



# Analysis of vehicular traffic flow using a macroscopic model

## Análisis del flujo de tráfico vehicular a través de un modelo macroscópico

Fernando Pérez<sup>a</sup>, Alejandro Bautista<sup>b</sup>, Martin Salazar<sup>c</sup> & Antonio Macias<sup>d</sup>

<sup>a</sup> Ph.D., Escuela de Ciencias, Universidad Autónoma "Benito Juárez" de Oaxaca, México, [l\\_perez\\_s@yahoo.com.mx](mailto:l_perez_s@yahoo.com.mx)

<sup>b</sup> Ph.D., Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Puebla, México, [Alejandro.bautista@hotmail.com](mailto:Alejandro.bautista@hotmail.com)

<sup>c</sup> Ph.D., Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Puebla, México, [msalaz\\_77@hotmail.com](mailto:msalaz_77@hotmail.com)

<sup>d</sup> M.Sc., Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Puebla, México, [amacias46@yahoo.com.mx](mailto:amacias46@yahoo.com.mx)

Received: July 3th, 2013. Received in revised form: November 12<sup>th</sup>, 2013. Accepted: December 11<sup>th</sup>, 2013

### Abstract

Today the most cities in the world face different problems caused by vehicular traffic due to the increasing number of vehicles on road, such as traffic congestion, environmental pollution, excessive noise, increased accidents on the road, etc. Therefore it is important to represent the phenomenon by applying models so as to find better traffic flow patterns in a given city. In this work we introduce a simple macroscopic model to describe traffic flow in traffic congestion and we obtain the equation that relates the characteristic behavior between traffic flow and traffic density, known in the literature as fundamental relationship. Finally, we find an analytical solution for optimal flow passing vehicles on a congested road section.

**Keywords:** Vehicular traffic; traffic density; macroscopic model.

### Resumen

Hoy en día la mayoría de las ciudades en el mundo se enfrentan a diversos problemas ocasionados por el tráfico vehicular debido al creciente número de vehículos en circulación, tales como congestión, contaminación del medio ambiente, exceso de ruido, incremento del número de accidentes viales, etc. De ahí la importancia de representar el fenómeno de tráfico vehicular mediante modelos en busca de mejores patrones de flujo vehicular en una determinada ciudad. En este trabajo introducimos un modelo macroscópico simple para describir el flujo vehicular en un congestionamiento tráfico y obtenemos la ecuación que relaciona el comportamiento característico entre flujo vehicular y densidad de tráfico, conocida en la literatura como relación fundamental. Finalmente, hallamos una solución analítica para la fluidez óptima del paso de vehículos en un tramo de carretera congestionado.

**Palabras Clave:** Tráfico vehicular; densidad de tráfico; modelo macroscópico.

### 1. Introducción

El congestionamiento tráfico representa en la actualidad un gran reto a resolver debido al número de usuarios cada vez mayor que necesitan transportarse hacia las grandes ciudades para realizar sus actividades económicas, sociales, culturales y de cualquier índole. Más aún, el transporte no es exclusivo de los usuarios, ya que los productos que se consumen o se comercializan también necesitan ser transportados, lo que agudiza más el problema acerca del incremento del número de vehículos que transitan a través de las ciudades y que provocan problemas serios de tráfico vehicular, además de contaminación, exceso de ruido, incremento del número de accidentes viales, etc. La repercusión que tiene el incremento de vehículos automotores con el aumento del número de accidentes viales se discute en el trabajo [1] en donde se analiza ampliamente las causas de la accidentalidad, destacándose

las que son consecuencia de un mal diseño de las vías urbanas y las que se deben a una falta de criterios sobre seguridad vial para una mejor adaptación de sistemas de control vehicular.

