



# Active vibration control in building-like structures submitted to earthquakes using multiple positive position feedback and sliding modes

Josué Enríquez-Zárate <sup>a</sup> & Gerardo Silva-Navarro <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Sección de Mecatrónica, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., México, D.F., México. [enriquezz@cinvestav.mx](mailto:enriquezz@cinvestav.mx)

<sup>b</sup> Sección de Mecatrónica, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., México, D.F., México. [gsilva@cinvestav.mx](mailto:gsilva@cinvestav.mx)

Received: October 2th, 2013. Received in revised form: May 9th, 2014. Accepted: September 28th, 2014.

## Abstract

This work deals with the structural and dynamic analysis of a building-like structure consisting of a three-story building with one passive/active vibration absorber. The base of the structure is perturbed using a shaker, providing excitation forces and noisy excitations emulating ground transportation, underground railways and earthquakes, quite common in Mexico City. It is considered a realistic seismic record of 8.1Mw occurred at Mexico City, containing some resonant frequencies of the structure. The mechanical structure is modeled using Euler-Lagrange methodology and validated using experimental modal analysis techniques. The active control scheme is synthesized to actively attenuate the noise and vibration system response, caused by noisy excitation forces acting on the base, by employing Multiple Positive Position Feedback and Sliding Mode Control to improve the closed-loop system response and, simultaneously, attenuate three vibration modes. Simulation and experimental results describe the overall system performance.

**Keywords:** Modal analysis; Active vibration control; Earthquakes; Positive Position Feedback; Sliding mode control.

## Control activo de vibraciones en estructuras tipo edificio sometidas a sismos utilizando múltiple retroalimentación positiva de la posición y modos deslizantes

### Resumen

Este trabajo considera el análisis estructural y dinámico de una estructura tipo edificio de tres pisos con un absorbedor de vibraciones pasivo/activo. La base de la estructura se perturba con un generador de vibraciones, proporcionando fuerzas de excitación y ruido emulando transporte terrestre, trenes subterráneos y sismos, comunes en la Ciudad de México. Se considera un registro sísmico real de magnitud 8.1Mw, conteniendo algunas frecuencias resonantes de la estructura. La estructura mecánica se modela con la metodología de Euler-Lagrange y se valida con técnicas de análisis modal experimental. El esquema de control activo se diseña para atenuar la respuesta vibratoria del sistema, ocasionada por las fuerzas armónicas que actúan en la base, empleando múltiple retroalimentación positiva de la posición y control por modos deslizantes para mejorar la robustez del sistema en lazo cerrado y atenuar tres modos de vibración. Resultados en simulación y experimentales describen el desempeño del sistema completo.

**Palabra Clave:** Análisis modal; Control activo de vibraciones; Sismo; Retroalimentación Positiva de la Posición; Modos deslizantes.

### 1. Introducción

El estudio sobre el control de las vibraciones mecánicas en el diseño de edificios es un tema de investigación que actualmente es de gran interés sobre todo en las grandes ciudades. En particular, este trabajo de investigación se centra en el análisis de la respuesta de estructuras tipo edificio, que se

encuentran perturbadas por fenómenos sísmicos.

Nuestra investigación se centra en las edificaciones de la Ciudad de México, debido a que por su tipo de suelo, la mayor parte está clasificada como zona lacustre y de transición, teniendo baja resistencia sísmica, y debido a esto las estructuras son más vulnerables y se encuentran afectadas por fenómenos como el ruido, transporte, trenes

subterráneos y especialmente por sismos [1].

Las investigaciones recientes sobre el control de vibraciones en edificios, se refieren generalmente al uso de los esquemas pasivo, semiactivo y activo [2]. Los esquemas pasivos, conocidos como *Tuned Mass Damper* (TMD, por sus siglas en inglés), generalmente se encuentran limitados en su respuesta, debido a que se diseñan para la atenuación o minimización de una frecuencia o modo de vibración específico de la estructura. Los esquemas activos, denominados *Active Mass Damper* (AMD, por sus siglas en inglés), ofrecen un controlador en lazo cerrado para un amplio rango de frecuencias o modos de vibración. Generalmente este diseño agrega un grado de libertad y un actuador al modelo original de la estructura tipo edificio, añadiendo complejidad a la dinámica del sistema. La supresión o atenuación de las frecuencias vibratorias en el sistema se realiza agregando una fuerza de control proporcionada por un actuador electrohidráulico o electromecánico.

En este trabajo se considera una estructura tipo edificio de tres niveles, con excitación armónica y sísmica en la base, la cual se controla con un absorbedor de vibraciones pasivo/activo o híbrido y leyes de control basadas en múltiple retroalimentación positiva de la posición (MPPF, por sus siglas en inglés), en combinación con la técnica de control por modos deslizantes, para mejorar la robustez y minimización la respuesta dinámica del sistema.

## 2. Sistema completo

Se presenta el diseño y construcción a escala de una estructura tipo edificio de tres pisos sometida a perturbaciones del tipo sísmico. El objetivo consiste en analizar su respuesta dinámica, en simulación numérica y experimental, utilizando esquemas de control pasivo/activo para minimizar su respuesta frecuencial en lazo cerrado.

Específicamente, el sistema es una estructura tipo edificio a escala de tres pisos, diseñada y construida de aleación de aluminio. La altura máxima de la estructura, sin considerar el sistema de absorción de vibraciones es de 950 mm, con una base rectangular de 300×200 mm. La estructura completa se encuentra montada sobre un riel con rodamiento de bolas sin fricción y la base móvil se encuentra conectada directamente a un generador de vibraciones electromecánico modelo ET-139, el cual se utiliza para perturbar al sistema con componentes armónicos de baja frecuencia, obtenidos directamente del registro sísmico del temblor ocurrido en la Ciudad de México en 1985, con epicentro en la costa de Zihuatanejo, Michoacán [3]. El generador de vibraciones se controla por un amplificador de potencia *Labworks*®, modelo PA-138. Para propósitos de control se utiliza como variable de control en lazo cerrado la posición del sistema. Se utiliza un sistema de adquisición de datos NI-CompactDAQ de *National Instruments*®, chasis modelo NI-DAQ-9172 y módulo de acelerómetros modelo 9133 conectado vía USB a una computadora, para obtener la señal de un acelerómetro colocado en un piso de la estructura, que mide directamente la aceleración y procesa a través de las plataformas de *Labview*® y *Matlab/Simulink*® para calcular los desplazamientos (ver Fig. 1).

