78 | 233
Primer semestre 2017
PP. 233-270, ISSN 0120-3584
E-ISSN 1900-7760

Implementación en la asignación de proyectos con las regalías en Colombia: una aproximación teórica

Implementation in the Allocation of Projects with the Royalties in Colombia: A Theoretical Approach

Daniel Blandón Restrepo[1]

DOI: 10.13043/DYS.78.6

Resumen

Este artículo estudia la implementación en la votación por mayoría que se realiza en los Órganos Colegiados de Administración y Decisión (OCAD) para elegir los proyectos a financiar con las regalías en Colombia. Los resultados muestran que la votación en los OCAD no es implementable, a menos que se incluyan ciertos supuestos sobre el tipo de preferencias de los gobernantes y el mecanismo de votación. La implementación se logra suponiendo que el gobierno central es siempre sincero en sus preferencias, que los gobiernos departamentales y municipales tienen preferencias unimodales (como en el caso en que prefieren los proyectos que se acercan más a su región) y que la primera etapa de la votación (que corresponde a la elección de los alcaldes que representan al gobierno municipal en los OCAD) se realice para votar por proyectos y no por alcaldes.

1 Magíster en Economía de la Universidad de los Andes. Correo electrónico: d.blandon65@uniandes.edu.co, Calle 87# 10 – 93, Bogotá, Colombia.

Este artículo fue recibido el 2 de marzo del 2015, revisado el 27 de abril del 2016 y finalmente aceptado el 6 de diciembre del 2016.

Palabras clave: regalías, OCAD, regla de mayoría, elección social, implementación (palabras clave del autor).

Clasificación JEL: D71, D72, D78, D82, H76.

Abstract

This paper studies the implementation of majority voting in OCADs (Collegiate Administration and Decision Bodies) to choose which projects will be financed with royalties in Colombia. The results show that votes made in OCADs are not implementable unless some assumptions about leaders' preferences and the voting mechanism are added. Implementation is achieved assuming that the central government is always honest about its preferences; that departmental and municipal governments have unimodal preferences (such as when leaders show preferences for projects based on the proximity of these to their own regions); and that the first stage of voting (which is when mayors who will represent their municipal governments in the OCADs are elected) is carried out to vote for projects and not for mayors.

Key words: Royalties, OCAD, majority rule, social choice, implementation (author´s key words).

JEL classification: D71, D72, D78, D82, H76.

