Un modelo "cuasi-Solow" y el caso de la tasa de ahorro endógena

A Solownian Model and the Case of the Endogenous Savings Rate

Carlos Esteban Posada P.*

Resumen

De acuerdo con Weil (2009), uno de los hechos estilizados del crecimiento económico internacional es una asociación positiva entre las tasas de ahorro y los niveles de ingreso per cápita. En este documento se propone una interpretación de tal hecho adicional a la que surge del propio modelo de Solow, mediante uno casi similar pero ampliado con la hipótesis de una influencia positiva del capital sobre la tasa de ahorro. El modelo así modificado, un modelo "cuasi-Solow", puede generar un caso de "crecimiento endógeno" o el caso del crecimiento exógeno, dependiendo uno u otro caso del valor específico que tome un parámetro de la función de ahorro. La conclusión principal es la siguiente: un modelo de crecimiento económico que es, en lo esencial, "solowniano", como el expuesto en estas páginas, puede ser útil para interpretar procesos de crecimiento económico bastante prolongados a través del tiempo.

Palabras clave: Solow, tasa de ahorro, crecimiento endógeno, crecimiento exógeno.

Clasificación JEL: O10, O16, O41.

---

* Universidad de los Andes y Universidad Nacional. Correo electrónico: *carlos.posada.p@gmail.com*. Agradezco los comentarios críticos y las sugerencias de Luis Eduardo Arango T., Daniel Mejía L. y un evaluador anónimo a una versión anterior de este documento.

Este artículo fue recibido el 5 de agosto de 2011; modificado el 19 de agosto de 2011 y, finalmente, aceptado el 28 de septiembre de 2011.

Abstract

According to Weil (2009) one of the stylized facts of the international economic growth is a positive association between savings rates and per capita income levels. This paper proposes a new interpretation of this fact by a Solow-type model but expanded with a hypothesis of a positive influence of the capital on the savings rate. The model thus amended, a "quasi-Solow" model, can generate the case of "endogenous growth" or the case of exogenous growth, either case depending on the specific value that takes a parameter of the savings rate function. The main conclusion is this: a model of economic growth which, in essence, is a "solownian" one, as the model described in these pages, may be useful to interpret a process of economic growth through the very long time.

Key words: Solow, savings rate, endogenous growth, exogenous growth.

JEL *classification*: O10, O16, O41.

Introducción

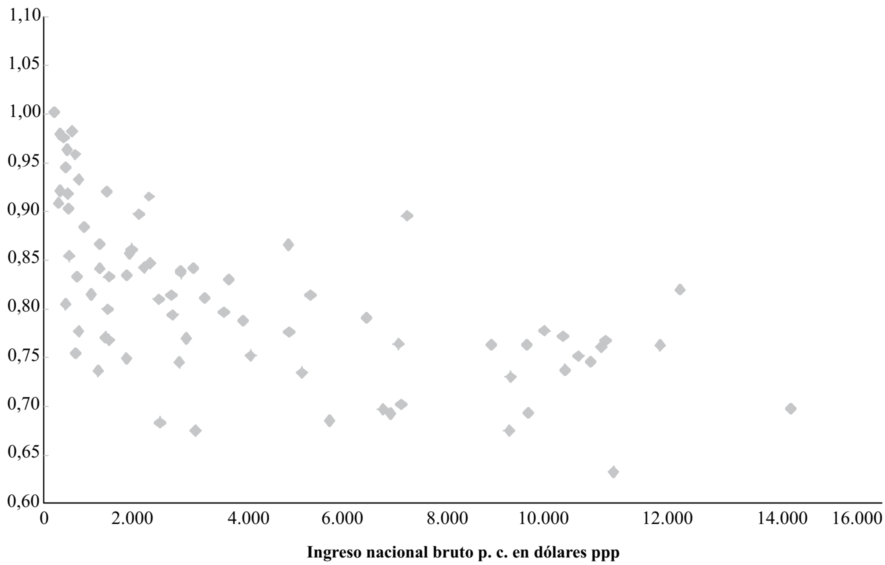
En su texto sobre crecimiento económico, David Weil presenta un gráfico que sugiere una relación positiva entre las tasas nacionales de ahorro y los niveles de ingreso per cápita[1]. Ese gráfico fue elaborado con datos del Banco Mundial de una muestra de 142 países para 2005.