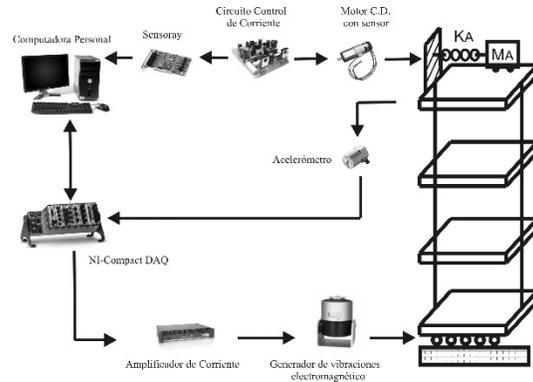


Figura 1. Integración del sistema tipo edificio completo.  
Fuente: Elaboración propia.

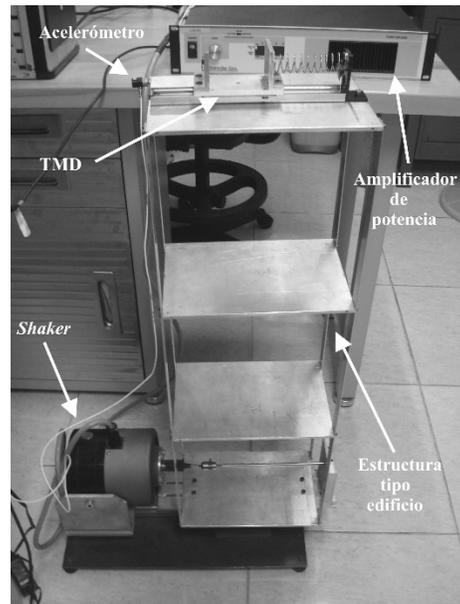


Figura 2. Estructura experimental.  
Fuente: Elaboración propia.

Por último, se considera que el actuador en el absorbedor pasivo/activo de vibraciones es un motor de cd, acoplado directamente a un sistema masa-resorte con una base móvil, soportada sobre una guía de bolas montada sobre el tercer piso de la estructura. El desplazamiento de la masa del absorbedor se mide con un decodificador óptico en la flecha del motor, señal que se emplea para determinar el valor de la fuerza requerida por la acción de control, por medio de la variación en su valor en corriente. Para el esquema de control retroalimentado se utiliza una tarjeta de adquisición de datos *Sensoray*® modelo 626. En la Fig. 1 se describe un diagrama esquemático de la integración del sistema completo y en la Fig. 2 se muestra el prototipo de la estructura experimental.

La estructura tipo edificio consta de tres masas ( $m_1, m_2, m_3$ ) interconectadas cada una por cuatro columnas flexibles en cada masa, expresado por medio de rigideces equivalentes ( $k_1, k_2, k_3$ ) y se considera amortiguamiento viscoso (lineal) equivalente ( $c_1, c_2, c_3$ ) sobre cada grado de libertad (ver Fig. 3) [4].

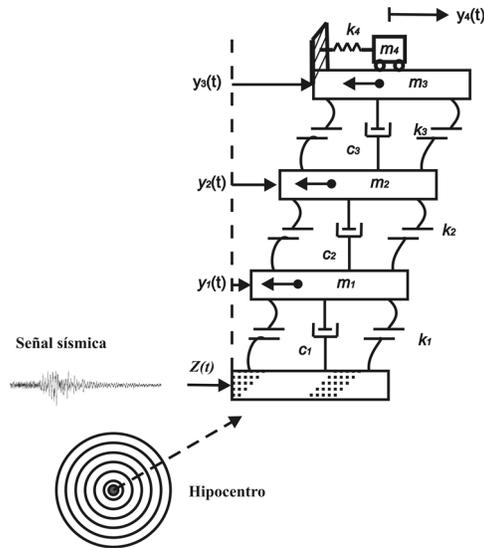


Figura 3. Modelo esquemático de la estructura tipo edificio.  
Fuente: Elaboración propia.

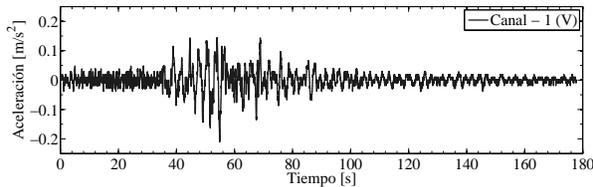


Figure 4a. Componente vertical del registro sísmico.  
Fuente: Elaboración propia.

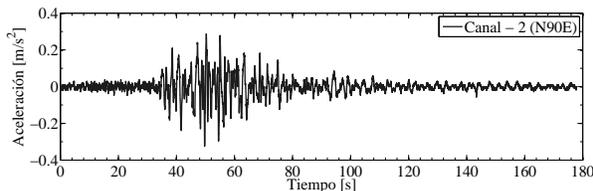


Figure 4b. Primera componente horizontal del registro sísmico. Fuente: propia.

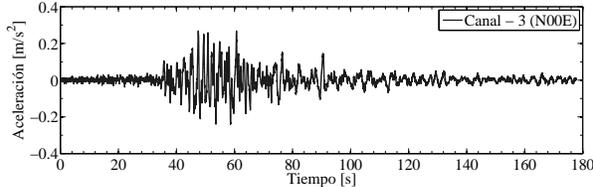


Figure 4c. Segunda componente horizontal del registro sísmico.  
Fuente: Elaboración propia.

La fuerza de control se describe como  $u(t) = F(t)$ , que afecta directamente a un TMD, a través de  $m_4$ , para lograr los objetivos de control deseados de atenuación y/o cancelación de vibraciones. La base de la estructura está perturbada por un desplazamiento en la base  $z(t)$ , producida por una fuerza lateral de un generador de vibraciones electromagnético conectado a la estructura. Las

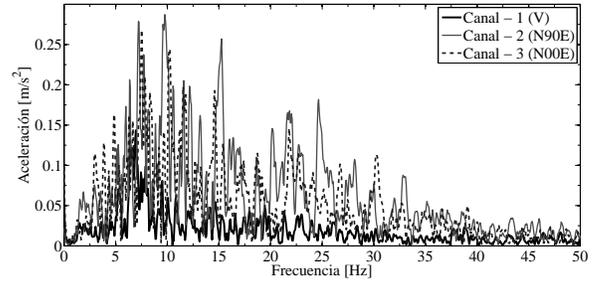


Figura 5. Espectro en frecuencia del registro sísmico de 1985 en la Ciudad de México.  
Fuente: Elaboración propia.

mediciones de la aceleración se obtienen usando un acelerómetro conectado sobre la masa  $m_3$ .