Introducción

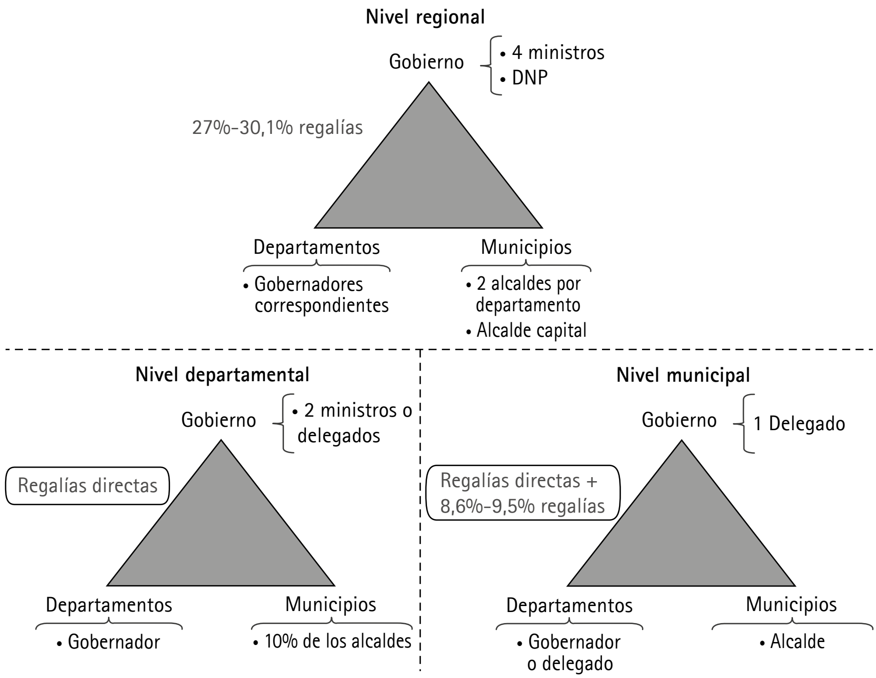
Las regalías son la compensación económica que se le paga a un país o territorio por la explotación de sus recursos naturales no renovables. En Colombia, los ingresos provenientes de las regalías se destinan a fondos de ahorro y a financiar proyectos de impacto nacional, regional, departamental o municipal. Una adecuada asignación de proyectos a financiar puede contribuir de manera importante al desarrollo económico y social del país; por tanto, es trascendental que se tengan los incentivos alineados para elegir aquellos proyectos que generen un mayor impacto positivo en la sociedad. Este artículo estudia en qué condiciones los Órganos Colegiados de Administración y Decisión (OCAD), el nuevo mecanismo de asignación de proyectos propuesto por el gobierno central con los recursos de las regalías, es implementable; es decir, con qué supuestos los agentes participantes pueden interactuar libremente y el resultado es lo deseado socialmente. Lo deseado socialmente es definido por el resultado que se busca del mecanismo, que en este caso es elegir los proyectos por mayoría, de acuerdo con las verdaderas preferencias de los votantes (gobierno central, gobiernos departamentales y gobiernos municipales).

Este nuevo mecanismo fue establecido en mayo del 2012, con la Ley 1530 que modificó el sistema de distribución de regalías. Según el gobierno central, los cambios se hicieron por la falta de transparencia, la poca visibilidad de proyectos de alto impacto y la inequidad entre territorios productores y no productores. Ahora el alcalde o gobernador no es quien elige los programas a ejecutar, sino que se conforman unos "triángulos de buen gobierno" que deciden por mayoría. Los triángulos de buen gobierno, formalmente llamados OCAD, están conformados por el gobierno central, los gobiernos departamentales y los gobiernos municipales. Cada nivel cuenta con un solo voto y se avalan las decisiones por mayoría.

Existen cuatro niveles diferentes de OCAD, según el destino de las regalías: tecnológico, regional, departamental y municipal. Aunque algunos de los resultados de este trabajo podrían ser aplicables a los OCAD tecnológicos, solo se estudian los otros tres, que involucran al gobierno central, el gobierno departamental y el gobierno municipal.

Los OCAD son constituidos en cada nivel por diferentes integrantes. En el ámbito regional (seis en total) está el gobierno nacional, representado por el ministro del Medio Ambiente, otros tres ministros y el director Nacional de Planeación; el gobierno departamental, por todos los gobernadores de la región; y el gobierno municipal, por dos alcaldes por departamento, a los que se suma el alcalde de la ciudad capital. En una etapa previa, los dos alcaldes son elegidos anualmente por mayoría entre todos los alcaldes de la región. En el departamental (cuarenta en total) está el gobierno central con dos ministros o sus delegados, el gobierno departamental con el respectivo gobernador y el gobierno municipal, representado por el 10% de los alcaldes del departamento. De igual manera, estos alcaldes son elegidos previamente por mayoría. Por último, en el municipal (mil cincuenta y dos en total) participan el gobierno central, con un delegado; el gobierno departamental, con su gobernador o un delegado, y el gobierno municipal, con el respectivo alcalde. En la figura 1 se presenta una explicación de los OCAD.

Figura 1. Explicación de los OCAD



Fuente: adaptado del SGR.

