

Position analysis of a mechanism Stephenson type I using natural coordinates

Neider Nadid Romero-Núñez ^a & Elkin Gregorio Flórez-Serrano ^b

^a *Optimización de Procesos y Uso Racional de la Energía y Biomasa (OPUREB), Universidad Pontificia Bolivariana, Montería, Colombia. neider.nadid@gmail.com*

^b *Grupo de Investigación en Ingeniería Mecánica (GIMUP), Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia. eflorez@unipamplona.edu.co*

Received: October 13th, 2016. Received in revised form: September 1st, 2017. Accepted: November 25th, 2017.

Abstract

In this article the use of natural coordinates is proposed to determine the position of each element of a mechanism Stephenson type I, analytically. Where natural coordinates are mostly cartesian defined in the kinematic pairs and points of interest of the mechanism, achieving with these alternate equations to the derive from the method of vector loop in which angular coordinates are used. The use of natural coordinates in the kinematic modeling of mechanisms is advantageous because dispenses of the use of trigonometric functions, which facilitates modeling and interpretation of the mechanism, and the resulting equations are simpler than those obtained with the vector loop method. These equations were implemented in MATLAB[®], to simulate the different configurations of a Stephenson mechanisms type I, with the dimensions given.

Keywords: position analysis; natural coordinates; Stephenson I mechanism.

Análisis de posición de un mecanismo de Stephenson tipo I utilizando coordenadas naturales

Resumen

En este artículo se propone la utilización de coordenadas naturales, para determinar la posición de cada elemento de un mecanismo de Stephenson tipo I, de forma analítica. Donde las coordenadas naturales son en su mayoría coordenadas cartesianas, que se definen en los pares cinemáticos y en puntos de interés del mecanismo, consiguiendo con esto ecuaciones alternas a las que se derivan del método de lazo vectorial, en el cual se utilizan coordenadas angulares. El uso de coordenadas naturales en el modelado cinemático de mecanismos es ventajoso, ya que se prescinde de la utilización de funciones trigonométricas, lo cual facilita el modelado e interpretación del mecanismo, y además las ecuaciones obtenidas son más simples que las obtenidas con el método de lazo vectorial. Estas ecuaciones fueron implementadas en MATLAB[®], para simular las diferentes configuraciones de un mecanismo de Stephenson tipo I con las dimensiones dadas.

Palabras clave: análisis de posición; coordenadas naturales; mecanismo de Stephenson I.

1. Introducción

El mecanismo de Stephenson, conocido con en este nombre en honor a su inventor, es un mecanismo más complejo y complicado de analizar, si se le compara con un mecanismo de cuatro barras o uno de Watt [1]. Aunque este mecanismo ha sido menos estudiado que el mecanismo de cuatro barras, actualmente se encuentra un número

considerable de trabajos sobre su modelaje matemático y computacional, así como de sus aplicaciones. Dentro de estas publicaciones, en las últimas dos décadas se puede destacar, el trabajo de Dewen Jin et al [2], donde se propone un método de diseño óptimo de un mecanismo de seis barras de Stephenson para una prótesis de miembro inferior, analizando sus ventajas, tanto del punto de vista cinemático, como dinámico. El trabajo de A. Hernández et al. [3], donde

se describe un método geométrico iterativo para la solución de la cinemática de posición de mecanismos planos con pares rotativos, en los que se incluye el mecanismo de Stephenson. Wen-Yeuan en [4], trata un mecanismo de Stephenson como un mecanismo de cuatro barras o como un mecanismo de cinco barras con único circuito, para identificar la condición de rama. El concepto de relación geométrica o el hecho del determinante de la matriz jacobiana ser cero, fue propuesto para discutir las condiciones límites de la barra de entrada. También, Ana de Juan et al [5], presentan la aplicación informática DISMEC, desarrollada en el entorno MATLAB®, para el diseño cinemático de mecanismos. Esta aplicación es un complemento docente en la asignatura de Cinemática y Dinámica de Máquinas impartida en el plan de estudios de Ingeniero Industrial de la Universidad de Cantabria. Aquí el alumno puede seleccionar un mecanismo de la librería predefinida y definir la geometría y los parámetros de entrada del mismo. Los resultados se muestran de una forma gráfica, y mediante animaciones se consigue simular el movimiento real que tendría el mecanismo. La importancia de este trabajo es que se puede analizar casi cualquier mecanismo, ya que las soluciones son conseguidas de forma numérica, lo que hace posible tratar el problema de síntesis de trayectoria de un mecanismo de Stephenson tipo I en un menor grado de dificultad, consiguiendo una trayectoria aproximadamente recta para cinco puntos de precisión. En Mark M et al. [6], proponen un método para la síntesis de trayectoria con once puntos de precisión, en un mecanismo de Stephenson, donde las ecuaciones que describen matemáticamente la cinemática del mecanismo, están basadas en la condición de cierre de lazo vectorial. Allí el mecanismo tiene como aplicación la generación de la trayectoria de un pie para la marcha de un cuadrúpedo, como se muestra en la Fig. 1. También Mark M. et al [7], proponen un procedimiento para el problema de la síntesis de generación de función para un mecanismo de Stephenson, convirtiendo dicho problema en la solución de un polinomio.