El gráfico 1, que se presenta a continuación, muestra una relación negativa, en términos gruesos, y aparentemente no lineal, entre los niveles de ingreso per cápita y las tasas nacionales de consumo, y, por ende, una relación positiva entre ingresos per cápita y tasas de ahorro. El gráfico se elaboró con cifras del Banco Mundial (*World Development Indicators*) y abarca un horizonte más amplio que el del citado gráfico de Weil, aunque incluye un número menor de países debido a la disponibilidad de datos.

---

[1] Weil, 2009, gráfico 3.8, p. 70.

Gráfico 1. Relación media consumo/PIB (1960-2005) frente a ingreso bruto per cápita de 1980 (en dólares ppp) 77 países



Aunque una relación positiva entre tasas de ahorro e ingresos medios por habitante es predicha por el modelo de Solow (a mayor tasa de ahorro de un país mayor será su ingreso per cápita de estado estable), Weil discute (y se muestra favorable a) una interpretación de tal "hecho estilizado" en un sentido adicional al del propio modelo de Solow, a saber, que puede haber una causalidad que corre también en la dirección contraria: a mayor ingreso per cápita de una economía mayor será su tasa de ahorro. Weil ilustra esta posibilidad en el marco del modelo de Solow suponiendo dos tasas alternativas de ahorro: la más baja cuando el ingreso per cápita es inferior a un cierto (y exógeno) umbral, y la más alta cuando alcanza o supera tal umbral. Esto genera dos estados estables alternativos: uno con menores niveles de capital, producto y consumo por trabajador (y per cápita, dada una cierta relación entre fuerza laboral y población), y otro con niveles más altos.

En lo que sigue (sección I) se presenta un modelo tipo Solow pero modificado para interpretar el caso de una dependencia de la tasa de ahorro del capital por trabajador (y por ende, del ingreso per cápita). A diferencia de lo que propone Weil, se supone que tal relación de dependencia es continua y derivable. Este modelo se denomina “cuasi-Solow” pero podría denominarse, también, “Solow generalizado”. Un caso particular arrojado por este modelo, pero con un cierto interés empírico y doctrinal, es el caso del “crecimiento endógeno”. Y el otro caso es el similar al del modelo de Solow: el caso del “crecimiento exógeno”.

Con posterioridad a la presentación del modelo, en la sección II, se discute la teoría implícita en el modelo de la sección I. Esto se hace a la luz del modelo estándar “microfundamentado” de crecimiento económico, el modelo Cass-Koopmans-Ramsey (CKR). La sección III resume y concluye. En el anexo 1 se aclara la implicación de este modelo en lo que se refiere al tema de la “regla de oro”, y en el anexo 2 se presenta un ejemplo numérico para ilustrar la relación entre la tasa de descuento y la tasa de ahorro en el marco del modelo CKR.

I. El modelo

Para simplificar, se supone que la población (laboral y total) es constante e igual a 1. Además se supone que la función de producción es Cobb-Douglas, así:

$$y = Ak^{\alpha}; \quad A > 0; \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Siendo y, A y k el producto (ingreso), el índice de productividad multifactorial y el capital por trabajador, respectivamente.

La ley de acumulación de capital es:

$$\Delta k = sAk^{\alpha} - \delta k; \quad 0 < s < 1; \quad 0 < \delta < 1. \tag{2}$$

Siendo s y δ las tasas de ahorro (ahorro/producto) y depreciación, respectivamente.

Las ecuaciones (1) y (2) son propias de las representaciones convencionales del modelo de Solow (Weil, 2009). Lo específico del presente modelo es la siguiente hipótesis:

$$s = \gamma k^{\eta}; \quad 0 < \gamma < 1; \quad \eta \geq 0. \tag{3}$$

Siendo γ y η parámetros. La hipótesis (3) expresa una dependencia positiva de la tasa de ahorro del nivel del capital por trabajador (cuando $\eta > 0$).