El sistema primario y el TMD están formados por elementos mecánicos  $(m_i, c_i, k_i)$ ,  $i = 1,2,3,4$ . Las vibraciones no deseadas que causan el desplazamiento de la estructura se generan por el desplazamiento  $z(t)$  en términos de la aceleración  $\ddot{z}(t)$ .

### 3. Registro sísmico de 1985

La señal perturbadora  $z$  se representa por un registro sísmico real ocurrido en la Ciudad de México el 19 de septiembre de 1985 en hora epicentro (GMT): 13:17:42,6. [3,5]. Esta señal sísmica se representa por tres componentes (ver Figs. 4a,b,c), es decir, se tienen dos en el plano horizontal (llamadas longitudinal y transversal) y otra en sentido vertical [6,7]. La respuesta espectral de las tres componentes se observa en la Fig. 5.

La respuesta en frecuencia corresponde a señales de baja frecuencia, las cuales tienen un fuerte impacto sobre estructuras (e.g., edificios, casas) de gran altura o de varios pisos y de gran masa, debido a que tienen periodos naturales de vibración largos [1]. Los sismos de mayor magnitud tienen mayor duración (cerca o superior a un minuto) y liberan más energía a bajas frecuencias. Las frecuencias altas muestran una mayor tendencia a atenuarse por encima de los 5 o 10 Hz, dependiendo de la distancia a la fuente sísmica y las condiciones geológicas del sitio. Las frecuencias más altas se registran en sitios de roca y en las cercanías de la fuente sísmica [8]. La estructura experimental es de baja altura y poca masa, y sus modos de vibración difícilmente son excitados por la señal sísmica real (Fig. 4). Por lo tanto, es conveniente escalar la componente de amplitud del registro sísmico real por una constante de veinte veces su valor, esto con la finalidad de excitar los primeros modos de vibración de la estructura, en el rango de frecuencias del registro sísmico real.

### 4. Estructura tipo edificio de tres niveles

Un modelo matemático simplificado para un edificio de tres pisos sometido a movimiento por aceleración en la base se obtiene como

$$M_3 \ddot{y} + C_3 \dot{y} + K_3 y = -M_3 e_3 \ddot{z} \quad (1)$$

donde  $y = [y_1, y_2, y_3]^T \in R^3$  es el vector de coordenadas generalizadas de desplazamientos relativos con respecto al marco de referencia principal,  $\ddot{z} \in R$  es la aceleración de la señal sísmica en la base de la estructura y  $M_3, C_3, K_3$  son matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de  $3 \times 3$ , respectivamente. El vector  $e_3 = [1, 1, 1]^T \in R^3$  es el vector de influencia, que representa el desplazamiento de cada masa debido al desplazamiento del suelo. Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento para el edificio de tres pisos son

$$M_3 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

La matriz de masas  $M_3$  se determina a partir de las masas ( $m_1, m_2, m_3$ ) por cada piso del edificio. Los valores de la matriz de rigidez  $K_3$  se obtienen considerando las dimensiones y propiedades mecánicas del material en cada piso del edificio.

Para propósitos de análisis modal se considera amortiguamiento proporcional o de *Rayleigh* [9,10], es decir, que  $C_3 = a_0 M_3 + b_0 K_3$ , donde  $a_0 = \xi_i \times \frac{2\omega_i \times \omega_j}{\omega_i + \omega_j}$  y  $b_0 = \xi_j \times \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$ , con  $\omega_i$  y  $\omega_j$  las frecuencias resonantes de la estructura y  $\xi_i$  y  $\xi_j$  la proporción de amortiguamiento en la estructura para los modos  $i$  y  $j$ , respectivamente.

La estructura tipo edificio de tres pisos se perturba con una señal sísmica en su componente vertical (ver Figs. 4 y 5), reproducida con un generador de vibraciones electromagnético para amplitud y frecuencia variable en un tiempo de 179 s [3].

La función de respuesta frecuencial (FRF) experimental en la estructura se obtiene mediante la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) y la aplicación de técnicas de análisis modal experimental como *Peak Peaking* (ver Fig. 6).

Los parámetros del sistema sin TMD ni control activo se presentan en la Tabla 1.

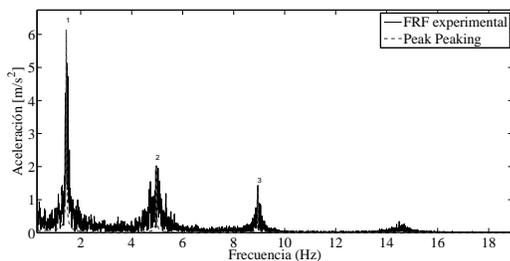


Figura 6. FRF experimental de la estructura de tres pisos. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 1.

Parámetros del sistema.

$m_1 = 1.1164 \text{ kg}$	$m_2 = 1.1327 \text{ kg}$	$m_3 = 1.9224 \text{ kg}$
$k_1 = 897.0277 \text{ N/m}$	$k_2 = 933.3893 \text{ N/m}$	$k_3 = 888.2334 \text{ N/m}$
$c_1 = 0.0885 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$	$c_2 = 0.0778 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$	$c_3 = 0.0965 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$

Fuente: Elaboración propia.

Los parámetros de amortiguamiento se obtuvieron indirectamente, a partir de la FRF, considerando el amortiguamiento modal  $\xi_i$  y la frecuencia modal de la estructura  $\omega_i$  obtenidos experimentalmente. El amortiguamiento modal es aproximado por medio de los métodos de *Peak Peaking* y *Curve Fitting*.

Una comparación de las frecuencias de resonancia obtenidas en forma experimental y numéricamente, se presentan en la Tabla 2, donde los resultados son muy cercanos para validar el modelo simplificado de la estructura tipo edificio de tres pisos en los primeros tres modos de vibración.

Tabla 2.

Parámetros modales de la estructura tipo edificio de tres pisos.

Modo	Frecuencia natural $\omega_i$ [Hz]		Variación (%)	Amortiguamiento modal experimental $\xi_i$
$i$	Numérico	Experimental		
1	1.7020	1.4343	-	0.0044
2	5.1607	4.9703	15.72	0.0011
3	8.0274	8.9493	-3.69	0.000446

Fuente: Elaboración propia.

