado marzo 19 de 2010, versión final mayo 6 de 2010

RESUMEN: En este artículo ha sido propuesto un test para el coeficiente de solapamiento para el modelo de Draper y Guttman utilizando modelos de superficies de respuesta de primer y segundo orden. El test está basado en el test de score de Rao y hace uso de la teoría de operadores de proyección perpendicular. El test puede utilizarse en diferentes patrones de vecindad siempre y cuando se considere al vecino más cercano como la unidad experimental directamente afectada por los tratamientos y los modelos de la superficie sean de primero y segundo orden. El método es simple de adoptar y puede implementarse en el campo de la agronomía o en la investigación de mercados, pues su naturaleza asintótica está en concordancia con el gran número de unidades experimentales generalmente presentes en este tipo de investigaciones.

PALABRAS CLAVE: Solapamiento, Superficie de Respuesta, Operador de proyección perpendicular, Score Test.

ABSTRACT: In this article, a test has been proposed for the overlap coefficient for Draper and Guttman's model using response surface models of first and second order. The test is based on the Score test of Rao and makes use of the theory of perpendicular projection operators. The test may be used in different neighborhood patterns whenever the closest neighbor can be considered as the experimental unit directly affected by the treatments and the response surface models be of first and second order. The method is simple to adopt and can be implemented in the field of Agronomy or marketing research since it's asymptotic nature is in agreement with the large number of experimental units generally present in this type of researches.

KEYWORDS: Overlap, response surface, perpendicular projection operator, Score Test.

1. INTRODUCCIÓN

En muchos experimentos agropecuarios la aplicación de un tratamiento sobre una unidad experimental pudiera afectar algunas veces la respuesta en las unidades experimentales vecinas, es decir, se presentará un solapamiento mutuo en el uso de los recursos o tratamientos. Los tratamientos aplicados a los cultivos tales como planes de

fertilización, riego, aplicación de pesticidas, utilización de controladores biológicos o el uso de agentes inoculantes pudieran dispersarse a las unidades experimentales adyacentes y por ende afectar la(s) variable(s) respuesta que está(n) siendo medida(s). Este fenómeno de solapamiento de tratamientos es muy frecuente y bastaría con visitar alguna una de producción donde se lleven a cabo algunos ensayos para detectar visualmente como

parte de uno o varios tratamientos aplicados en una parcela específica terminan en una parcela adyacente, ya sea por agentes climáticos como el viento o simplemente por las labores culturales que se ejercen entre las hileras del cultivo, tal como la eliminación de plantas arvenses. Algunos autores como Bhalli *et al* (1964) y Hide y Read (1990) describen esta situación en dos cultivos diferentes.

El solapamiento no es un concepto que pueda restringirse a las investigaciones de naturaleza agronómica o biológica en general, pues ya son varias las investigaciones de naturaleza académica que señalan el problema aunque no lo cuantifican. En estudios sobre métodos de enseñanza (clase presencial, semi-presencial, a distancia), donde los alumnos son las unidades experimentales y los tratamientos son los métodos junto con los recursos que usa el docente, pudiera ocurrir solapamiento cuando entre estudiantes se filtra información sobre el método en particular usado por un grupo de ellos. Este solapamiento es similar al descrito por Silk, (1966) y Sudman (1971), quienes atribuyen el solapamiento al flujo de la comunicación entre individuos por medio de los “líderes”.

El fenómeno de solapamiento o traslapo ha sido modelado por varios investigadores, entre ellos, Pearce (1957), quien consideró un modelo donde cada tratamiento tiene un efecto directo en la parcela en la cual es aplicado y un efecto de traslapo sobre las parcelas vecinas. Similarmente, Draper y Guttman (1980) estudiaron el solapamiento en superficies de respuesta, específicamente cuando se considera al vecino más próximo (horizontal, vertical o diagonal) como la fuente del traslapo, además, discutieron algunos métodos de prueba aproximados y el intervalo de confianza para el efecto de solapamiento usando el modelo no lineal

$$y = X\beta + \alpha WX\beta + \varepsilon, \quad (1)$$

donde y es un vector aleatorio de dimensión $n \times 1$ que denota la respuesta de n unidades experimentales, X es una matriz de diseño conocida de dimensión $n \times p$, β es un vector de parámetros desconocidos de dimensión $p \times 1$ que consiste de los efectos principales en el caso del modelo de primer orden, y de los efectos principales, cuadráticos puros y cuadráticos mixtos en el caso del modelo de segundo orden, α es el

efecto desconocido del traslapo, $W = (w_{ij})$ es una matriz de pesos conocida de dimensión $n \times n$, donde w_{ij} denota el efecto de la unidad j sobre la

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1 \quad \forall i$$

unidad i ; $w_{ii} = 0$, $w_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$, finalmente, se asume para

el vector de errores ε que su distribución es normal e independiente con esperanza cero ($E(\varepsilon) = 0$) y varianza $\sigma^2 I$. (Shukla y Subrahmanyam, 1999).