El modelaje de mecanismos utilizando coordenadas naturales fue introducido primeramente por Jalón y Bayo [8], las cuales son en su mayoría coordenadas cartesianas, ubicadas

en los pares cinemáticos o en puntos de interés. La ventaja de las coordenadas naturales es que se prescinde del uso de parámetros angulares, evitando con ello la utilización de funciones trigonométricas. Neider Nadid en [9], utilizó coordenadas naturales para el problema de síntesis de posición de mecanismos de dirección de vehículos. En este trabajo se hizo uso del método de Newton-Raphson para solucionar las ecuaciones de forma iterativa. Además, Neider Nadid en [10], utilizó las coordenadas naturales para resolver, de forma analítica, el problema de síntesis de posición de un mecanismo de cuatro barras. Mauro et al, en [11], utilizaron las coordenadas naturales para generar un modelo de optimización de mecanismos, incluyendo entre estos el mecanismo de Stephenson.

En el presente trabajo se hace uso de las coordenadas naturales, para el análisis de posición de un mecanismo de Stephenson I. Las ecuaciones que definen la posición de cada elemento han sido obtenidas de forma analítica, por lo tanto, las soluciones de las mismas son cerradas. Finalmente, las ecuaciones obtenidas fueron implementadas en MATLAB®, con el fin de realizar las simulaciones de las diferentes configuraciones del mecanismo de Stephenson I.

Cabe destacar que el uso del método de las coordenadas naturales es relativamente nuevo, y por ende poco conocido en la comunidad académica dedicada a la teoría de mecanismos

2. Modelamiento usando coordenadas naturales

La Fig. 2 muestra un mecanismo de Stephenson I, modelado con coordenadas naturales, donde el vector de coordenadas naturales es,

$$q = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ D_x \\ D_y \\ E_x \\ E_y \\ F_x \\ F_y \\ G_x \\ G_y \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix} \quad (1)$$

y el vector de las variables dimensionales que define la geometría del mecanismo es dado por:

$$x = [a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i \ j \ k \ A_x \ A_y \ B_x \ A_y]^T$$

El punto C es dado por

$$C = \begin{bmatrix} A_x + a \cos \varphi \\ A_y + a \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde φ es el parámetro de entrada.

El método para determinar el resto de coordenadas naturales, se basado en la triangulación, que en este caso consiste en dado dos puntos y dos distancias diferentes a los de los puntos dados, hallar el tercer punto del triángulo. Un método similar llamado bilateración es propuesto por Nicolás

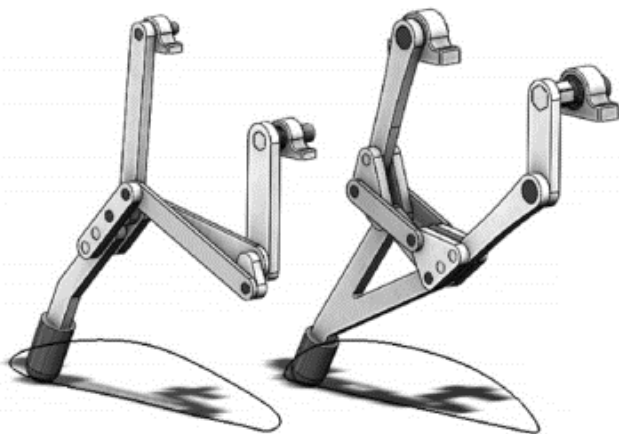


Figura 1. Mecanismos de Stephenson I y II de izquierda a derecha, generadores de trayectoria de marcha de cuadrúpedo. Fuente: Tomado de [6].