Anualmente, el gobierno central, por decreto, determina el presupuesto de cada uno de los OCAD e invita a la convocatoria para la elección de los alcaldes que representarán al gobierno municipal. Para esta convocatoria se reúnen todos los alcaldes de cada departamento y eligen por votación a los dos alcaldes que participarán en el OCAD regional y el correspondiente 10% de alcaldes que participarán en el OCAD departamental. Por el lado de los proyectos, en todo momento está abierta la convocatoria para que los dirigentes o ciudadanos presenten sus propuestas, la cual es revisada por un comité técnico. Si las propuestas cumplen con los requisitos estipulados, se informa y convoca el respectivo OCAD, que se deberá reunir, ya sea presencial o virtualmente, para la aprobación de estos proyectos de acuerdo con el presupuesto determinado. Al finalizar la reunión, se realiza un acta en la que se especifica el voto de cada uno de los tres agentes en cada uno de los proyectos. Si hay más de dos votos a favor implica su aprobación.

Este artículo analiza teóricamente algunas propiedades del mecanismo empleado para elegir los proyectos que se van a financiar con los recursos de las regalías, con el propósito de determinar en qué condiciones es implementable. La Ley 1530 establece que se debe elegir un proyecto con mayoría calificada; sin embargo, no hace referencia a los casos de más de dos proyectos donde no haya mayoría para determinar los proyectos que se deben priorizar de acuerdo con el presupuesto. Para esto fue necesario definir en el artículo un nuevo concepto que es la familia de reglas de mayoría, con el fin de abarcar todo el universo de reglas que cumplen mayoría simple, pero se diferencian en los casos de empate (no hay mayoría).

Los primeros resultados muestran que en los OCAD la regla de mayoría es manipulable y no es implementable en estrategias dominantes ni en equilibrios de Nash. Este resultado se sostiene incluso suponiendo que el gobierno central dice siempre la verdad. Sin embargo, utilizando la regla de Condorcet y restringiendo el dominio de preferencias de manera que siempre haya solución, la regla de mayoría en los OCAD es implementable en estrategias dominantes y equilibrios de Nash. Cuando se restringe el dominio de preferencias de los agentes a preferencias unimodales, como cuando se prefieren proyectos según la cercanía de un municipio o departamento, la regla de mayoría en los OCAD es implementable en estrategias dominantes y equilibrios de Nash. Si se agrega la elección previa de los alcaldes, se muestra que el mecanismo no es implementable en estrategias dominantes. Finalmente, se elimina el supuesto de preferencias unimodales para el gobierno central y se demuestra que el sistema de asignación de proyectos es implementable en estrategias dominantes y equilibrios de Nash, siempre y cuando el gobierno central no sea estratégico y todos los alcaldes correspondientes participen en la elección de proyectos.

Existen otros segmentos en el nuevo sistema de regalías que son importantes, pero no se incluyen: la presentación de proyectos, su viabilidad, la forma de ejecutarlos, el presupuesto y el impacto final en la sociedad. A partir de este trabajo no se puede concluir si la nueva ley de regalías tendrá un impacto positivo para el país, pues su objetivo es determinar qué propiedades, a nivel de incentivos, cumple la forma de elegir los proyectos a ejecutar. Para esto, es importante suponer que existen proyectos ya propuestos de cualquier tipo y que los miembros de los OCAD tienen algún perfil de preferencias sobre los proyectos. A partir de estas preferencias es que se pretende concluir si los OCAD presentan los incentivos adecuados para que los participantes voten de acuerdo con sus verdaderas preferencias y si es posible su implementación.

Este artículo pretende contribuir a la discusión sobre la conveniencia del mecanismo diseñado por el gobierno colombiano para la elección de proyectos con las regalías. De esa manera, ayudaría al gobierno a determinar si su intención con la creación de los OCAD es avalada desde la teoría y si podría ser empleada en otras iniciativas que necesiten elegir entre varias alternativas. Por otro lado, la definición creada de familia de reglas de mayoría puede ser utilizada en nuevos estudios donde exista la posibilidad de que no haya consensos y la manera de desempate sea desconocida. Por último, el análisis de votaciones de dos etapas, como se presenta en los OCAD, es poco estudiado por la literatura y las demostraciones de este artículo podrían contribuir a nuevas investigaciones y avances teóricos en el tema.