La naturaleza general de W permite a los investigadores asignar pesos apropiados de consideraciones a priori sobre patrones de siembra sobre la base del supuesto de que solo el vecino más cercano afecta la unidad con igual intensidad.

En la sección 2 de este artículo se describen aspectos teóricos de la metodología de superficies de respuesta y se detallan las matrices de diseño de un modelo de primer orden y uno de segundo orden en particular, ya que su conocimiento será útil para probar solapamiento en el modelo de Draper y Guttman. En la sección 3 se describe el test score de Rao (RST) como una herramienta estadística estándar para llevar a cabo pruebas de hipótesis estadísticas. En la sección 4 se construye el RST para el coeficiente de solapamiento del modelo (1) y en la sección 5 se muestra su aplicación en un patrón de siembra simple de un cultivo hortícola haciendo uso de una superficie de respuesta de cada tipo, es decir, una de primer y una de segundo orden.

2. DESARROLLO DEL SCORE TEST DE SOLAPAMIENTO

2.1 Superficies de respuesta

La metodología de superficies de respuesta (MSR) fue desarrollada por Box y Wilson (1951) y es discutida en una gran variedad de artículos y libros. El mismo Box pero en (1954) enfatizó las bases de la MSR y la ilustró claramente en una interesante variedad de aplicaciones. En los años siguientes, Hunter (1958) entre muchos otros ampliaron su discusión con la incorporación del estudio de las condiciones óptimas de operación. En los textos de

Cochran y Cox (1957) y de Box y Hunter (1978) se dedica hasta un capítulo entero al estudio de la *MSR*. En la actualidad, existen muchos otros textos que ya tratan en todo su contenido la *MSR*, tal es el caso de Myers y Montgomery (1995) y Khuri y Cornell (1996).

Una de las etapas del estudio de una superficie de respuesta involucra la selección del diseño experimental, entre los cuales son bastante conocidos aquellos que permiten la estimación de los parámetros en modelos de primer y segundo orden. En el primer tipo encontramos el diseño factorial 2^k , repeticiones factoriales del diseño 2^k , el diseño simplex, el diseño de Plackett-Burman entre otros. Del segundo tipo son conocidos el diseño factorial 3^k , el diseño de Box-Behnken, el diseño central compuesto, el diseño equiradial, el diseño rotatable cilíndricamente y el rotatable asimétrico, el diseño saturado de Box-Draper y muchos otros. En ambos tipos encontramos una discusión detallada en Khuri y Cornell (1996).

En esencia, la *MSR* es un conjunto de técnicas que se aplican antes, mientras y después de realizado un análisis de regresión, aunque antes, el investigador debe haber diseñado el experimento, y una vez hecho el análisis de regresión se ejecutan una serie de pruebas al modelo y se aplican algunas técnicas de optimización, de este modo, la *MSR* involucra la aplicación de la regresión y otros procedimientos con el fin de ganar mayor entendimiento de las características del sistema de respuestas bajo estudio.

En la *MSR* suele usarse la estimación mínimo cuadrática o máximo-verosímil para estimar los coeficientes del modelo de regresión. Si se asume que el número de observaciones n en la variable respuesta y es mayor que el número de factores involucrados y si el modelo de primer o segundo orden se escribe como $y = X\beta + \varepsilon$, siendo X la matriz de diseño asociada al modelo de superficie de respuesta y ε el vector de errores aleatorios con distribución normal, independientes y con esperanza cero ($E(\varepsilon) = 0$) y varianza $\sigma^2 I$, se tiene entonces que los parámetros estimados del modelo se estiman mediante

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (2)$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|(Q_n - M_X)y\|^2, \quad (3)$$

donde $M_X = X(X'X)^{-1}X'$ es la matriz de proyección perpendicular sobre el espacio de columnas de X , denotado como $C(X)$ y $\|\cdot\|$ denota la norma usual. La no singularidad de la matriz $(X'X)^{-1}$ dependerá del diseño, esto implica la importancia de conocer la estructura de la matriz X en su porción factorial, axial y puntos centrales, pues algunos casos presentan singularidad, por ejemplo, en el diseño de Box-Behnken, si se tienen $k=4$ y $k=7$ factores, son necesarios las corridas centrales para evitar la singularidad de $(X'X)^{-1}$. Montgomery (1995). En todo caso, aún en presencia de singularidad se podrían imponer condiciones laterales sobre los parámetros del modelo de modo que pudiera estimarse de forma única $\hat{\beta}$.