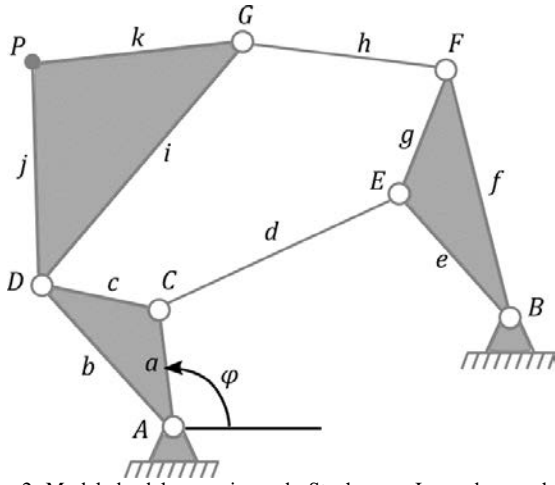


Figura 2. Modelado del mecanismo de Stephenson I usando coordenadas naturales.
Fuente: Los autores.

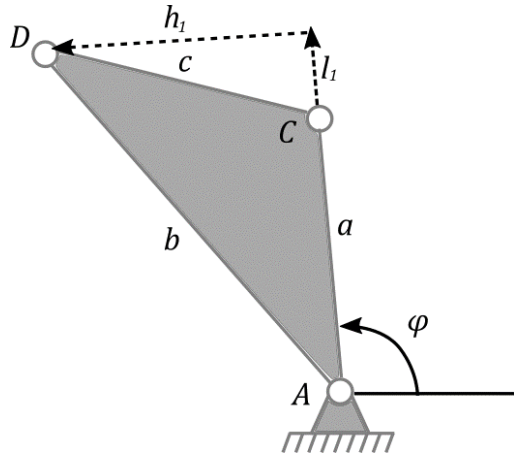


Figura 3. Eslabón de entrada ternario representado el triángulo $\triangle ACD$.
Fuente: Los autores.

Rojas [12], el cual es enfocado en la solución numérica del problema de posición. El método también es similar al utilizado en el sistema de posicionamiento global GPS, donde se necesita un mínimo de tres satélites para calcular la posición de un punto en la tierra.

Para el triángulo $\triangle ACD$ que se muestra en la Fig. 3, se tiene que

$$s_1 = a$$

$$l_1 = \frac{c^2 + s_1^2 - b^2}{2s_1}$$

$$h_1 = t_1 \sqrt{c^2 - l_1^2}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se obtiene

$$D = C + \frac{l_1}{s_1}(A - C) + \frac{h_1}{s_1}R(A - C) \quad (3)$$

de forma similar para el triángulo $\triangle BCE$, se puede escribir

$$s_2 = \|B - C\|$$

$$l_2 = \frac{d^2 + s_2^2 - e^2}{2s_2}$$

$$h_2 = t_2 \sqrt{d^2 - l_2^2}$$

obteniendo

$$E = C + \frac{l_2}{s_2}(B - C) + \frac{h_2}{s_2}R(B - C) \quad (4)$$

luego para el triángulo $\triangle BEF$, se escribe que

$$s_3 = e$$

$$l_3 = \frac{g^2 + s_3^2 - f^2}{2s_3}$$

$$h_3 = t_3 \sqrt{g^2 - l_3^2}$$

$$F = E + \frac{l_3}{s_3}(B - E) + \frac{h_3}{s_3}R(B - E) \quad (5)$$

para el triángulo $\triangle DFG$, se tiene

$$s_4 = \|F - D\|$$

$$l_4 = \frac{i^2 + s_4^2 - h^2}{2s_4}$$

$$h_4 = t_4 \sqrt{i^2 - l_4^2}$$

donde se obtiene

$$G = D + \frac{l_4}{s_4}(F - D) + \frac{h_4}{s_4}R(F - D) \quad (6)$$

finalmente, para el triángulo $\triangle DGP$, se tiene que

$$s_5 = i$$

$$l_5 = \frac{j^2 + s_5^2 - k^2}{2s_5}$$

$$h_5 = t_5 \sqrt{j^2 - l_5^2}$$

$$P = D + \frac{l_5}{s_5}(G - D) + \frac{h_5}{s_5}R(G - D) \quad (7)$$

El vector de coordenadas naturales q se puede escribir como:

$$q = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_x + a \cos \varphi] \\ [A_y + a \sin \varphi] \\ C + \frac{l_1}{s_1}(A - C) + \frac{h_1}{s_1}R(A - C) \\ C + \frac{l_2}{s_2}(B - C) + \frac{h_2}{s_2}R(B - C) \\ E + \frac{l_3}{s_3}(B - E) + \frac{h_3}{s_3}R(B - E) \\ D + \frac{l_4}{s_2}(F - D) + \frac{h_4}{s_4}R(F - D) \\ \frac{l_5}{s_5}(G - D) + \frac{h_5}{s_5}R(G - D) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} g &= 3 \text{ cm} \\ h &= 9 \text{ cm} \\ i &= 8 \text{ cm} \\ j &= 7 \text{ cm} \\ k &= 6 \text{ cm} \\ A_x &= A_y = 0 \text{ cm} \\ B_x &= 8 \text{ cm} \\ B_y &= 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los valores de t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 son 1 o -1, lo que significa que cada triángulo tiene dos configuraciones y, por lo tanto, el mecanismo tiene 32 configuraciones en total. Las configuraciones se pueden agrupar en una matriz de configuraciones T ec. (9), donde cada fila representa la configuración T_i y las columnas de T_i son los valores de t_j .

Por ejemplo, la configuración,

$$T_{10} = [1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1], \text{ significa que:}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 \\ t_2 &= -1 \\ t_3 &= 1 \\ t_4 &= 1 \\ t_5 &= -1 \end{aligned}$$

3. Resultados

Las ecuaciones obtenidas fueron implementadas en el software numérico MATLAB®, para un mecanismo de Stephenson I con las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ cm} \\ b &= 5 \text{ cm} \\ c &= 3 \text{ cm} \\ d &= 8 \text{ cm} \\ e &= 6 \text{ cm} \\ f &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

De la Fig. 4 a la Fig. 13 se muestran las 10 primeras configuraciones del mecanismo de Stephenson I. En las cuales se puede observar que cada configuración es sustancialmente diferente de las otras.

Las curvas trazadas por el mecanismo corresponden al punto G y al punto P , teniendo en cuenta que el punto P tiende al punto G cuando la distancia k se hace considerablemente pequeña. Estas curvas son más complejas que en el mecanismo de cuatro barras, ya que el número de variables que definen la geometría es mucho mayor.

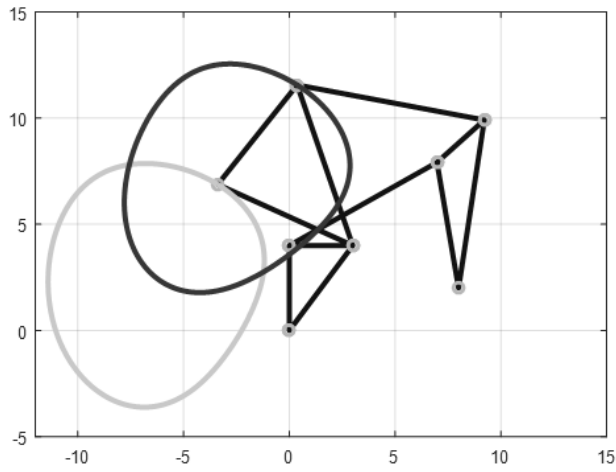


Figura 4. Configuración T_1
Fuente: Los autores.

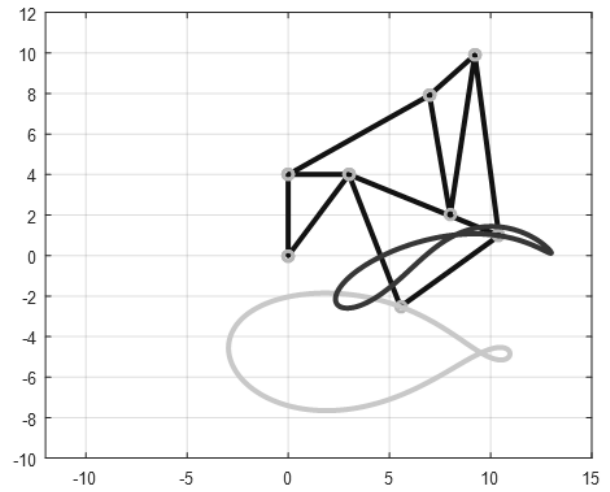


Figura 7. Configuración T_4
Fuente: Los autores.