## 5. Estructura tipo edificio con TMD

En la estructura tipo edificio mostrada en la Fig. 3 el TMD se representa en términos de los parámetros ( $m_4, c_4, k_4$ ) y se diseña para atenuar una de las frecuencias de resonancia más críticas en el sistema. En este caso el efecto del desplazamiento en la base  $z(t)$  se logra atenuar en la respuesta del sistema primario, para un rango pequeño de frecuencias de excitación y bajo condiciones de operación estables [2].

La principal desventaja de estos esquemas de control en lazo abierto es la ausencia o poca robustez con respecto a incertidumbres o parámetros desconocidos o variaciones en las frecuencias de excitación.

El edificio de tres pisos con un TMD sobre la masa del tercer piso de la estructura, sometida a un movimiento sísmico  $\ddot{z}$ , de manera que el TMD se diseña para compensar el segundo modo de vibración. Las ecuaciones de movimiento del sistema de cuatro grados de libertad son

$$M_4 \ddot{y} + C_4 \dot{y} + K_4 y = -M_4 e_4 \ddot{z} \quad (3)$$

donde  $y = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T \in R^4$  es el vector de coordenadas generalizadas de desplazamientos relativos con respecto al marco de referencia principal,  $\ddot{z}$  es la aceleración de la señal sísmica en la base de la estructura y  $M_4, C_4, K_4$  son las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento de  $4 \times 4$ , respectivamente. En este caso  $e_4 = [1, 1, 1, 1]^T \in R^4$  es el vector de influencia, que representa el acoplamiento inercial entre los pisos de la estructura y el desplazamiento del suelo. Las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez se expresan como

Tabla 3.  
Parámetros del sistema.

$m_1 = 1.1164kg$	$m_2 = 1.1327kg$	$m_3 = 1.9224kg$	$m_4 = 0.8171kg$
$k_1 = 897.0277 \frac{N}{m}$	$k_2 = 933.3893 \frac{N}{m}$	$k_3 = 888.2334 \frac{N}{m}$	$k_4 = 723 \frac{N}{m}$
$c_1 = 0.0913 \frac{N}{m/s}$	$c_2 = 0.1078 \frac{N}{m/s}$	$c_3 = 0.1685 \frac{N}{m/s}$	$c_4 = 0.0587 \frac{N}{m/s}$

Fuente: Elaboración propia.

$$M_4 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

Para propósitos de análisis modal se propone que el sistema posee amortiguamiento de tipo proporcional de manera que  $C_4 = a_0 M_4 + b_0 K_4$ , donde  $a_0 = \xi_i \times \frac{2\omega_i \times \omega_j}{\omega_i + \omega_j}$  y  $b_0 = \xi_j \times \frac{2\omega_i \times \omega_j}{\omega_i + \omega_j}$  con  $\omega_i$  y  $\omega_j$ , las frecuencias modales de la estructura y  $\xi_i$  y  $\xi_j$  la proporción de amortiguamiento en la estructura para los modos  $i$  y  $j$  respectivamente.

El TMD se diseña para atenuar pasivamente la  $j$ -ésima frecuencia a partir de la expresión  $\omega_j \cong \sqrt{\frac{k_4}{m_4}}$  donde  $\omega_j$  es la  $j$ -th frecuencia de resonancia de la estructura que será atenuada y  $m_4$  y  $k_4$  son la masa y la rigidez equivalente del TMD. En particular, el TMD se diseña para atenuar el segundo modo de vibración experimental, localizado en  $\omega_2 \cong 4.7341$  Hz.

Los parámetros del edificio de tres pisos con TMD se proporcionan en la Tabla 3.

Los parámetros de amortiguamiento se obtuvieron indirectamente, a partir de la FRF, considerando el amortiguamiento modal  $\xi_i$  y la frecuencia modal de la estructura  $\omega_i$  obtenidos experimentalmente. El amortiguamiento modal se estima con los métodos de *Peak Peaking* y *Curve Fitting*. La estructura tipo edificio de tres pisos con TMD se caracteriza aplicando un movimiento armónico en el suelo, utilizando la componente vertical del registro sísmico, que tiene una amplitud variable aproximadamente entre 0 y 0.20 m/s<sup>2</sup> y frecuencias de excitación de 0 a 50 Hz (ver Fig. 5).

La FRF experimental se describe en la Fig. 7. Los resultados del análisis modal experimental se resumen en la Tabla 4, donde se puede apreciar un aproximamiento razonable con respecto a los resultados numéricos.

La respuesta dinámica experimental (desplazamiento y aceleración) en el tercer piso de la estructura tipo edificio con TMD, cuando se somete a movimiento sísmico en el suelo se muestra en las Figs. 8a,b,c.

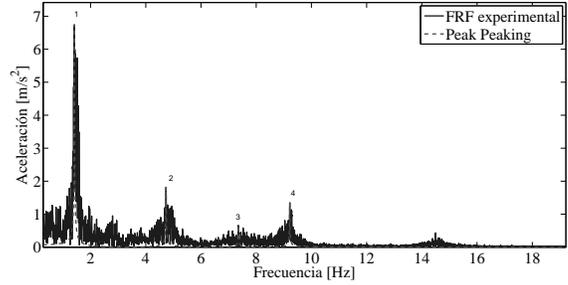


Figura 7. FRF experimental del edificio de tres pisos con TMD.  
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.  
Parámetros modales con TMD.

Modo $i$	Frecuencia natural $\omega_i$ [Hz]		Variación (%)	Amortigua-miento modal experimental $\xi_i$
	Númerica	Experimental		
1	1.4745	1.4153	-4.01	0.0046
2	4.5737	4.7341	3.5	0.0016
3	6.1259	7.3509	19.99	0.000949
4	8.0802	9.2163	14.06	0.000620

Fuente: Elaboración propia.

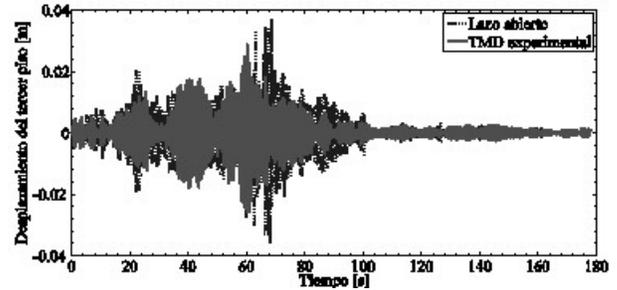


Figure 8a. Desplazamiento experimental de la estructura con TMD.  
Fuente: Elaboración propia.