Al reemplazar (3) y (1) en (2) resulta que:

$$\Delta k = \gamma A k^{\alpha+\eta} - \delta k. \tag{4}$$

Por tanto, al dividir los lados izquierdo y derecho de (4) por el capital por trabajador resulta la tasa de crecimiento del capital por trabajador:

$$\hat{k} \equiv \frac{\Delta k}{k} = \gamma A k^{\alpha+\eta-1} - \delta \tag{5}$$

Debe notarse, de acuerdo con (5), que si el parámetro η (la elasticidad de la tasa de ahorro al capital) es mayor o igual a un cierto valor tal que la suma $\alpha + \eta$ es igual o mayor que 1 la ecuación (5) implica que la tasa de crecimiento del capital por trabajador (y, por ende, la del producto por trabajador) no cae ante aumentos del capital. Por ejemplo, si α es igual a 0,35 y η es igual a 0,65, la tasa de crecimiento del capital por trabajador será (según 5):

$$\hat{k} = \gamma A - \delta$$

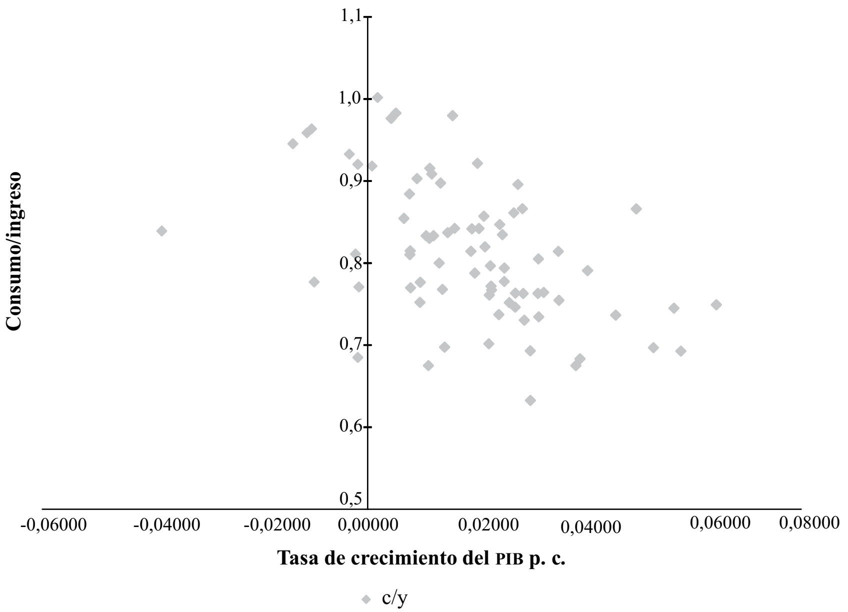
Es decir, la tasa de crecimiento del capital por trabajador (y, entonces, la de crecimiento económico o del producto por trabajador) será una constante (y podrá ser positiva), independientemente del monto del capital. Por ejemplo, si γ es 0,08, A es 1 y δ es 5% anual, entonces la tasa de crecimiento del capital por trabajador y, entonces, la de crecimiento económico será 3% anual de manera permanente. Por tanto, el caso en el cual la suma $\alpha + \eta$ es igual o mayor que 1 replica las predicciones de los llamados modelos "AK de crecimiento endógeno[2]".

---

[2] Entre tales modelos cabe mencionar (por ser relativamente afines al presente modelo) a Frankel (1962) y Romer (1986); véase, al respecto, el texto de Aghion y Howitt, 2009, pp. 47 y ss. El lector podrá observar que la ecuación (5) implica que cuanto mayor es la elasticidad de la tasa de ahorro al capital (cuanto mayor η) mayor será la elasticidad de la tasa de crecimiento de la economía ante aumentos del capital. La implicación empírica de esto parece ir de la mano con (o ser equivalente a) dos de las implicaciones del modelo de Zuleta

El gráfico 2 muestra que una de las predicciones que pueden derivarse de este caso, a saber, que existiría una relación inversa de largo plazo entre la tasa de consumo (consumo/ingreso) y la tasa de crecimiento del PIB real per cápita, parecería compatible con la evidencia empírica internacional[3].

Gráfico 2. Relación media consumo/PIB frente a tasa de crecimiento del PIB real per cápita (77 países). 1960-2005



(2008), a saber: … *(a) the elasticity of output with respect to reproducible factors depends on the capital abundance of the economy and (b) the income share of reproducible factors increases as the output grows. Another insight of the model is that in some economies the production function converges to an AK in the long run, while in others long-run growth is zero* (Zuleta, 2008, p. 836). Por lo demás, un modelo de crecimiento con la siguiente función de producción: $Y = AK^{a} + BK; 0 < a < 1, A, B > 0$ y tasa de ahorro exógena puede generar simultáneamente una transición al estado estable y crecimiento permanente (en el estado estable); esta última propiedad implica una predicción similar a la del presente modelo, aunque este no genera transiciones al estado estable cuando $\alpha + \eta = 1$. Agradezco esta aclaración a Daniel Mejía.