En lo que respecta a congestionamiento, es tentativo pensar que un incremento en la infraestructura vial conlleva necesariamente a una mejora en la fluidez vehicular, pero no siempre es así; esto se discute en la famosa paradoja de Braess [2–5]. De hecho la dificultad que surge al agregar una nueva vía es un concepto que ya ha sido ampliado y aplicado recientemente a sistemas de transporte mesoscópicos [6,7]. El mal diseño de infraestructuras viales y el uso de controladores de tráfico obsoletos e ineficientes, son las principales causas que han ocasionado que varias ciudades en el mundo presenten problemas serios de transporte (ver por ejemplo [8]), por lo que últimamente se han presentado nuevas estrategias e intensificado estudios

sobre tráfico vehicular en sistemas viales, buscando agilizar la movilidad vehicular [9–11].

En la literatura se han reportado distintos enfoques para abordar el problema sobre congestión en el tráfico vehicular, destacándose los llamados modelos macroscópicos y microscópicos. En los modelos macroscópicos (ver por ejemplo [12,13]) no se toman en cuenta las características específicas de los vehículos y generalmente, por su comportamiento estadístico, las variables principales que intervienen, tales como tamaño de vehículos y distancia de separación entre vehículos, se promedian. Se consideran también modelos macroscópicos aquellos en donde se ha concebido el tráfico vehicular como un flujo compresible de un fluido, por lo que se ha tratado de describir este fenómeno usando teoría hidrodinámica.

Por otro lado, en los modelos microscópicos (ver por ejemplo [14]), en donde se incluyen los modelos de autómatas celulares, se toman en cuenta las diferentes variables que especifican las características propias de cada vehículo y además se especifican las reglas de movimiento individual de cada vehículo. A pesar de que con estos modelos se obtiene una información más completa sobre la dinámica de tránsito, se requiere de una gran cantidad de datos específicos sobre infraestructura vial, demanda de transporte y seguimiento de trayectorias de los vehículos que no es fácilmente accesible, pero que esta última puede ser recopilada empleando tecnología de punta [15,16].

El modelo matemático presentado aquí es macroscópico y se deduce a partir de la segunda ley de movimiento de Newton; las suposiciones establecidas para su desarrollo hacen posible determinar una solución analítica para la fluidez óptima a un problema ideal de congestión tráfico en una vía, suponiendo movimiento vehicular homogéneo (flujo vehicular estacionario).

Su verdadero valor radica en la simplicidad de su deducción, pues no involucra métodos numéricos y su predicción de la forma que debe poseer un diagrama de flujo fundamental, al menos de manera cualitativa, es correcta.

En la actualidad se encuentran reportados diversos modelos macroscópicos que estudian dinámica vehicular y dependiendo del número de variables independientes, necesarios para su descripción, se han clasificado en modelos de aproximación de primer orden [17,18], segundo orden [13,19–24] y de orden mayor [12,25]. Dicho número depende del nivel de detalle que se desee describir el sistema y de la complejidad del tipo de vía que se esté tratando. Por ejemplo, en los modelos de segundo orden, comúnmente consideran a la densidad de tráfico y la rapidez promedio de los vehículos, como las dos variables independientes.

La mayoría de estos modelos han sido aplicados a situaciones más complejas de tráfico que la de un tramo recto de carretera de un solo carril, por lo que el uso de los cálculos numéricos para resolver las ecuaciones resultantes de la modelación, es indispensable, ya que difícilmente se pueden resolver de manera analítica.

En ese sentido podemos decir que nuestro modelo necesitaría reformularse si queremos incluir un mayor

número de factores inherentes a una situación de tráfico; sin embargo, para nuestro fin, consideramos que puede servir de base para desarrollar modelos más sofisticados y con ello, resolver problemas de frontera sobre dinámica vehicular, que es uno de nuestros próximos objetivos.

El presente artículo presenta la siguiente estructura: además de la presente introducción, en la sección 2 se plantean las ecuaciones de movimiento de los vehículos en un tramo congestionado, analizando las fuerzas aplicadas que intervienen en cada vehículo. En la sección 3 se resuelven dichas ecuaciones para resolver las rapidez de los vehículos en función de la densidad de tráfico ( $x$ ). En la sección 4 se introduce el concepto de flujo vehicular y se determina su comportamiento en función de  $x$ . En la sección 5 se obtiene la solución de la fluidez óptima para una flota de vehículos en el caso considerado.