La similaridad del modelo de Draper y Guttman bajo la hipótesis nula de "ausencia de solapamiento" con el modelo lineal usual en la metodología de superficies de respuesta motivó el desarrollo del score test para el coeficiente de solapamiento en modelos de superficies de respuesta de primer y segundo orden, ya que la presencia de ciertos puntos de diseño en estos modelos suelen asegurar la no singularidad de $(X'X)^{-1}$, algo que precisamente no ocurre en los modelos de clasificación de dos vías, donde es necesario la imposición de condiciones laterales para la construcción del test (Darghan *et al*, 2009). Estos aspectos inducen la presentación teórica de un modelo de primer orden y posteriormente uno de segundo orden de las siguientes secciones, con el objeto de entender las características de las matrices de diseño asociadas y el procedimiento de construcción del test para el coeficiente de solapamiento basado en la prueba score de Rao.

2.1.1 El modelo de primer Orden. Diseño Factorial 2^k

En un diseño factorial 2^k , cada factor es medido a dos niveles, cuyas combinaciones pueden ser codificados con el par (s,t) , con $s=-1,1$; $t=-1,1$, siendo -1 el código asociado al nivel más bajo del factor y 1 el nivel más alto. Todas las

para $k=4$ y $k=7$ son estrictamente necesarias si se desea evitar la singularidad de la matriz de diseño, por lo que se recomienda el uso de 3 a 5 corridas centrales. (Myers y Montgomery, 1995).

El modelo de segundo orden para el diseño de Box-Behnken y los otros diseños de superficies de respuesta se escriben como en (5) y presenta con el modelo de Draper y Guttman las mismas analogías y diferencias que en el modelo de primer orden, es decir, el término asociado al solapamiento y la naturaleza de la matriz de diseño asociada.

2.2 Score test de rao

El artículo publicado por Rao (1948) introdujo un principio fundamental de prueba basado en la función de score como un método alternativo al de la razón de la verosimilitud y al método de Wald. Varios autores han descrito las características atractivas del método, entre ellos, Cramér (1946), Silvey (1959), Chandra (1985), Bera (1986) y Bera y Biliás (2001), entre otros.

Sea $l(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ la función logaritmo de la verosimilitud de un vector de parámetros p -dimensional $\boldsymbol{\theta}$ dada una muestra \mathbf{y} . La función del vector p -dimensional.

$$s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tag{6}$$

es conocida como la *función de score*. Para un dado $\boldsymbol{\theta}$ y una variable aleatoria \mathbf{y} , se tiene que

$$E_{\boldsymbol{\theta}}\{s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\} = \mathbf{0} \text{ y } cov\{s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\} = \mathfrak{F}(\boldsymbol{\theta}),$$

donde $\mathfrak{F}(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de información esperada de Fisher.

Para probar la hipótesis nula $H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, el estadístico de Rao viene dado por

$$\max_{m \neq 0} \frac{\{m \cdot s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0)\}^2}{m \cdot \mathfrak{F}(\boldsymbol{\theta}_0) m}, \text{ el cual se maximiza en } \{s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0) \cdot \mathfrak{F}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) s(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_0)\} \tag{7}$$

asumiendo que $\mathfrak{F}(\boldsymbol{\theta}_0)$ es definida positiva. Bajo H_0 este estadístico tiene distribución asintótica Chi-cuadrado central con p grados de libertad bajo condiciones generales. (Maddala et al, 1993).

2.3 Score test de rao en el modelo de solapamiento

De ahora en adelante consideraremos el modelo (1), para el cual asumiremos que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$. Suponga que la hipótesis que deseamos probar es

$$H_0: \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \text{ contra } H_a: \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}, \tag{8}$$

Bajo H_0 , el modelo (1) es el modelo lineal usual, expresado como $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

El logaritmo de la verosimilitud para el modelo (1) es

$$l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n \log(2\pi)}{2} - \frac{n \log(\sigma^2)}{2} - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{W} \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta}\|^2}{2\sigma^2} \tag{9}$$

de donde es fácil calcular el estimador máximo verosímil de $\boldsymbol{\beta}$ y σ^2 con $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, los cuales vienen dados respectivamente por las expresiones dadas respectivamente en (2) y (3).

Sea $s_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ el componente del vector score correspondiente al parámetro de interés ($\boldsymbol{\alpha}$) y sea

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}_{\boldsymbol{\alpha}} & \mathfrak{F}_{12} \\ \mathfrak{F}_{12} & \mathfrak{F}_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz de información esperada, particionada de modo que \mathfrak{F}_{11} se corresponda con la segunda derivada parcial con respecto al parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ y \mathfrak{F}_{22} se corresponde con las derivadas parciales con respecto a los parámetros de ruido $(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$. Para construir la prueba se requiere de la sub-matriz de \mathfrak{F}_{11}^{-1} correspondiente a \mathfrak{F}_{11} . El estadístico score para probar $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ viene dado por

$$S_{OT} = s_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) \cdot \mathfrak{F}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} s_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2) \tag{10}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\hat{\sigma}^2$ son los estimadores máximo-verosímiles de $(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$ respectivamente cuando $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ y $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} = \mathfrak{F}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}(\mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^2)$.