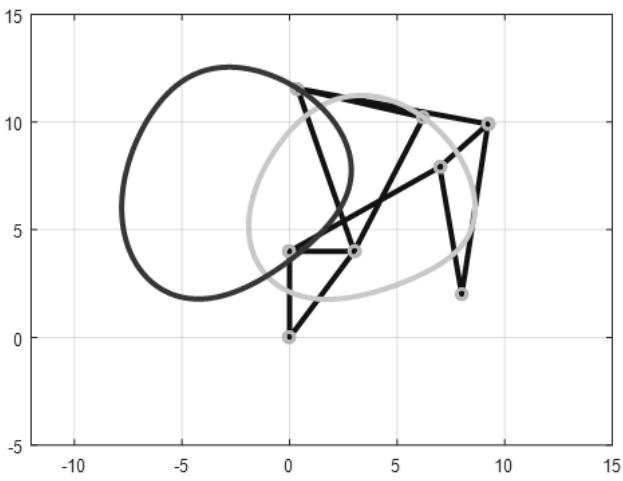


Figura 5. Configuración T_2
Fuente: Los autores.

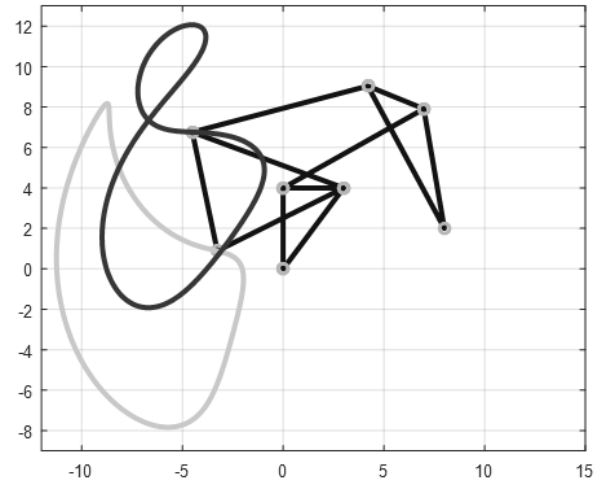


Figura 8. Configuración T_5
Fuente: Los autores.

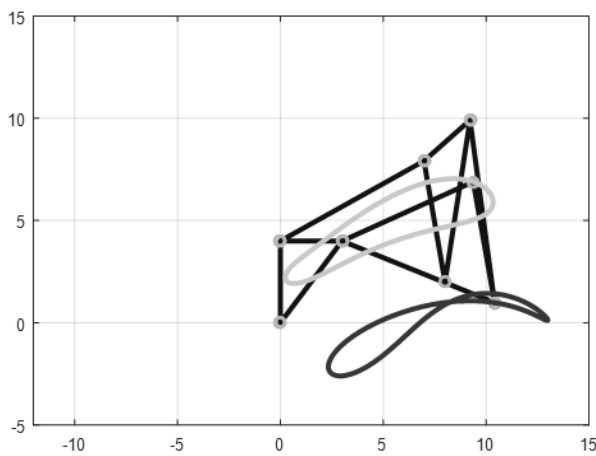


Figura 6. Configuración T_3
Fuente: Los autores.

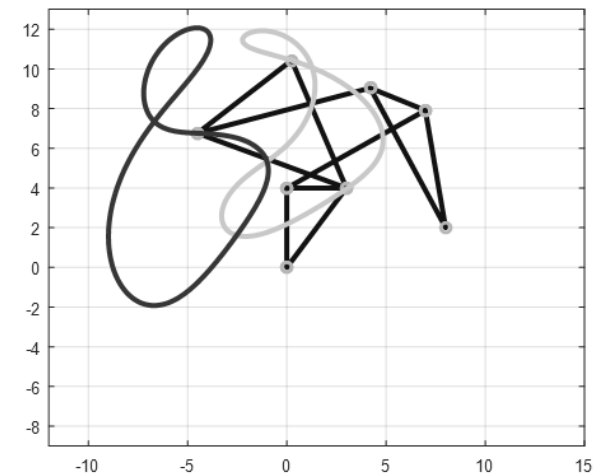


Figura 9. Configuración T_6
Fuente: Los autores.