## 2. Ecuaciones de movimiento de vehículos en un tramo congestionado

La fuerza resultante sobre el  $j$ -ésimo vehículo que se desplaza a través de un tramo recto de carretera (movimiento unidimensional) es

$$\text{Fuerza de tracción del motor} - \text{Fuerza de resistencia al avance.} \quad (2.1)$$

La fuerza de resistencia al avance es la resultante de las fuerzas de fricción presentes: pavimento con neumáticos y rozamiento del vehículo con el aire (se pueden despreciar las fuerzas de rozamiento del vehículo con el aire ya que son pequeñas en comparación con las fuerzas de fricción entre pavimento y neumáticos), y está relacionada de manera proporcional con la intensidad con el que el conductor pisa el freno.

Suponiendo que al ingresar el vehículo en el tramo congestionado se deja de acelerar, como normalmente sucede, entonces la fuerza de tracción del motor en (2.1) es cero y de la segunda ley de Newton se tiene

$$m_j \frac{d^2 z_j(t)}{dt^2} = - \text{Fuerza de resistencia al avance} \quad (2.2)$$

donde  $z_j(t)$  es la coordenada de posición del vehículo  $j$  en el instante  $t$  a lo largo del tramo carretero. Hemos ubicado el origen de nuestro eje de coordenadas  $z$  al inicio de dicho tramo y la dirección del flujo de vehículos es hacia el eje  $z$  positivo.

La fuerza de resistencia al avance debe ser directamente proporcional a la fuerza con que se aplican los frenos y esta última fuerza es, a la vez:

i) Inversamente proporcional a la distancia relativa entre los vehículos adyacentes  $j$  y  $(j - 1)$  (hemos ubicado las posiciones de los vehículos de tal forma que  $z_j < z_{j-1}$ ). Dicho de otra forma: a mayor espaciamiento entre vehículos, menos freno; a menor espaciamiento, más freno.

ii) Directamente proporcional a la rapidez relativa entre ambos vehículos (note que  $\dot{z}_j(t) > \dot{z}_{j-1}(t)$ ). A mayor rapidez relativa, más freno y viceversa. Por lo tanto, tomando en

consideración las dos hipótesis i) y ii) para la fuerza con que se aplican los frenos y su relación de ésta con la fuerza de resistencia al avance, (2.2) se transforma en

$$m_j \frac{d^2 z_j(t)}{dt^2} = -k \frac{\dot{z}_j(t) - \dot{z}_{j-1}(t)}{|z_j(t) - z_{j-1}(t)|} \quad (2.3)$$

$k$  es una constante de proporcionalidad mayor que cero. La cantidad denotada en valor absoluto resalta el hecho de que el denominador se refiere a una distancia y el signo menos indica que la dirección de la fuerza resultante es en dirección opuesta a la dirección del flujo.

Suponiendo que hay  $N$  vehículos en el tramo considerado en el instante  $t$ , (2.3) con  $j = 1, 2, \dots, N$ , nos representan sus ecuaciones de movimiento.

### 3. Rapidez de un vehículo en un tramo congestionado

Analicemos antes que nada las condiciones que debe satisfacer la rapidez de un vehículo al entrar al tramo de carretera congestionado. De manera similar a la situación en que un vehículo se acerca a un cruce de paso de tren o al entrar en un túnel, el conductor debe de reducir su rapidez por precaución. En nuestro caso, la rapidez de un vehículo debe ser función de la densidad de tráfico. De hecho a mayor congestionamiento la rapidez de los carros es menor y viceversa; así que, si denotamos por  $s_j(x)$  la rapidez del vehículo  $j$  y  $x$  el congestionamiento, entonces  $s_j(x)$  es una función decreciente de  $x$  y por lo tanto satisface

$$s_j'(x) \leq 0. \quad (3.1)$$

(La prima indica derivada con respecto a  $x$ ). En un extremo de bajo congestionamiento  $x_c$  los vehículos podrán moverse al límite de la rapidez permitida  $s_{max}$ , es decir,

$$s_j(x_c) = s_{max}, \quad (3.2)$$

y también para congestionamientos menores a  $x_c$ :

$$s_j(x) = s_{max} \quad \text{si } 0 < x \leq x_c, \quad (3.3)$$

ya que en este intervalo de bajo congestionamiento los vehículos son libres de moverse a la velocidad límite sin peligro de chocar.