La función de score asociada al parámetro de interés viene dada por

$$s_{\alpha}(\alpha, \beta, \sigma^2) = -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} (WX\beta)'(y - Q\beta), \quad (11)$$

con $Q = X + \alpha WX$, el cual al ser evaluado en $(0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ se simplifica a la expresión

$$s_{\alpha}(0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} y' M_X W' (U_n - M_X) y, \quad (12)$$

sin embargo, por simplicidad llamaremos $\hat{H}' = y' M_X W'$, por lo que (12) se reduce a

$$s_{\alpha}(0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = -\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \hat{H}' (U_n - M_X) y. \quad (13)$$

A continuación, la información esperada asociada al parámetro de solapamiento $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \sigma^2)$ viene dada por

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \sigma^2) = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \|WM_X y\|^2, \quad (14)$$

y nuevamente evaluando en $(0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ y agrupando términos se tiene que el componente asociado al parámetro de interés en la inversa de la matriz de información esperada completa (la que involucra al parámetro de interés como los parámetros de ruido), es decir $\mathfrak{F}_{\alpha}^{-1}(0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$ es entonces

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\|\hat{H}\|^4} \left(\|\hat{H}\|^2 + \hat{H}' X (X' \hat{Q}_H X)^{-1} X' \hat{H} \right) \quad (15)$$

$$M_H = \hat{H} \hat{H}' \frac{\square}{\|\hat{H}\|^2}$$

con $\hat{Q}_H = I_n - M_H$, siendo el operador de proyección perpendicular sobre el espacio columna de \hat{H} e I_n una matriz de identidad de dimensión $n \times n$.

Finalmente, el estadístico de prueba para el coeficiente de solapamiento viene dado por

$$S_{OT} = \frac{n \left(\|\hat{H}\|^2 + \hat{H}' X (X' \hat{Q}_H X)^{-1} X' \hat{H} \right) \|\hat{H}' (U_n - M_X) y\|^2}{\|\hat{H}\|^4 \| (U_n - M_X) y \|^2} \quad (16)$$

el cual tiene distribución χ^2 con 1 grado de libertad, correspondiente a la dimensión del coeficiente de solapamiento en el modelo de Draper y Guttman.

3. APLICACIÓN DEL TEST DE SOLAPAMIENTO

3.1 Modelo de primer orden. Diseño factorial 2^k

El ensayo consistió en la evaluación del rendimiento (peso en una sola cosecha sin cortes, g/planta) del cultivo de acelga (*beta vulgaris*) como consecuencia de tres factores vinculados a la fertilización según el plan de la unidad de producción (ver agradecimientos). Los factores se etiquetaron según la aplicación en g/planta de: (x_1)- fórmula química 15:15:15 (3.0 y 5.0), (x_2)- fórmula química 12:12:17 (3.0 y 5.0) y (x_3)- gallinaza (200 y 250). La siembra se hizo en tres hileras y en distancias entre plantas e hileras iguales para simplificar la asignación de los pesos, de este modo se tienen vecinos más cercanos horizontales, verticales y diagonales, con asignación de pesos respectivos para las esquinas, bordes no esquineros y plantas entre hileras excluidos los bordes, tal como se ilustra en la figura 1:

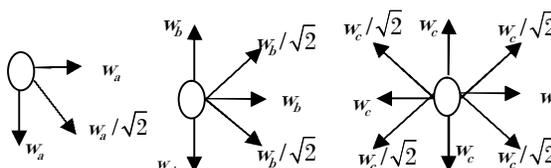


Figura 1. Modelos de vecindad para el cálculo de los pesos en el patrón de siembra

Figure 1. Neighbourhood models for the calculation of the weights in the pattern of sowing

Los pesos correspondientes a los diagramas se obtienen de:

$$(a) \quad 2w_a + \frac{w_b}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow w_a = \frac{4 - \sqrt{2}}{7}$$

$$(b) \quad 3w_b + \frac{2w_c}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow w_b = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}$$

$$(c) \quad 4w_c + \frac{4w_d}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow w_c = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

La tabla 1 muestra la disposición de los puntos del diseño en nueve replicas y los datos recolectados en campo en todas las corridas junto con la posición de la planta dentro de cada hilera, ya que de esto dependerá la construcción de la matriz de pesos.

Los subíndices (s,t,u,r) del vector de observaciones Y_{stur} cambian más rápido por el lado derecho, es decir, $r=1,2,\dots,9$; $u=-1,1$; $t=-1,1$ y $s=-1,1$. Esto significa que Y_{stur} representará la observación del nivel s del primer factor (X_1), el nivel t del segundo factor (X_2) y el nivel u del tercer factor (X_3) en la r -ésima réplica.