3 La fuente del gráfico 2 es *World Development Indicators* (Banco Mundial).

Pero supongamos, ahora, que el parámetro η sea tan pequeño que la suma $\alpha + \eta$ es menor que 1. En tal caso, de la ecuación (5) se deduce que:

$$\frac{d\hat{k}}{dk} = (\alpha + \eta - 1)\gamma A k^{\alpha+\eta-2} < 0 \Leftrightarrow \alpha + \eta < 1. \tag{6}$$

Es decir, la tasa de crecimiento del capital por trabajador tiende a reducirse ante aumentos del nivel de este (y viceversa), así que es legítimo esperar que se estabilice el monto del capital por trabajador en un nivel llamado de "estado estable" (k^{ss}), que podemos conocer haciendo 0 el lado derecho de (5) (cuando, como ya se dijo, $\alpha + \eta < 1$). Este es:

$$k^{SS} = \left(\frac{\gamma A}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}}. \tag{7}$$

Por tanto, este caso permite predecir convergencia en los niveles de capital por trabajador e ingreso per cápita de dos economías (condicional a tener valores semejantes de los parámetros de la ecuación 7) de manera similar a lo que predice el modelo de Solow. Para simplificar aún más, supongamos que A es igual a 1. En tal caso:

$$k^{SS} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}}. \tag{7a}$$

El lector notará la diferencia del lado derecho de (7) con el nivel de capital de estado estable del modelo de Solow. La diferencia desaparece si $\eta = 0$[4].

---

4 Nótese que el parámetro η incide en la velocidad de aumento del capital por trabajador y, si es menor que 1, en su nivel de estado estable.

II. ¿Qué implica lo anterior a la luz del modelo Cass-Koopmans-Ramsey?

El modelo de crecimiento económico Cass-Koopmans-Ramsey (en lo que sigue, CKR)[5] es el más básico entre los "modelos microfundamentados" del *mainstream*. Es, por así decirlo, el patrón de comparación y referencia para cualquier modelo de crecimiento. ¿Qué puede entonces decirse de todo lo anterior, y en particular, de la hipótesis (3), a la luz de este patrón?

Una forma de responder esta pregunta es la siguiente. Supóngase una versión del modelo CKR que tenga las siguientes características básicas: a) población laboral y total constante e igual a 1, b) una función de producción Cobb-Douglas (igual a la del modelo de la sección I), c) constancia del parámetro A de la función de producción, e igual a 1 y d) una función de utilidad del consumidor representativo del tipo "elasticidad de sustitución intertemporal constante". Tal versión implica que el nivel de capital por trabajador de estado estacionario es[6]:

$$k^{SS} = \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (8)$$

Siendo ρ la tasa subjetiva de descuento de la corriente de utilidades periódicas (el factor de impaciencia).

Además, la tasa de ahorro de estado estacionario (s^{ss}) de esta versión del modelo CKR es:

$$s^{SS} = \frac{\alpha}{\frac{\rho}{\delta}+1}. \qquad (9)$$

A la luz de las ecuaciones (8) y (9) puede decirse lo siguiente del modelo de la sección I: tal modelo implica (implícitamente) que cuanto menor sea la tasa subjetiva de descuento (ρ) mayores son la tasa de

---

[5] Aghion y Howitt, 2009, pp. 31 y ss.

[6] En Mejía y Posada (2011) se encuentra una exposición detallada de esta versión del modelo CKR y una deducción de las ecuaciones (8) y (9).

ahorro y el nivel de capital por trabajador de estado estacionario, así que la hipótesis (3) debería interpretarse, a la luz del modelo CKR, como una asociación positiva no lineal entre dos variables endógenas que tienen un elemento determinante común: la tasa de descuento de la utilidad o grado de impaciencia de los consumidores. A su vez, la causa podría ser, por ejemplo, los aumentos del factor A o productividad multifactorial que, supuestamente, generan decrecientes grados de impaciencia de las familias como, por ejemplo, pero de particular importancia, aquellos cambios técnicos que directa o indirectamente han contribuido a elevar la esperanza de vida de la población[7].