Por otro lado, en un extremo de alto congestionamiento  $x_{max}$  la rapidez de los vehículos es cero, que corresponde al estado en que los vehículos están atrapados en el tráfico, inmovilizados; por lo que podemos escribir

$$s_j(x_{max}) = 0. \quad (3.4)$$

Ahora modelaremos la forma funcional para  $s_j(x)$  en el intervalo  $x_c \leq x \leq x_{max}$ .

La primera integración de (2.3) nos determina la rapidez. Suponiendo un solo tipo de vehículos de masa  $m$ , se obtiene

$$\dot{z}_j(t) = \beta \ln|z_j(t) - z_{j-1}(t)| + \alpha_j, \quad (3.5)$$

que se puede verificar fácilmente derivando temporalmente (3.5) y ver que se obtiene (2.3). Aquí hemos denotado  $\beta = k/m$ .

Suponiendo que los  $N$  vehículos, moviéndose en el tramo, están espaciados en una distancia promedio  $d$  y que la longitud de los carros es en promedio  $L$ , entonces la congestión o densidad de tráfico, definido como el número de vehículos por unidad de longitud, está dado por

$$x = \frac{N}{N(d+L)} = \frac{1}{d+L}. \quad (3.6)$$

Usando esta última expresión y el hecho de que  $|z_j(t) - z_{j-1}(t)| = d + L$ , la ecuación (3.5) adquiere la forma

$$s(x) = \beta \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha, \quad (3.7)$$

en donde hemos supuesto movimiento vehicular homogéneo o flujo vehicular estacionario (i.e., el número de vehículos que pasan a través de una sección transversal del tramo por unidad de tiempo, es igual a una constante). En estas condiciones, los vehículos se mueven con la misma rapidez  $s(x)$  para un cierto valor de la densidad de tráfico  $x$ .

Las condiciones (3.2) y (3.4) determinan los valores de las constantes  $\beta$  y  $\alpha$ , resultando

$$\beta = \frac{s_{max}}{\ln(x_{max}/x_c)} \quad (3.8)$$

$$\alpha = -\beta \ln\left(\frac{1}{x_{max}}\right), \quad (3.9)$$

y por lo tanto, al sustituir (3.8) y (3.9) en (3.7), se obtiene

$$s(x) = s_{max} \frac{\ln\left(\frac{x_{max}}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x_{max}}{x_c}\right)}, \quad \text{si } x_c < x \leq x_{max} \quad (3.10)$$

Finalmente, tomando en consideración (3.3), obtenemos la solución para  $s(x)$  en todo el intervalo de  $x$ :

$$s(x) = \begin{cases} s_{max} & \text{si } 0 \leq x \leq x_c \\ s_{max} \frac{\ln\left(\frac{x_{max}}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x_{max}}{x_c}\right)} & \text{si } x_c < x \leq x_{max} \end{cases} \quad (3.11)$$

Tomando en cuenta que la segunda derivada de  $s(x)$  respecto de  $x$  es positiva en el intervalo  $x_c < x \leq x_{max}$ , y por ende la concavidad de  $s(x)$  es hacia arriba en este intervalo, la gráfica de (3.11) adquiere la forma representada en la Figura 1.

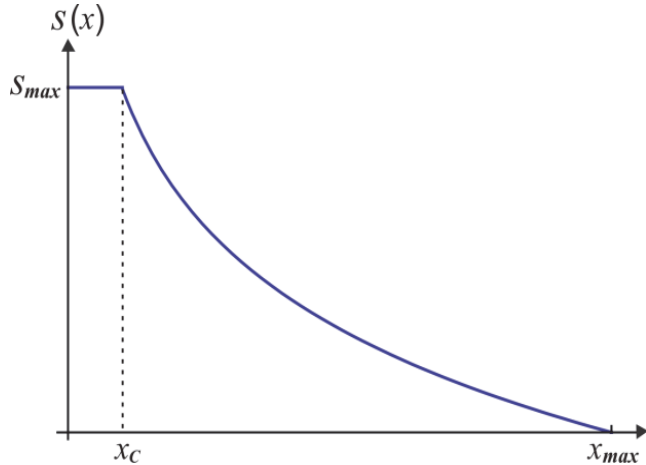


Figura 1. Gráfica de la rapidez  $s(x)$  en todo el intervalo  $0 \leq x \leq x_{max}$ .