El modelo de fila para la matriz de pesos en la observación $Y_{-11-12} = 635$ es (W_{20j} , fila 20),

el cual pertenece a la hilera 1 y la planta número 8, con vecinos verticales $Y_{-1-1-17}$, y Y_{-1118} , vecino horizontal Y_{-1118} , y vecinos diagonales Y_{11-15} y Y_{1114} . Finalmente la fila queda como: $(0_{1x6} \ w_b \ 0_{1x27} \ w_b \ w_b \ 0_{1x21} \ w_c \ 0_{1x7} \ w_c \ 0_{1x5})$.

Bajo la hipótesis nula de ausencia de solapamiento ($H_0: \alpha = 0$), los parámetros estimados del modelo son:

Tabla 1. Disposición del diseño en variables codificadas en nueve réplicas del diseño 2^k .

Table 1. Design layout in codified variables in nine replicates of 2^k design

Corrida	x_1	x_2	x_3	Rendimiento (Ton/ha)								
				(hilera; planta)								
1	-1	-1	-1	630 (3;11)	625 (2;12)	635 (3;2)	630 (3;1)	640 (2;2)	635 (1;12)	625 (1;7)	615 (3;7)	620 (2;20)
2	1	-1	-1	650 (1;17)	640 (3;9)	635 (1;3)	630 (2;11)	635 (2;23)	625 (2;5)	620 (1;14)	615 (2;15)	620 (3;16)
3	-1	1	-1	635 (2;6)	635 (1;8)	640 (3;19)	645 (3;17)	640 (1;13)	635 (1;2)	640 (3;4)	645 (3;12)	650 (3;6)
4	1	1	-1	680 (1;10)	690 (3;18)	685 (2;16)	675 (3;20)	670 (2;7)	690 (1;16)	675 (1;6)	685 (3;24)	680 (2;21)
5	-1	-1	1	635 (2;22)	640 (3;15)	640 (3;3)	635 (1;1)	645 (1;24)	630 (2;1)	650 (3;8)	640 (3;13)	635 (2;17)
6	1	-1	1	665 (3;22)	660 (2;13)	670 (1;18)	675 (1;5)	660 (3;14)	655 (2;19)	660 (1;21)	670 (3;23)	680 (1;15)
7	-1	1	1	655 (2;3)	670 (2;10)	655 (1;20)	650 (1;11)	665 (2;24)	675 (1;23)	660 (2;18)	660 (2;8)	655 (1;9)
8	1	1	1	690 (2;14)	700 (1;22)	710 (3;21)	690 (2;9)	715 (3;10)	720 (1;4)	710 (3;5)	705 (2;4)	725 (1;19)

$\hat{\beta} = (656.6 \ 14.5 \ 15.8 \ 11.6)$ y $\hat{\sigma}^2 = 139.6$.

El score y la información esperada asociados al parámetro de interés son respectivamente $s_{\alpha}(0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = 10.99$ y $S_{\alpha}^{-1}(0, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = 0.018$, y finalmente, el Score Test de Rao para solapamiento en el modelo de superficie de respuesta para el diseño 2^k es $S_{OT} = 2.16$, que comparado con la distribución χ^2 con un grado de libertad para un nivel de confianza del 95%, nos conduce al no rechazo de la hipótesis nula de “no solapamiento”, es decir, no existe evidencia estadística para considerar que existe solapamiento entre las unidades vecinas debido a las variables de entrada.

3.2 Modelo de segundo orden. diseño de box-behnken

El experimento consistió en la evaluación del rendimiento (peso en gramos de cada planta) del cultivo de lechuga (*Lactuca sativa* L) sometido a 4 factores y 6 bloques. En este ensayo se utilizó un patrón de siembra por hileras de lechuga, (ver figura 2). Los tratamientos se etiquetaron como (x_1) a la aplicación de fertilizante en fórmula 12:12:17 (4 y 10 días después del trasplante), (x_2) a la aplicación de fertilizante en fórmula 15:15:15 (20 y 30 días después del trasplante), (x_3) a la aplicación de estiércol (60 y 100 g/planta) y (x_4) aplicación de urea a nivel foliar (10 y 20 mg/planta).

El punto central (0,0,0) está asociado a (7 días, 25 días, 80 g/planta). La disposición de canteros y tratamientos aparecen en la tabla 2, de la cual se observa claramente una corrida central en cada cantero y los dos tratamientos particulares y aleatoriamente asignados en cada bloque.