Lo anterior habría que formalizarlo mediante la elaboración de una versión del modelo CKR con una tasa de descuento endógena a fin de examinar todas sus implicaciones[8]. Obstfeld y Rogoff (1996, pp. 723 y ss.) presentan un modelo de equilibrio parcial en el cual la tasa de descuento es endógena. En dicho modelo la tasa de descuento puede depender positivamente de la riqueza, el caso contrario al del modelo de la sección I, o negativamente, el caso compatible con este.

III. Resumen y conclusión

De acuerdo con Weil (2009), uno de los hechos estilizados del crecimiento económico es una asociación positiva entre las tasas de ahorro y los niveles de ingreso per cápita, si se examinan los datos de muchas economías del mundo. En este documento se propone una interpretación de tal hecho mediante un modelo tipo Solow, pero ampliado con una hipótesis relativa a una influencia positiva del capital por trabajador sobre la tasa de ahorro.

El modelo así modificado, un modelo "cuasi-Solow" (o "solowniano"), es compatible tanto con el caso del "crecimiento endógeno" como con el caso generado por el modelo estándar de Solow, el del crecimiento

---

7 En un trabajo pionero, Blanchard (1985) derivó la tasa de descuento de la corriente de utilidades del hogar de la esperanza de vida de su agente representativo. Sobre esto véanse también Barro y Sala-i-Martin (1995, pp. 110 y ss.).

8 Una de estas podría ser la existencia de equilibrios múltiples.

exógeno, dependiendo uno u otro caso del valor específico que tome un parámetro de la función de ahorro.

El modelo "cuasi-Solow" acá presentado sería compatible con el modelo CKR si este se modificase para incluir una tasa de descuento de la utilidad que fuese decayendo *pari passu* con los aumentos del capital por trabajador a causa de algún factor exógeno, como el aumento persistente de la productividad multifactorial.

La conclusión principal es la siguiente: un modelo de crecimiento económico que es, en lo esencial, "solowniano", como el expuesto en la sección I, puede ser útil para interpretar procesos muy prolongados de crecimiento económico.

Referencias

1. AGHION, P. y HOWITT, P. (2009). *The economics of growth*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press.

2. BARRO, R. y SALA-i-MARTIN, X. (1995). *Economic growth*. Nueva York, McGraw-Hill.

3. BLANCHARD, O. (1985). "Debt, deficits, and finite horizons", *Journal of Political Economy*, 93, 2.

4. FRANKEL, M. (1962). "The production function in allocation and growth: A synthesis", *American Economic Review*, 52, 5.

5. MEJÍA, D. y POSADA, C. E. (2011). "Crecimiento y ciclos económicos: el modelo Cass-Koopmans-Ramsey". Documento no publicado (disponible a pedido del lector).

6. OBSTFELD, M. y ROGOFF, K. (1996). *Foundations of international macroeconomics*. The MIT Press.

7. ROMER, P. (1986). "Increasing returns and long-run growth", *Journal of Political Economy*, 94, 5.

8. SALA-i-MARTIN, X. (2000). *Apuntes de crecimiento económico* (2ª ed.). Barcelona, Antoni Bosch editor.

9. WEIL, D. (2009). *Economic growth* (2ª ed.). Pearson - Addison Wesley.

10. ZULETA, H. (2008). "Factor saving innovations and factor income shares", *Review of Economic Dynamics*, 11, 4.

Anexos

Anexo 1. La regla de oro en los modelos de Solow y “cuasi-Solow”

En el modelo de Solow (ecuaciones 1 y 2 con tasa de ahorro, s, exógena) el nivel de capital por trabajador correspondiente al estado estable (para $A = 1$) es:

$$k^{ss} = \left(\frac{S}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{A.1}$$

Pero aquel estado estable en el cual es máximo el consumo per cápita (o por trabajador) se caracteriza por el siguiente nivel de capital por trabajador (para $A = 1$):

$$k^{ss\ oro} = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{A.2}$$

Esto significa que si se cumpliese la “regla de oro” (la que hace máximo el consumo per cápita) la tasa de ahorro sería igual a la elasticidad del producto al capital, α[9].

En el modelo “cuasi-Solow” (suponiendo que η es menor que 1) el nivel de capital por trabajador que corresponde a un estado estable en el cual fuese máximo el consumo per cápita, el de la regla de oro, es igual al del modelo de Solow. Pero en el modelo “cuasi-Solow”, el cumplimiento de la regla de oro implicaría (de nuevo, para $A = 1$, y $\eta < 1$) que (véanse ecuaciones 7a y A.1):

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}} = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

---

[9] Sobre los temas de regla de oro e ineficiencia dinámica, véase Sala-i-Martin (2000, pp. 26 y ss., y 29 y ss.).