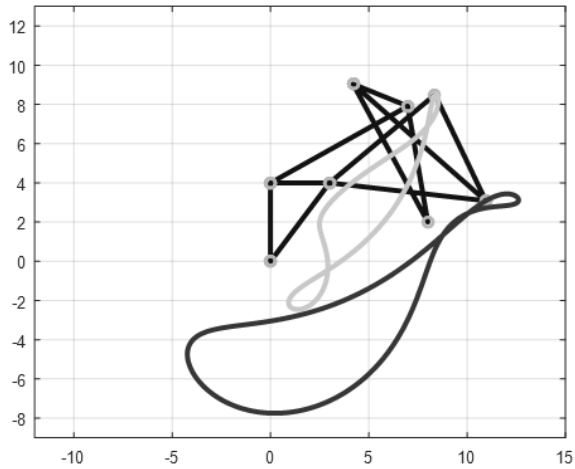


Figura 10. Configuración T_7
Fuente: Los autores.

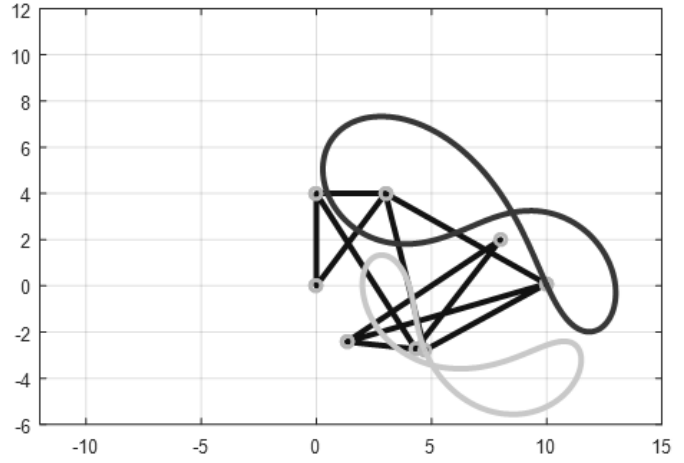


Figura 13. Configuración T_{10}
Fuente: Los autores.

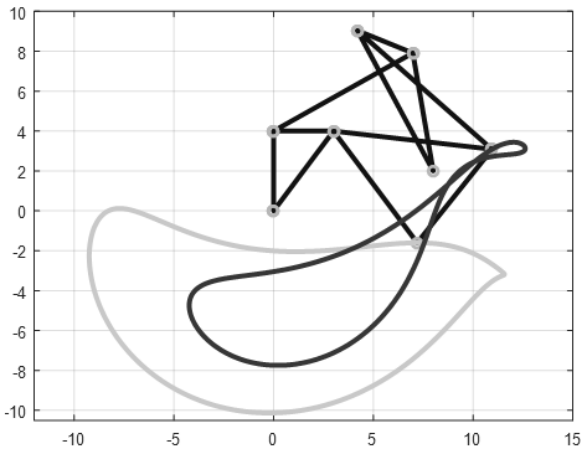


Figura 11. Configuración T_8
Fuente: Los autores.

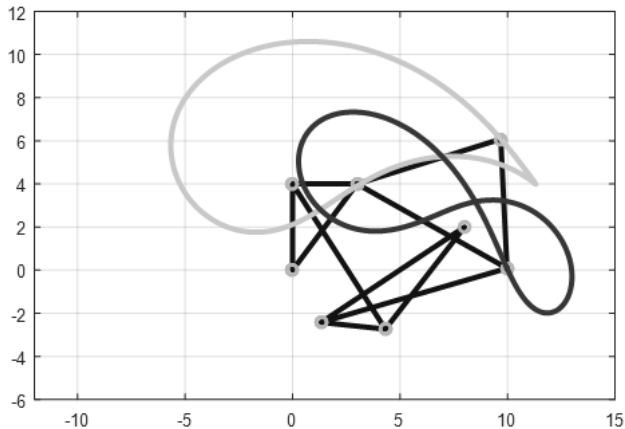


Figura 12. Configuración T_9
Fuente: Los autores.

4. Conclusiones

En este artículo se hizo uso de las coordenadas naturales para resolver el problema de posición de un mecanismo de Stephenson I de forma analítica, evidenciándose que las ecuaciones obtenidas son simples y de fácil implantación en una computadora. Además, se definió una matriz de configuraciones que contiene los 32 modos posibles de ensamble del mecanismo. También se evidencia el potencial que tienen las coordenadas naturales en el modelaje de mecanismos complejos, ya que la determinación de los puntos del mecanismo está basada en la triangulación y no en ecuaciones de cierre de lazo que implican el uso de ángulos y de identidades trigonométricas para la deducción de las ecuaciones.