La asignación de pesos para la construcción de la matriz del patrón de siembra en hileras de la tabla 2 (una hilera dentro de cada bloque y cada bloque con 5 unidades experimentales) es fácil de generar, ya que para los bordes se asume que $w_{ij} = 1$ y entre plantas se asume que $w_{i,t-1} = 0.5$ y $w_{i,t+1} = 0.5$, ya que se considera en este caso que los bloques están lo suficientemente separados como para considerar el solapamiento entre plantas de canteros diferentes, de ser otro el caso, se tomarán las plantas entre hileras diferentes en el esquema de vecindad. Las tres situaciones del caso en estudio se ejemplifican en las figura 2, de donde las partes (a) y (b) representan las esquinas y la parte (c) representa a las unidades experimentales no esquineras.

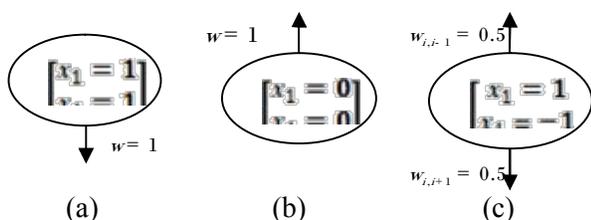


Figura 2. Modelos de vecindad para el cálculo de los pesos en el patrón de siembra en bloque 3
Figure 2. Neighbourhood Models for the calculation of the weights in the pattern of planting in block 3

El vector de observaciones \mathbf{y} fue llenado respetando la estructura general de la matriz de diseño, es decir, y_{str} representa la observación del nivel s del primer factor (x_1) y el nivel t del segundo factor (x_2) en el mismo bloque en la réplica r , con $s=-1,1$; $t=-1,1$, $r=1,2,\dots,m$, teniendo en cuenta que los factores x_1 y x_2 se van considerando según los subíndices respectivos $i=1,2,\dots,k-1$; $j=1,2,\dots,k$, cambiando más rápido por el subíndice derecho, lo cual también aplica en el par (s,t) , con lo cual se cubre la porción factorial del diseño, de modo que la parte final del vector de respuestas se corresponde con la porción asociada a los puntos centrales. Lo anterior es de mucha importancia ya que la construcción de la matriz de pesos depende este orden en particular.

A continuación se explicará la construcción de la última fila de la porción factorial de \mathbf{W} (primera réplica), la cual en este es de dimensión $(30m \times 30m)$, ya que el diseño genera 30 corridas por réplica. Del vector de respuestas \mathbf{y}_{str} , la fila 5 se corresponde con los factores x_1 y x_2 en sus niveles bajos $(s,t)=(-1,-1)$, la cual en la tabla 2 se corresponde con la corrida 14 y en este caso se tiene como vecinos más cercanos a las corridas 13 y 15, correspondientes a las posiciones 8 y 6 respectivamente en el vector de respuestas \mathbf{y} , por lo cual, en la matriz \mathbf{W} se asigna el peso de 0.5 en cada una de estas observaciones, quedando la fila 5 como:

$$W_{5j} = (0_{1 \times 5} \quad 0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0_{1 \times 22} \quad 0_{1 \times 30})$$

Tabla 2. Disposición del diseño en variables codificadas en dos réplicas del diseño
Table 2. Design layout in codified variables in two replicates of the design

x_1	x_2	x_3	x_4	Orden en N_{tr}	Corrida	Peso (g)	x_1	x_2	x_3	x_4	Orden en N_{tr}	Corrida	Peso (g)
1	0	0	1	12;42	1	350;345	-1	-1	0	0	1;31	16	320;325
1	0	0	-1	10;40	2	330;335	1	1	0	0	4;34	17	330;335
-1	0	0	-1	9;39	3	355;330	1	-1	0	0	2;32	18	325;340
-1	0	0	1	11;41	4	355;330	0	0	0	0	(25;55)	19	335;340
0	0	0	0	(27;57)	5	345;330	-1	1	0	0	3;33	20	320;325
0	0	1	1	24;54	6	355;340	0	1	0	1	20;50	21	380;365
0	0	1	-1	22;52	7	315;325	0	-1	0	1	19;49	22	355;350
0	0	-1	-1	21;51	8	315;325	0	1	0	-1	18;48	23	340;345
0	0	0	0	(30;60)	9	335;335	0	0	0	0	(29;59)	24	330;335
0	0	-1	1	23;53	10	345;335	0	-1	0	-1	17;47	25	325;335
-1	0	1	0	7;37	11	320;325	0	0	0	0	(28;58)	26	330;345
0	0	0	0	(26;56)	12	330;325	0	-1	-1	0	13;43	27	315;325
1	0	1	0	8;38	13	335;330	0	1	1	0	16;46	28	345;350
-1	0	-1	0	5;35	14	320;325	0	-1	1	0	14;44	29	335;330
1	0	-1	0	6;36	15	315;325	0	1	-1	0	15;45	30	340;345

De manera similar se procede con el resto de filas de la porción factorial hayan o no réplicas en el diseño, solo que debe tenerse en cuenta que la estructura de W es diagonal por bloques cuando existe más de una réplica. Finalmente, se asignan los pesos a las filas de los puntos centrales en cada réplica sin dar importancia al orden en que se haga.