Por tanto:

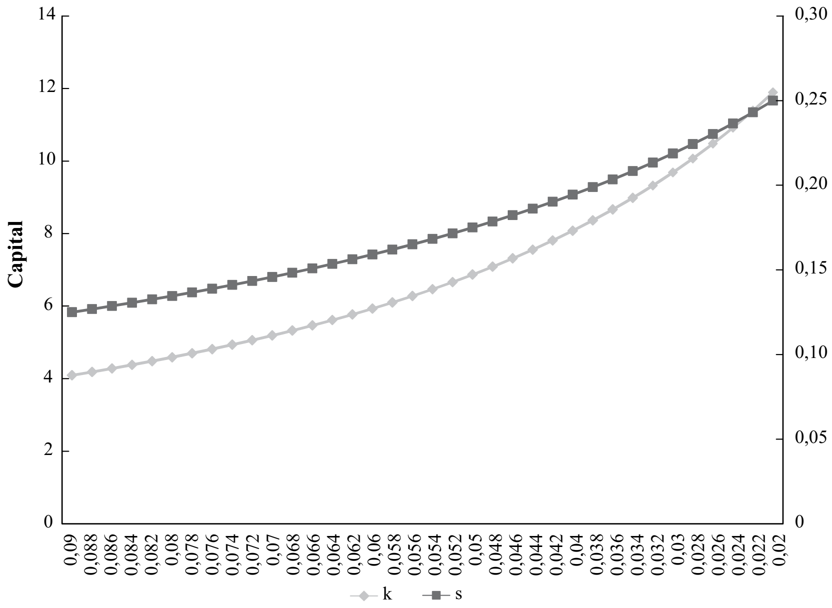
$$\gamma^{oro} = \delta\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1-\alpha-\eta}{1-\alpha}}. \quad \text{(A.3)}$$

La implicación de esto se hace clara con un ejemplo. Supongamos los siguientes valores para estos parámetros: $\alpha = 0{,}35$; $\delta = 0{,}05$; $\eta = 0{,}2$. En tal caso, la ecuación (A.3) implica que el componente "autónomo" de la tasa de ahorro, γ (véase ecuación 3), que permite el cumplimiento de la regla de oro es de 19,2%. Si se pudiera suponer que para una sociedad es relativamente fácil alcanzar tal nivel para el componente autónomo de su tasa de ahorro, entonces se podría decir que para tal sociedad también es relativamente fácil alcanzar niveles de capital por trabajador que superen el determinado por la ecuación (A.2), es decir, entrar con relativa facilidad en la región denominada "de ineficiencia dinámica". En cambio, si describimos el crecimiento económico de la misma sociedad con el modelo de Solow, podría decirse que parecería más difícil para tal sociedad cumplir con la regla de oro (que su tasa de ahorro sea igual a α) y, entonces, poco probable que se adentrase en la región de ineficiencia dinámica.

Anexo 2. Un ejemplo de la relación entre tasas de descuento y ahorro, y montos de capital en el modelo CKR

Si suponemos valores convencionales para los parámetros de las ecuaciones (8) y (9) del texto principal, por ejemplo, $\alpha = 0{,}35$ y $\delta = 0{,}05$, y suponemos un cierto rango de variación para la tasa de descuento, por ejemplo, $\rho = [0{,}09 – 0{,}02]$, entonces podemos generar las series de capital y tasa de ahorro que resultarían de una reducción paulatina de la tasa de descuento. El gráfico A1 presenta el resultado de este ejercicio.

Gráfico A1. Capital (K) y tasa de ahorro (s) en el modelo CKR ante diferentes tasas de descuento



Si suponemos, a partir de este ejercicio, que la relación entre la tasa de ahorro y el monto del capital es la representada por la ecuación (3) del texto principal (la hipótesis de la tasa de ahorro del modelo “cuasi-Solow”), entonces es fácil deducir que $\gamma = 0{,}05$ y $\eta = 0{,}65$. Por tanto, la suma de los parámetros α y η es, en este ejemplo, igual a 1, así que el modelo “cuasi-Solow” prediría, en este caso, un crecimiento económico permanente, y el modelo CKR prediría que habría crecimiento económico (sin cambio técnico) siempre que la tasa de descuento se mantenga cayendo.