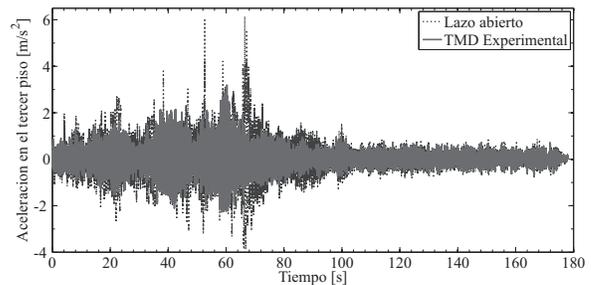


Figure 8b. Aceleración experimental de la estructura con TMD.  
Fuente: Elaboración propia.

La respuesta del sistema cerca del segundo modo de vibración se atenúa en 39.78%. La FRF en simulación del tercer piso considerando el TMD se presenta en la Fig. 9. En este caso los últimos modos se reducen.

Dado que el TMD está diseñado para atenuar una frecuencia de resonancia específica se considera que esta solución no es lo suficientemente robusta para atenuar en

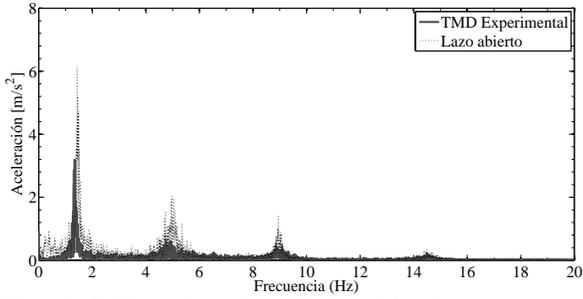


Figure 8c. FRF experimental con TMD en el 3er piso.  
Fuente: Elaboración propia.

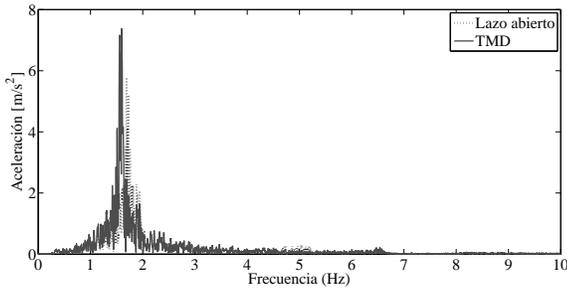


Figura 9. FRF en simulación en el 3er piso con TMD.  
Fuente: Elaboración propia.

forma simultánea varios modos de vibración en presencia de vibraciones con variación en las frecuencias de excitación y amplitud, como las frecuencias de una señal sísmica. Involucrando otros efectos no deseables como *roll-off*. Es por tal motivo, que aplicamos esquemas de control pasivo/activo de vibraciones con técnicas de retroalimentación positiva de posición.

## 6. Estructura tipo edificio con control pasivo/activo PPF

El esquema de control por retroalimentación positiva de posición (PPF, por sus siglas en inglés) se utiliza para compensar la respuesta del sistema en presencia de la perturbación generada por la señal sísmica  $\ddot{z}$ . Este controlador es ampliamente conocido en la literatura como un método de control modal para atenuación de vibraciones [9,11,12,14,15].

Este esquema de control agrega un grado de libertad adicional al sistema mecánico original, considerado como un *absorbedor pasivo virtual* o como un filtro de segundo orden. Los parámetros de este controlador se pueden obtener utilizando datos experimentales, lo que hace que la técnica PPF sea muy utilizada entre otro tipo de aplicaciones estructurales y de control [11]. El término de retroalimentación positiva de la posición significa que la coordenada de posición (desplazamiento) del sistema primario se retroalimenta positivamente al filtro y la coordenada de posición (desplazamiento) del compensador (sistema secundario) se retroalimenta positivamente al sistema primario [11].

Considere el edificio de tres pisos con TMD colocado en el tercer piso, la aceleración del suelo o señal sísmica  $\ddot{z}$  y una fuerza de control activa  $u$  que actúa sobre el TMD, que se representa como

$$M_4 \ddot{y} + C_4 \dot{y} + K_4 y = -M_4 e_4 \ddot{z} + B_f u \quad (5)$$

donde  $y = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T \in R^4$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\ddot{z} \in R$  es la aceleración del suelo generado por la señal sísmica en la base del sistema y  $M_4, C_4, K_4$  son las matrices de masas, amortiguamiento y rigidez de  $4 \times 4$ , respectivamente. Aquí  $e_4 = [1, 1, 1, 1]^T \in R^4$  es el vector de influencia que representa el acoplamiento inercial entre los pisos y el movimiento del suelo. El control de fuerza  $u(t)$  afecta directamente a la masa  $m_4$  del TMD y  $B_f = [0, 0, 0, 1]^T$  representa una matriz de entrada para el sistema completo.

Note que el sistema (5) es completamente controlable a partir de la fuerza de control  $u$  y observable a partir del desplazamiento del TMD  $y_4$ .

En nuestro caso, la estructura mecánica tiene únicamente un sensor de movimiento (aceleración) en el TMD ( $y_4$ ) y una fuerza de control  $u$  que actúa directamente sobre su masa ( $m_4$ ). El esquema de control PPF para la estructura tipo edificio de cuatro grados de libertad (5) resulta en el sistema en lazo cerrado

$$M_4 \ddot{y} + C_4 \dot{y} + K_4 y = -M_4 e_4 \ddot{z} + B_f u \quad (6)$$

$$\ddot{\eta} + 2\zeta_f \omega_f \dot{\eta} + \omega_f^2 \eta = g \omega_f^2 B_f^T y \quad (7)$$

$$u = g \omega_f^2 \eta \quad (8)$$

donde  $y \in R^4$  y  $\ddot{z} \in R$  es el movimiento del suelo. El absorbedor pasivo virtual  $\eta \in R$ , con relación de amortiguamiento  $\zeta_f$  y frecuencia natural  $\omega_f$ , se retroalimenta con el sistema primario mediante  $g \omega_f^2 B_f^T y$ . La ley de control PPF se representa por la fuerza de control  $u \in R$ , donde  $g$  es una ganancia de control.