Bajo la hipótesis nula de ausencia de solapamiento ($H_0: \alpha = \mathbf{0}$), el vector de parámetros estimados del modelo, es decir, $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0 \ \hat{\beta}_1 \ \hat{\beta}_2 \ \hat{\beta}_3)$, tiene como componentes a

$$\hat{\beta}_0 = 334.6, \hat{\beta}_1 = (1.9 \ 5.8 \ 3.1 \ 9.6)$$

$$\hat{\beta}_2 = (-5.7 \ 4.0 \ -6.4 \ 9.0),$$

$$\hat{\beta}_3 = (-5.7 \ 4.0 \ -6.4 \ 9.0) \text{ y } \hat{\sigma}^2 = 59.3$$

El score y la información esperada asociados al parámetro de interés son respectivamente $s_{\alpha}(\mathbf{0}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = 4.81$ y $S_{11}^{-1}(\mathbf{0}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = 0.026$, y finalmente, el RST para solapamiento en el modelo de superficie de respuesta de Box-Behnken

con 4 factores y 6 puntos centrales es $S_{OT} = 0.601$, que comparado con la distribución χ^2 con un grado de libertad, nos conduce al no rechazo de la hipótesis nula de “no solapamiento”, es decir, no existe evidencia estadística significativa para considerar que existe solapamiento entre la unidades vecinas debida a los tratamientos.

4. CONCLUSIONES

Se ha propuesto una prueba estadística para el solapamiento de tratamientos utilizando el modelo de Draper y Guttman con la variante en la matriz de diseño, donde en este caso se usa una matriz de diseño asociada a los modelos de regresión. Este test puede ser aplicado en investigaciones de naturaleza agropecuaria así como también en investigaciones de mercados y académicas, pues el traslapeo de tratamientos no es intrínseco a trabajos de origen biológico, sino a cualquier situación en donde parte del tratamiento aplicado sobre una unidad experimental pudiera terminar en la unidad

más vecina adyacente (caso espacial común en cultivos) o debido al flujo de información que ocurre entre personas que convergen en un sitio o que simplemente habitan en un nicho particular (caso de las comunidades estudiantiles). La prueba desarrollada se basa en el test Score de Rao, solo que en este caso hace uso de una teoría muy interesante de los modelos lineales como lo son los operadores de proyección perpendicular en los espacios vectoriales. El test es fácil de adoptar siempre y cuando la estructura del diseño experimental utilizado involucre un modelo como el de Draper y Guttman utilizando como variables de entrada los diferentes factores de una superficie de respuesta de primer o segundo orden y con matrices de diseño definidas positivas. La única dificultad radica en la laboriosa tarea de construir la matriz de pesos, la cual depende del número de puntos diferentes del diseño y del número de réplicas utilizadas en el experimento.

La naturaleza asintótica del test, es decir, el requerimiento de muestras grandes para asegurar el comportamiento distribucional del test, induce a la selección de diseños que generen suficientes corridas, lo cual puede pasar en el diseño factorial 2^k , diseño de Box-Behnken, diseño factorial 3^k , diseño central compuesto, entre otros, pero no en los casos como el diseño simplex o el diseño Plackett-Burman, donde la diferencia entre el número de corridas y el número de factores es la unidad, de modo que para que la muestra sea grande, sería preciso trabajar con un gran número de factores, lo cual en la práctica es muy complicado y costoso.

Es importante reconocer la dificultad asociada en la asignación de pesos de la matriz W , solo en el ejemplo de aplicación de Box-Behnken, fue necesaria una matriz de dimensión 60×60 , la cual no es simple para sistematizar pues la asignación de los tratamientos es totalmente aleatoria y su conformación depende de cada aleatorización.

Finalmente, la detección de ausencia de solapamiento desde el punto de vista del modelo, asegura como modelo definitivo al modelo lineal usual, de modo que el proceso de optimización

posterior a la regresión se basará en la superficie de primer o segundo orden postulada, de lo contrario, sería necesaria una estimación del coeficiente de solapamiento ($\hat{\alpha}$) y el ajuste de la superficie $y = U + \alpha W)X\beta + \varepsilon$. Además, la ausencia de solapamiento desde el punto de vista del experimento sugiere una apropiada aplicación de los tratamientos sobre las unidades experimentales, es decir, poco o nada de los tratamientos fue a parar en las parcelas vecinas de modo que este fenómeno afectara el rendimiento. Finalmente, desde el punto de vista de la superficie de respuesta, una ausencia de solapamiento en un modelo de primer orden (modelo de ajuste recomendado inicialmente en toda investigación que requiera el uso de la metodología de superficies de respuesta), propicia el modelado de segundo orden, en donde seguramente se manejen los tratamientos de modo similar al modelo de primer orden para garantizar ausencia de solapamiento y probablemente cambien la región de operación y experimental del ensayo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen con vehemencia la colaboración prestada por el Ingeniero y MSc Francisco Bonilla, coordinador de la Unidad Académica "La primavera" adscrita al decanato de extensión de la Universidad Nacional Experimental del Táchira por montar, monitorear y registrar los datos de los experimentos de cada uno de los diseños utilizados como ejemplos de aplicación en este artículo.