#### 4. Relación fundamental del flujo vehicular y su diagrama

Estamos en condiciones de expresar el flujo vehicular  $\phi$  en función de la densidad de tráfico  $x$  y de la rapidez de tráfico  $s(x)$ . Partiendo de la definición de flujo vehicular, como el número de vehículos que cruzan una sección transversal del tramo carretero por unidad de tiempo, se obtiene

$$\phi(x, s) \equiv \frac{N}{\tau} = \frac{N}{\ell} x \frac{\ell}{\tau} = x \cdot s \quad (4.1)$$

Donde  $\ell$  es la longitud del tramo y  $\tau$  es el tiempo que tarda un vehículo en recorrerlo. Finalmente, usando (3.11), obtenemos la relación fundamental del flujo vehicular:

$$\phi(x) = \begin{cases} x s_{max} & \text{si } 0 \leq x \leq x_c \\ \delta x \ln\left(\frac{x_{max}}{x}\right) & \text{si } x_c < x \leq x_{max}, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde

$$\delta \equiv \frac{s_{max}}{\ln\left(\frac{x_{max}}{x_c}\right)}.$$

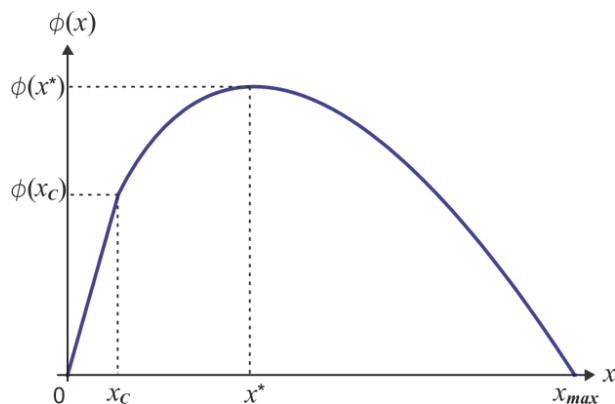


Figura 2. Gráfica de  $\phi(x)$  en función de  $x$  (diagrama fundamental del flujo vehicular).

La gráfica de  $\phi$  (Fig. 2), es un caso de lo que se conoce en la literatura como diagrama fundamental del flujo vehicular (generalmente resulta ser función de varias variables). En nuestro caso se ha logrado reducir el flujo vehicular únicamente como una función de la densidad de tráfico  $x$ :  $\phi = \phi(x)$ , en este sentido, el modelo presentado aquí es de primer orden.

La fluidez óptima al paso de vehículos en el tramo de carretera considerado, ocurre en los valores de  $x$  en los cuales se maximiza  $\phi(x)$ . Tomando en cuenta que la gráfica de  $\phi$  es cóncava hacia abajo, ésta tiene su máximo global en el punto  $x^* = \frac{x_{max}}{e}$ , que se puede verificar fácilmente mediante el cálculo diferencial. Tiene además un máximo local en  $x = x_c$  sobre el intervalo  $0 \leq x \leq x_c$ , tal y como se indica en la Figura 2. Se dice que el tráfico es ligero si  $x < x^*$  y pesado si  $x > x^*$ .

La tabla 1 muestra el conjunto de parámetros que intervienen en este modelo y se mencionan sus significados físicos. El valor de cada parámetro puede variarse ligeramente respecto a los valores característicos que se miden en una vía, con el fin de hallar el mejor ajuste, entre una curva de relación fundamental empírica con la curva obtenida aquí de manera teórica, y ver el alcance de su poder predictivo.