En forma compacta, el sistema en lazo cerrado se describe como

$$\begin{bmatrix} M_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_4 & 0 \\ 0 & 2\zeta_f \omega_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_4 & -B_f g \omega_f^2 \\ -g \omega_f^2 B_f^T & \omega_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_4 e_4 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{z} \quad (9)$$

Observe que la matriz de masa  $M_4$  es simétrica y definida positiva, por lo tanto, la matriz de masa completa en (9) es también simétrica y definida positiva. La matriz de amortiguamiento proporcional  $C_4$  es simétrica y definida positiva, y de igual forma, la matriz de amortiguamiento completa tiene las mismas propiedades. Sin embargo, la matriz de rigidez  $K_4$  es simétrica y definida positiva, y para garantizar la estabilidad asintótica en lazo cerrado es suficiente el seleccionar constantes apropiadas  $g$  y  $\omega_f$  en el control PPF, de tal forma que la matriz de rigidez en lazo cerrado sea simétrica y definida positiva [9,12]. Para

mostrar esto considere que

$$\begin{aligned} p^T \hat{K} p &= [p_1^T \quad p_2^T] \begin{bmatrix} K & -B_f g \omega_f^2 \\ -g \omega_f^2 B_f^T & \omega_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\ &= p^T (K - g^2 \omega_f^2 B_f B_f^T) p_1 \\ &\quad + \omega_f^2 (g B_f^T p_1 - p_2)^T (g B_f^T p_1 - p_2) \end{aligned}$$

siendo el segundo término siempre no negativo y para asegurar la estabilidad asintótica en lazo cerrado, la matriz de rigidez  $\hat{K}$  debe ser definida positiva, esto se obtiene seleccionando  $g$  y  $\omega_f$  de tal forma que la matriz  $(K - g^2 \omega_f^2 B_f B_f^T)$  sea definida positiva [9].

Las Figs. 10a,b,c describen los resultados numéricos aplicando el esquema de control activo/pasivo de vibraciones (6)-(8). Los parámetros del control PPF son  $\omega_f = \omega_1$ ,  $\zeta_f = 0.1$  y  $g = 0.5$ . La respuesta completa del sistema se atenúa en alrededor del 49% con respecto a la dinámica de la estructura en lazo abierto, con pequeños esfuerzos de control.

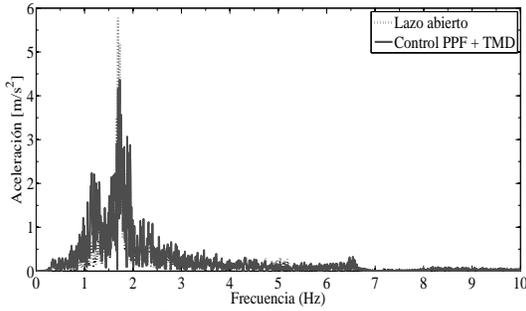


Figure 10a. FRF con TMD y control PPF.  
Fuente: Elaboración propia.

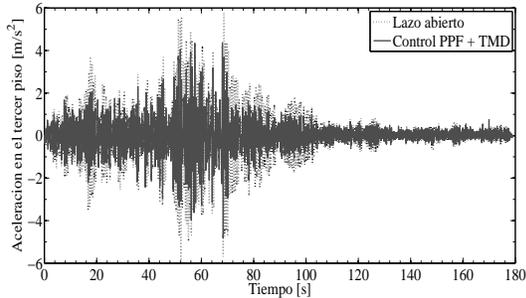


Figure 10b. Respuesta dinámica de la estructura.  
Fuente: Elaboración propia.

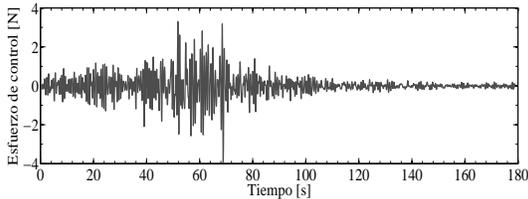


Figure 10c. Esfuerzo de control usando PPF.  
Fuente: Elaboración propia.

Para mejorar el desempeño de la respuesta vibratoria del esquema de control activo/pasivo usando TMD y control PPF, proponemos agregar múltiples controladores PPF para obtener mayor robustez para un amplio rango de frecuencias.

## 7. Estructura tipo edificio con un control MPPF y TMD

El control basado en múltiple absorbedores pasivos virtuales (MPPF) es una extensión del control PPF. El propósito de este esquema es agregar  $n_p$  absorbedores pasivos virtuales conectados en paralelo hacia el sistema primario, para atenuar las vibraciones [9,16].

Considere el edificio de tres pisos con TMD sobre el tercer piso, la aceleración del suelo  $\ddot{z}$  y una fuerza de control activa operando sobre el TMD. El diseño de un control MPPF para una estructura tipo edificio de cuatro grados de libertad (5) resulta en un sistema en lazo cerrado de la forma

$$M_4 \ddot{y} + C_4 \dot{y} + K_4 y = -M_4 e_4 \ddot{z} + BU \quad (10)$$

$$\dot{N} + 2ZW \dot{N} + W^2 N = GW^2 B^T y \quad (11)$$

$$U = GW^2 N \quad (12)$$

donde  $y \in R^4$  y  $\ddot{z} \in R$  es el movimiento en la base,  $N \in R^{n_p}$  son coordenadas de  $n_p$  absorbedores pasivos virtuales, con matrices diagonales de relaciones de amortiguamiento  $Z$  y frecuencias naturales  $W$ . En este caso  $B = [B_{f1} \quad \dots \quad B_{fn_p}]$ . La ley de control MPPF está representada por la fuerza de control  $U \in R^{n_p}$ , donde  $G$  es una matriz diagonal de ganancias de control.

En forma compacta el sistema en lazo cerrado es expresado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} M_4 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_4 & 0 \\ 0 & 2ZW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_4 & -BGW^2 \\ -GW^2 B^T & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_4 e_4 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{z} \quad (13)$$

Note que la matriz  $M_4$  es simétrica y definida positiva, además  $I$  es la matriz identidad y, entonces, la matriz de masa completa en (13) es también simétrica y definida positiva. La matriz  $C_4$  es simétrica y definida positiva, luego la matriz de amortiguamiento completo es también simétrica y definida positiva. La matriz de rigidez  $K_4$  es simétrica y definida positiva, y para garantizar la estabilidad asintótica en lazo cerrado resulta suficiente seleccionar constantes adecuadas  $g_i$  y  $\omega_{f_i}$ , de tal forma que la matriz de rigidez en lazo cerrado sea simétrica y definida positiva [9]. Para mostrarlo considere  $Q = [y \quad N]^T$ , con la forma cuadrática

$$\begin{aligned} Q^T \hat{K} Q &= [y^T \quad N^T] \begin{bmatrix} K & -BGW^2 \\ -GW^2 B^T & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ N \end{bmatrix} \\ &= y^T (K - BG^2 W^2 B^T) y + \\ &\quad W^2 (GB^T y - N)^T (GB^T y - N) \end{aligned} \quad (14)$$

donde el segundo término es siempre no negativo y con

esto, para asegurar la estabilidad asintótica en lazo cerrado, la matriz de rigidez  $\tilde{K}$  en (14) debe ser definida positiva, que se obtiene seleccionando las matrices  $G$  y  $W$  de tal forma que  $(K - BG^2W^2B^T)$  sea definida positiva [3].