En las Figs. 4 a 13 se muestran las trayectorias de puntos del acoplador para las primeras diez configuraciones, evidenciando que las trayectorias son más complejas que las trazadas por un mecanismo de cuatro barras.

Por último, cabe destacar que solución analítica de problemas de posición usando coordenadas naturales abre una nueva línea de investigación en la teoría de mecanismos, y se puede decir que esto es un desarrollo de lo que puede llamarse escuela Iberoamérica de teoría de mecanismos.

Referencias

- [1] Norton, R.L., Design of machinery: An Introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines. McGraw-Hill Higher Education, 2003.
- [2] Jin, D., Zhang, R., Dimo, H.O., Wang, R. and Zhang, J., Kinematic and dynamic performance of prosthetic knee joint using six-bar mechanism., J. Rehabil. Res. Dev., 40(1), pp. 39-48, 2003. DOI: 10.1682/JRRD.2003.01.0039
- [3] Hernández, A. and Petuya, V., Position analysis of planar mechanisms with R-pairs using a geometrical-iterative method, Mech. Mach. Theory, 39(2), pp. 133-152, Feb. 2004. DOI: 10.1016/S0094-114X(03)00110-1
- [4] Chung, W.Y., Double configurations of five-link Assur kinematic chain and stationary configurations of Stephenson six-bar, Mech. Mach. Theory, 42(12), pp. 1653-1662, 2007. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2006.11.008

- [5] De Juan, A., Sancibrián, R., Rodríguez, S. y García, P., Aplicación de MATLAB ® al diseño de mecanismos, XVIII Congr. Nac. Ing. mecánica, 2010.
- [6] Plecnik, M.M. and McCarthy, J.M., Design of Stephenson linkages that guide a point along a specified trajectory, Mech. Mach. Theory, 96, pp. 38-51, 2016. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.08.015
- [7] Plecnik, M.M. and McCarthy, J.M., Kinematic synthesis of Stephenson III six-bar function generators, Mech. Mach. Theory, 97, pp. 112-126, 2016. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.10.004
- [8] Jazar, R.N., Vehicle Dynamics. New York, NY: Springer New York, 2014.
- [9] Romero, N., Sítese Estrutural e Otimização Dimensional de Mecanismos de Direção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014.
- [10] Neider, R., Análisis de posición de un mecanismo de cuatro barras utilizando coordenadas naturales, Rev. Iberoam. Ing. Mecánica, 20, pp. 83-90, 2016.
- [11] Da Lio, M., Cossalter, V. and Lot, R., On the use of natural coordinates in optimal synthesis of mechanisms, Mech. Mach. Theory, 35(10), pp. 1367-1389, 2000. DOI: 10.1016/S0094-114X(00)00006-9
- [12] Rojas, N. and Thomas, F., Distance-based position analysis of the three seven-link Assur kinematic chains, Mech. Mach. Theory, 46(2), pp. 112-126, Feb. 2011. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.10.004

N.N. Romero-Núñez, received the BSc. Eng. in Mechanical Engineering in 2011 from the Universidad de Pamplona, Pamplona-Colombia, and the MSc. degree in Mechanical Engineering in 2014 from the Universidade Federal de Santa Catarina, Florianopolis- Brasil. Currently, he is a full professor in the Mechanical Engineering Department, Facultad de Ingenierías y Arquitectura, Universidad de Pamplona, Colombia. His research interests include: analysis and design of mechanics, dynamic of mechanisms and machines, numerical method in optimization.
ORCID: 0000-0002-9076-2601

E.G. Flórez-Serrano, received the BSc. in Mechanical Eng. in 1997 from the Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia, the MSc. of Mechanical Engineering in 2000 from the Universidad de los Andes, Bogotá- Colombia, and the PhD. in Mechanical Engineering in 2009, from Polytechnic University of Catalunya. Currently, he is a titular professor in the Mechanical Engineering Program, Facultad de Ingenierías y Arquitectura, Universidad de Pamplona, Colombia. His research interests include analysis and design of mechanics, dynamic of mechanisms and machines, vibrations mechanics.
ORCID: 0000-0002-3431-146X



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE MINAS

Área Curricular de Ingeniería Mecánica

Oferta de Posgrados

Maestría en Ingeniería - Ingeniería Mecánica

Mayor información:

E-mail: acmecanica_med@unal.edu.co
Teléfono: (57-4) 4259262