REFERENCIAS

- [1] BERA, A. K., MCKENZIE, C.R. Alternative forms and properties of the score test. *Journal of Applied Statistics*. 13, 3-25, 1986.
- [2] BERA, A. K. AND BILIAS, Y. Rao's score, Neyman's $C(\alpha)$ and Silvey's LM tests: an essay on historical developments and some new results. *Journal of Statistical Planning and Inference* 97, 9-44, 2001.

- [3] BHALLI, M. A., DAY, A. D., TUCKER, H., THOMSON, R. K., MASSEY, G. D. End-border effects in irrigated barley yield trials. *Agronomy Journal*, 1964, 346-348, 1964.
- [4] BOX, G.E.P. The Exploration and Exploitation of Response Surfaces: Some General Consideration and Examples. *Biometrics*, Vol. 10, No. 1, pp. 16-60, 1954.
- [5] BOX, G.E.P., BEHNKEN, D.W. Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables. *Technometrics*, Vol. 2, No. 4, pp. 455-475, 1960.
- [6] BOX, G.E.P., HUNTER, W.G., HUNTER, J.S. *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, New York: John Wiley, 1978.
- [7] BOX, G.E.P., WILSON, K.B. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 13, No. 1, pp. 1-45, 1951.
- [8] CHANDRA, T. K. AND MUKERJEE, R. Comparison of the likelihood ratio, Wald's and Rao's tests. *Sankhyā Ser. A* 47, 271-284, 1985.
- [9] COCHRAN, W.G., COX, G.M. *Experimental Design*. Second edition, New York: John Wiley, 1957.
- [10] CRAMÉR, H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1946.
- [11] DARGHAN, A.E., SINHA, S.P. and GOITIA, A.A. Rao's Score Test for the Overlap Coefficient in a two way classification model under side conditions. Manuscrito aún no publicado. Proyecto de tesis doctoral. Instituto de Estadística Aplicada y Computación. Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, 2009.
- [12] DRAPER, N. R. AND GUTTMAN, J. Incorporating overlap effects from neighbouring units into response surface models. *Applied Statistics* 39, 128-134, 1980.
- [13] GRAYBILL, F.A. *Theory and Application of the Linear Model*. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software. A Division of Wadsworth, Inc., 1976.
- [14] HIDE, G. A. AND READ, P. J. Effect of neighbouring plants on the yield of potatoes from seed tubers affected with gangrene (*Phoma foveata*) or from plants affected with stem canker (*Rhizoctonia solani*). *Annals of Applied Biology* 116, 233-243, 1990.
- [15] HUNTER, J.S. Determination of Optimum Operating Conditions by Experimental Methods: Part II-1. Models and Methods. *Industrial Quality Control*. Vol. 15, pp. 16-24, 1958.
- [16] KHURI, A.I., CORNELL, J.A. *Response Surfaces: Design and Analysis*. Second edition, Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc., 1996.
- [17] MADDALA, G.S., RAO, C.R., VINOD, H.D. *Handbook of Statistics*. Vol. 11. North Holland, Amsterdam. 800 pp., 1993.
- [18] MYERS, R.H., MONTGOMERY, D.C. *Response Surface Methodology. Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley Series in Probability and Statistics, 1995.
- [19] PEARCE, S. C. Experimenting with organisms as blocks. *Biometrika* 44, 141-149, 1957.
- [20] RAO, C. R. Large sample tests of statistical hypothesis concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 44, 50-57, 1948.

[21] SHUKLA, G.K., SUBRAHMANYAN, G.S.V. A Note on a test and Confidence Interval for Competition and Overlap Effects. *Biometrics*, Vol. 55, No. 1, pp. 273-276, 1999.

[22] SILK, A.J. Overlap among Self-Designated Opinion Leaders: A Study of Selected Dental Products and Services. *Journal of Marketing Research*, Vol. 3, No. 3, pp. 255-259, 1966.

[23] SILVEY, S. D. The Lagrange-multiplier test. *Annals of Mathematical Statistics*. 30, 389-407, 1959.

[24] SUDMAN, S. Overlap of Opinion Leadership across Consumer Product Categories. *Journal of Marketing Research*, Vol. 8, No. 2, pp. 258-259, 1971.