Las Figs. 11a,b,c, muestran los resultados numéricos del esquema de control pasivo/activo (9)-(11). Los parámetros del control MPPF son  $\omega_{f1} = \omega_1$ ,  $\zeta_{f1} = 0.1$ ,  $g_1 = 0.7$ ,  $\omega_{f2} = \omega_3$ ,  $\zeta_{f2} = 0.1$ ,  $g_2 = 0.1$  y  $\omega_{f3} = \omega_4$ ,  $\zeta_{f3} = 1$ ,  $g_3 = 0.1$ . La respuesta del sistema se atenúa aproximadamente en 54% con respecto a la respuesta en lazo abierto, empleando esfuerzos de control muy pequeños.

Para optimizar el desempeño del control MPPF, proponemos agregar un esquema de control PPF combinado con una componente de control basada en modos deslizantes para obtener una dinámica más robusta.

### 8. Estructura tipo edificio con un control TMD y PPF combinado con modos deslizantes

La técnica de control por modos deslizantes es un esquema de control robusto que puede utilizarse tanto para sistemas lineales como no lineales. Una característica

importante de los controladores por modos deslizantes es su alta robustez, ante la presencia de incertidumbres no modeladas, como son las perturbaciones externas [13].

Para compensar en forma simultánea varios modos de vibración, un control PPF con modos deslizantes se expresa como

$$\ddot{\eta} + 2\zeta_f\omega_f\dot{\eta} + \omega_f^2\eta = g\omega_f^2B_f^T y \quad (15)$$

$$\sigma(\eta - B_f^T q) = \alpha_1(\eta - B_f^T y) + \alpha_2(\dot{\eta} - B_f^T \dot{y}) \quad (16)$$

$$u(t) = g\omega_f^2\eta + W_{sm} \text{sign}(\sigma) \quad (17)$$

donde  $\sigma$  es la superficie de conmutación, establecida en términos del error virtual  $e = \eta - B_f^T y$ , con los parámetros positivos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  y  $\text{sign}(\cdot)$  es la función *signum*, que para propósitos prácticos se aproxima por la función continua

$$\text{sign}(\sigma(e)) \approx \frac{\sigma(e)}{|\sigma(e)| + \epsilon}$$

con un parámetro positivo  $\epsilon$  suficientemente pequeño, dependiendo de las limitaciones físicas y ancho de banda del motor de cd.

En las Figs. 12a,b,c se ilustran los resultados numéricos, aplicando el esquema de control pasivo/activo de vibraciones (15)-(17). Los parámetros del control PPF con modos deslizantes son  $\omega_{f1} = \omega_1$ ,  $\zeta_{f1} = 0.02$ ,  $g_1 = 0.15$ ,  $\epsilon = 0.009$ ,  $\alpha_1 = 0.21$  y  $\alpha_2 = 0.05$  y  $W_{sm} = 2.10$ . Se observa la buena atenuación en la respuesta frecuencial, aunque en este caso el esfuerzo de control es mayor, debido al término del control por modos deslizantes.

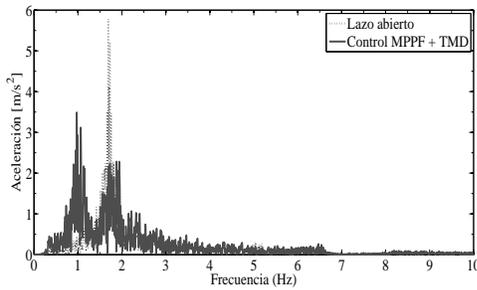


Figure 11a. FRF con TMD y control MPPF. Fuente: Elaboración propia.

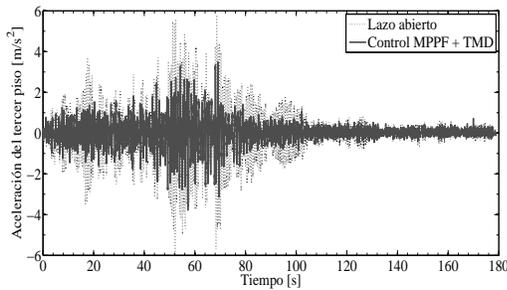


Figure 11b. Respuesta dinámica de la estructura. Fuente: Elaboración propia.

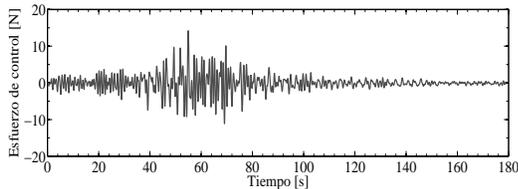


Figure 11c. Esfuerzo de control usando MPPF. Fuente: Elaboración propia.

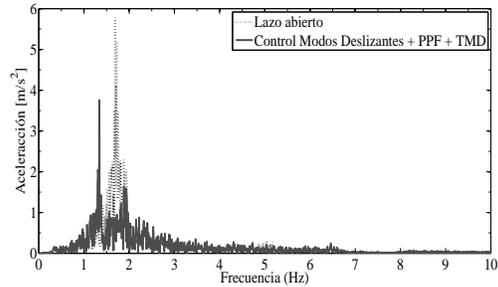


Figure 12a. FRF con TMD y control PPF con Modos deslizantes. Fuente: Elaboración propia.

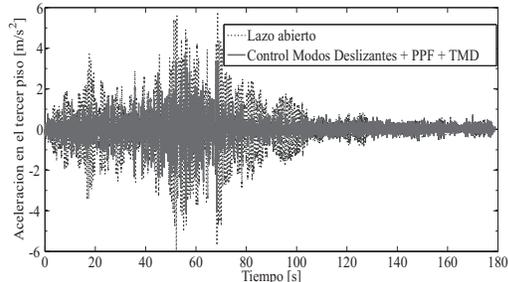


Figure 12b. Respuesta dinámica de la estructura. Fuente: Elaboración propia.