En un trabajo posterior planeamos mostrarles como puede aplicarse este modelo a una situación simple de congestamiento tráfico que se observa en una vía urbana común de nuestra localidad, a pesar de que fue formulada para un caso de flujo estacionario.

Tabla 1. Parámetros y sus significados físicos que intervienen en el modelo.

$s_{max}$	Valor de la rapidez máxima en la que puede circular un vehículo cuando la vía está libre de congestamiento
$x_{max}$	Densidad de máximo congestamiento
$x_c$	Densidad crítica de congestamiento en el que para valores menores que esta densidad, los vehículos podrán circular al valor de la rapidez máxima permitida.

#### 5. Análisis de los resultados

De acuerdo con los resultados de la sección anterior, en el intervalo de densidad de tráfico  $x_c \leq x \leq x_{max}$ , la fluidez óptima ocurre en el punto bien definido  $x^* = \frac{x_{max}}{e}$  (ver Fig. 2). Si la densidad de tráfico  $x$  es cercana a  $x_{max}$ , entonces, según nuestra gráfica, lejos de que se alcance una buena fluidez, los vehículos están prácticamente imposibilitados a moverse, que concuerda con lo que observamos en un tráfico muy pesado.

Si la densidad de flujo  $x$  está en algún valor tal que  $x_c \leq x \leq x^*$  entonces  $\phi(x_c) < \phi(x) < \phi(x^*)$ . Este último resultado nos dice que es posible incrementar el número de vehículos que circulan por el tramo carretero (suponiendo que el acceso a él está siendo controlado por un semáforo o algún otro medio de control de paso vehicular), sin correr el riesgo de que se entorpezca el tránsito vehicular. De hecho lo óptimo es incrementar hasta el punto de densidad crítica  $x^*$  donde el flujo tiene su máximo global  $\phi(x^*)$ . Incrementar  $x$  más allá de ese valor se induce a un tráfico

pesado, i.e. de tránsito muy lento, según se observa en el diagrama de flujo vehicular (Fig. 2), con una rapidez correspondiente según la Figura 1.

## 6. Conclusiones

Aunque el modelo desarrollado aquí se enfocó a una situación muy específica de tramo congestionado, con él ha sido posible obtener una solución analítica para la fluidez óptima del paso de vehículos sin recurrir a los métodos numéricos y se ha obtenido, de manera sencilla, la relación fundamental del flujo vehicular, cuya gráfica reproduce el comportamiento característico de diagramas fundamentales de flujo vehicular que se obtienen al tratar casos más realistas, empleando modelos más sofisticados. El modelo podría replantearse para considerar otras situaciones específicas de tráfico, tales como vialidades de dos o más carriles, la presencia de varios tipos de vehículos, e incluso considerar otro tipo de situaciones físicas que generan congestión, tales como reducciones de la capacidad vial de las carreteras, como sucede en los tramos llamados “cuellos de botella”, o aquellos congestionamientos ocasionados en tramos que se intersectan con otras vialidades. En el futuro nuestra investigación estará enfocada hacia dichas situaciones. En este trabajo, también buscamos despertar el interés de los lectores para estudiar un tema de investigación interdisciplinario actual y este desarrollo podría servir, como punto de partida, para incursionar en esta disciplina, ya que se sientan las bases y el lenguaje apropiado sobre dinámica vehicular.

## 7. Agradecimientos

Este trabajo ha sido apoyado por el Cuerpo Académico UABJO-CA-50 y Cuerpo Académico BUAP-CA-236.