Este documento se organiza en seis secciones, además de esta introducción. La primera sección revisa la literatura sobre elección social y específicamente sobre implementación. Luego, en la segunda sección, se presenta el modelo teórico y, en la tercera, se analiza la votación en los OCAD. En la cuarta sección se supone que las preferencias de los agentes son unimodales. En la quinta se incluye en la votación la etapa previa de elección y, finalmente, en la última parte del documento se presentan las conclusiones.

I. Revisión de literatura

Este tipo de investigación entra en el área de elección social, que analiza las decisiones colectivas y busca unificar las preferencias individuales en una preferencia social (Gaertner, 2009). La unificación se logra por medio de reglas sociales como consenso, dictatorial, mayoría, entre otros, y el objetivo es elegir la alternativa que genere mayor beneficio social. Para el caso de la aprobación de proyectos con los recursos de regalías, el gobierno central propuso, como regla de elección social, la mayoría, entre el gobierno central y los gobiernos departamentales y municipales.

Arrow (1951) es el primer antecedente en materia de formalización de la teoría de elección social. Su resultado principal, el teorema de imposibilidad de Arrow, muestra el problema que existe para agregar las preferencias individuales en una preferencia social. Su resultado demuestra que no es posible formar un orden de preferencia social que sea compatible con propiedades básicas de preferencias individuales, a menos que sea un dictador quien elija, es decir, que la regla sea dictatorial[2]. El resultado del teorema de Gibbard (1973) y Satterthwaite (1975) incorpora el comportamiento estratégico de los agentes y concluye asimismo que la única regla no manipulable[3] es dictatorial.

Una de las ramas de la elección social es la teoría de implementación. Esta teoría se pregunta si es posible diseñar un mecanismo o institución de tal manera que los agentes interactúen libremente y el resultado de la interacción, sin importar las preferencias privadas, sea lo elegido por la regla social (Serrano, 2003). Una regla social es implementable en estrategias dominantes si y solo si es no manipulable (Maskin, Laffont y Hildebrand, 1982). Además, implementable en equilibrios de Nash si y solo si es monotónica[4] y cumple no veto[5] (Maskin, 1999). Es importante mencionar que, si una regla es implementable en estrategias dominantes, entonces es implementable en equilibrios de Nash.

Interpolando los resultados de Gibbard (1973) y Satterthwaite (1975), y Maskin *et al.* (1982), se concluye que la única regla implementable en estrategias dominantes es dictatorial. Una de las soluciones que ha encontrado la literatura para este resultado negativo es restringir el dominio de preferencias. En este aspecto, muchos autores han estudiado las preferencias unimodales, en donde se supone que las alternativas se ubican en un espacio lineal, hay un pico de satisfacción, y a medida que las alternativas se acerquen a dicho pico son más preferibles. Con preferencias unimodales, la alternativa de la mediana es la misma ganadora de la regla de Condorcet[6] (Black, 1948; Downs, 1957). Además, con preferencias unimodales, la única regla anónima[7], no dictatorial y no manipulable es elegir la alternativa de la mediana (Nehring y Puppe, 2002).

---

2 Una regla es dictatorial si el resultado está determinado por las preferencias de un solo agente.

3 Una regla es no manipulable si decir la verdad sobre sus preferencias es la mejor opción para los agentes.

4 Una transformación monotónica sobre una alternativa, es un cambio en las preferencias, de modo que ninguna alternativa que era menos preferida pase a ser más preferida. Una regla es monotónica si elige la misma alternativa ante transformaciones monotónicas en las preferencias.