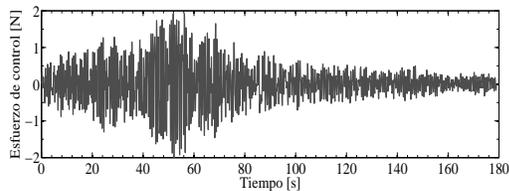


Figure 12c. Esfuerzo de control PPF con Modos deslizantes.  
Fuente: Elaboración propia.

En general, el controlador PPF combinado con modos deslizantes resulta más sencillo de implementar que el controlador MPPF, produciendo una mejor respuesta y empleando esfuerzos de control ligeramente mayores, pero añadiendo robustez ante las perturbaciones exógenas desconocidas, como realmente ocurre en los sismos.

## 9. Conclusiones

Se utiliza un absorbedor pasivo/activo con esquemas de control por retroalimentación positiva de la posición y modos deslizantes para una estructura tipo edificio de tres pisos, perturbada en su base por un registro sísmico de magnitud 8.1 Mw, que afectó a la Ciudad de México en 1985. El desempeño del sistema completo, en lazo abierto y lazo cerrado, se valida a través de resultados en simulación y experimentales. Los resultados son satisfactorios, debido a que los esquemas de control atenúan altamente la respuesta del sistema en presencia de la señal excitadora, utilizando pequeños esfuerzos de control y recurriendo únicamente a la retroalimentación de la posición del TMD.

## Referencias

- [1] Meli, R. y Bazán, E., Diseño sísmico de edificios. México: Editorial LIMUSA, 2013.
- [2] Gómez, G., Marulanda, J. and Thomson, P., Control systems for dynamic loading protection of civil structures. *DYNA*, 75 (155), pp. 77-89, 2008.
- [3] Centro de Instrumentación y Registro Sísmico, A.C. Datos del registro sísmico del temblor de la Ciudad de México en 1985. [Online] Disponible en: [www.cires.org.mx](http://www.cires.org.mx)
- [4] Ríos-Gutiérrez, M. and Silva-Navarro, G., Active vibration control in building-like structures using piezoelectric actuators and positive acceleration feedback. *DYNA*, 80 (179), pp. 116-125, 2013.
- [5] Auvinet G. y Mendoza M.J., Comportamiento de diversos tipos de cimentación en la zona lacustre de la Ciudad de México durante el sismo del 19 de septiembre de 1985. *Proc. Symposium: Los Sismos de 1985; Casos de Mecánica de Suelos*, 1986.
- [6] Schmidt-Díaz, V. y Quirós-Serrano, C. Caracterización de los registros acelerográficos obtenidos en el laboratorio de ingeniería sísmica de la Universidad de Costa Rica. *Ingeniería*, 17 (1), pp. 27-41, 2007.
- [7] Kappos, A.J. and Anastasios, G.S., Protection of buildings from earthquake-induced vibration, en Crocker M.J. In: *Handbook of Noise and Vibration Control*, Wiley, 2007. pp. 1393-1403. <http://dx.doi.org/10.1002/9780470209707.ch117>
- [8] Santana, G., Sismo de Cóbano 25 de marzo de 1990 efectos sobre suelos y edificaciones, Costa Rica: Univ. de Costa Rica, Inst. Inv. en Ingeniería, Lab. de Ing. Sísmica, 1990.
- [9] Cabrera-Amado, A. and Silva-Navarro, G., Semiactive vibration absorption in a rotor-bearing system using a PPF control scheme, *Proc. International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA2012+USD2012*, pp. 209–221, 2012.

- [10] Gawronski, W.K., *Advanced structural dynamics and active control of structures*. NY: Springer-Verlag, 2002.
- [11] Inman, D.J., Tarazaga, P.A. and Salehian, A., Active and passive damping of structures, *Proc. International Congress on Sound and Vibration ICSV13*, pp. 1-8, 2006.
- [12] Friswell, M.I. and Inman, D.J. The relationship between positive position feedback and output feedback controllers. *Smart Materials and Structures*, 8, pp. 285-291, 1999. <http://dx.doi.org/10.1088/0964-1726/8/3/301>
- [13] Utkin, V.I., *Sliding modes in control and optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1992. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-84379-2>
- [14] Baz, A. and Poh, S., Optimal vibration control with modal positive position feedback. *Optim. Control Appl. Meth.*, 17 (2), pp. 141-149, 1996. [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1514\(199604/06\)17:2<141::AID-OCA566>3.0.CO;2-D](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-1514(199604/06)17:2<141::AID-OCA566>3.0.CO;2-D)
- [15] Baz, A. and Hong, J.T., Adaptive control of flexible structures using modal positive position feedback. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 11 (3), pp. 231-253, 1997. [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1115\(199705\)11:3<231::AID-ACS435>3.0.CO;2-8](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-1115(199705)11:3<231::AID-ACS435>3.0.CO;2-8)
- [16] Moon K.K. and Seok H., Active vibration control of smart grid structure by multiinput and multioutput positive position feedback controller. *Journal of Sound and Vibration*, 304 (1-2), pp. 230-245, 2007. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.02.021>

**J. Enríquez-Zárate**, es Ing. en Cibernética de la Universidad del Sol, Cuernavaca, México, con grado de MSc en Ing. Eléctrica - Mecatrónica, y de Dr en Ing. en Diseño Mecánico, ambos obtenidos en la UNAM, México D.F, México. Actualmente realiza una estancia Posdoctoral en la Sección de Mecatrónica en el CINVESTAV-IPN, México, con intereses de investigación en absorbedores de vibraciones activo/pasivo y semi-activo en estructuras mecánicas (edificios, plataformas marinas, eólicos), diseño mecánico y control de sistemas no lineales.

**G. Silva-Navarro**, es Ing. Mecánico (Diseño Mecánico e Ingeniería Térmica) con grado de MSc. en Inge. Eléctrica (Control) ambos obtenidos en el Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, México, y con grado de Dr. en Ing. Eléctrica (Control Automático) obtenido en el CINVESTAV-IPN, México. Actualmente es investigador titular en la Sección de Mecatrónica en el CINVESTAV-IPN. México, con intereses de investigación en mecatrónica, absorbedores de vibraciones activo/pasivo para sistemas mecánicos, estructuras inteligentes, máquinas rotativas, diseño mecánico y control de sistemas no lineales.