## Referencias

- [1] García, R., Delgado, D., Díaz, E. and García, R., Caracterización de la accidentalidad vehicular y análisis de las causas en la provincia de Villa Clara, Cuba. *Revista DYNA*, 175, pp. 191–200, 2012.
- [2] Braess, D., Nagurney, A. and Wakolbinger, T., On a paradox of traffic planning. *The Journal Transportation Science*, 39, pp. 446–450, 2005.
- [3] Irvine, A., How braess's paradox solves newcomb's problem, *international studies in philosophy of science*, 7, 2, pp. 145–164, 1993.
- [4] Steinberg, R. and Zangwill, W., The prevalence of braess's paradox. *Transportation Science*, 17, 3, pp. 301–318, 1983.
- [5] Rapoport, A., Kugler, T., Dugar, S. and Gisches, E., Choice of routes in congested traffic networks: Experimental tests of the Braess Paradox. *Games and Economic Behavior* 65, pp. 538-571, 2009.
- [6] Pala, M., Sellier, H., Hackens, B., Martins, F., Bayot, V. and Huant, S. A., new transport phenomenon in nanostructures: a mesoscopic analog of the Braess paradox encountered in road networks. *Nanoscale Research Letters*. 7, 1, pp. 472-476, 2012.
- [7] Pala, M., Baltazar, S., Liu, P., Sellier, H., Hackens, B., Martins, F., Bayot, V., Wallart, X., Desplanque, L. and Huant, S., Transport inefficiency in branched-out mesoscopic networks: an analog of the Braess paradox. *Phys Rev Lett*. 108,7, pp. 076802(1)-076802(5), 2013.
- [8] González, C., Posada, J. and Sánchez, I., The need for congestion pricing in medellin: an economic perspective. *Revista DYNA*, 171, pp. 123–131, 2012.
- [9] Espinosa, F., Gordillo, C., Jiménez, R. and Avilés, O., Machine vision algorithms applied to dynamic traffic light control. *Revista DYNA*, 178, pp. 132–140, 2013.
- [10] Jiménez, M. y Sarmiento, I., Sistema adaptativo de control y optimización del tráfico de un corredor vial semaforizado. *Revista DYNA*, 169, pp. 71–78, 2011.
- [11] Angel, P. y Marín, L., Un método computacional para la obtención de rutas óptimas en sistemas viales. *Revista DYNA*, 167, pp. 112–121, 2011.
- [12] Shvetsov, V. and Helbing, D., Macroscopic Dynamics of multilane traffic, *Phys. Rev. E* 59, pp. 6328-6339, 1999.
- [13] Velasco, R. M. and Saavedra, P., Macroscopic models in traffic flow, *Qualitative Theory on Dynamical Systems*, 7, 1, pp. 237-252, 2008.
- [14] Knospe, W., Santen, L., Schadschneider, A. and Schreckenberg, M. M., Towards a realistic microscopic description of highway traffic. *J. Phys A: Math. Gen* 33, pp. L477-L485, 2000.
- [15] Moreno, F. and Arango, F., A conceptual trajectory multidimensional model: an application to public transportation. *Revista DYNA*, 166, pp. 142-149, 2011.
- [16] Brakatsoulas, S., Pfoser, D. and Tryfona, N., Modeling, storing, and mining moving object databases 8th International Database Engineering and Applications, pp. 68-77, 2004
- [17] Velasco, R. M. and Saavedra, P., A first order Model in Traffic Flow, *Physica D. Nonlinear Phenomena*. 228, 2, pp. 153-158, 2007.
- [18] Nelson, P., Synchronized traffic flow from a modified Lighthill-Witham model. *Phys. Rev. E*. 61, pp. R6052-R6055, 2000.
- [19] Wagner, C., Hoffmann, C., Sollacher, R., Wagenhuber, J. and Schürmann, B., Second-order continuum traffic model. *Phys. Rev. E*. 54, pp. 5073-5085, 1996.
- [20] Kerner, B. and Köhler, P., Cluster effect in initially homogeneous traffic flow. *Phys. Rev. E*. 48, pp. R2335-R2338, 1993.
- [21] Zhang, H., A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research Part B*, 36, pp. 275-290, 2002.
- [22] Velasco, R. and Marques, W., Navier-Stokes-like equations for traffic flow. *Phys. Rev. E* 72, p. 46102, 2005.
- [23] Méndez, A. and Velasco, R., An alternative model in traffic flow equations. *Transp. Res. Part B*, 42 (9), pp. 782-797, 2008.
- [24] Marques, W. and Velasco, R. An improved second-order continuum traffic model. *J. Stat. Mech.* p. 2012, 2010.
- [25] Helbing, D., Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic, *Phys. Rev. E*. 51, pp. 3164-3169, 1995.