5 Una regla cumple no veto si no existe un agente que pueda impedir que alguna alternativa sea elegida.

6 La regla de Condorcet es aquella que elige la alternativa que vence en mayoría simple al resto de alternativas.

7 Una regla es anónima si se permutan las preferencias entre agentes y la regla elige la misma alternativa.

II. Modelo

Hay 3 tipos de agentes $i \in N$: gobiernos municipales $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_{|M|}\}$, gobiernos departamentales $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_{|D|}\}$ y el gobierno central **g**. El conjunto de alternativas es $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{|A|}\}$, el cual corresponde a todos los proyectos presentados. Se denota $\{a, b, c\} \in A$ como proyectos representativos.

Cada agente $i \in N$ tiene una relación estricta, completa y transitiva P_i sobre A entonces aP_ib denota que a es preferida a b para el agente i. Se define el perfil de preferencias como $P \equiv (P_M, P_D, P_g)$ y $\wp \equiv (\wp_M, \wp_D, \wp_g)$ como el conjunto de todos los posibles perfiles de preferencias, por tanto $P \in \wp$[8].

Un "problema" es un perfil de preferencias P. Una "regla" $\varphi(P)$ es una función que asocia un problema (perfil de preferencias) a una alternativa: $\forall P \in \wp,\ \varphi(P) \in A$.

El "*ranking* de alternativas agregado" $Y_{\varphi(P)} \in \wp$ es un orden de preferencias sociales, el cual se obtiene de aplicar de forma iterativa la función $\varphi(P)$ eliminando la alternativa recién elegida del perfil de preferencias P[9]. Por ejemplo, se supone $\varphi(P) = a$, se elimina a de P que se denotara como $P^{-a} \in \wp^{-a}$ y se aplica nuevamente la función $\varphi(P^{-a})$ que se supone es $\varphi(P^{-a}) = b$. Se elimina b de P^{-a} y se sigue el procedimiento hasta que se terminen las alternativas. El resultado de dicho procedimiento llevará a un perfil de preferencia que se denota como $Y_{\varphi(P)} \in \wp$, en donde a es la alternativa más preferida, b la segunda y así sucesivamente. La expresión $a\,P^{\varphi}b$ denota que a es preferido a b en el *ranking* de alternativas agregadas con la regla $\varphi(P)$. Se supone que cada vez que se elimine una alternativa, la relación de preferencia entre alternativas no se modifica. El *ranking* va determinar las preferencias agregadas

8 Se supone que los agentes no son estratégicos con respecto al presupuesto disponible y se supone que el espacio de preferencias definido no incluye la relación de indiferencia. Los resultados del presente artículo podrían modificarse si se incluye la indiferencia entre alternativas por parte de los agentes.

9 Definir el *ranking* de alternativas agregado permite que se pueda elegir más de una alternativa, a pesar de que la regla sea una función y solo elige una. Esto representa lo que se hace en realidad, ya que en los OCAD es posible elegir más de un proyecto. Sin embargo, existen más formas de modelarlo. Es posible considerar las alternativas como subconjuntos de proyectos y de esa manera solo elegir una alternativa. En este caso, los resultados del artículo no cambian.

de todos los agentes y será entonces el orden con el cual se aprueban los proyectos de acuerdo con el presupuesto.

Ahora se define el sistema de votación que consta de dos etapas. La primera etapa es la elección de los alcaldes $M_{OCAD} \subseteq M$ que van a participar en los OCAD. Dependiendo del OCAD, el número de alcaldes participantes será limitado y, por tanto, estos deben ser elegidos previamente por los demás alcaldes involucrados[10].

La segunda etapa corresponde a la votación dentro de los OCAD o triángulos de buen gobierno[11]. El número de proyectos elegidos es variable, ya que dependerá de cuántos se propusieron y del presupuesto $\left\{P_{M_{OCAD}}, P_D, P_g\right\} \xrightarrow{Mayoría} \left\{A' \subseteq A\right\}$. Donde A' es el conjunto de proyectos elegidos.

En la primera parte del trabajo se analiza solamente la segunda etapa, es decir, la elección dentro de los OCAD, sin incluir la votación previa para elegir a los alcaldes. Posteriormente, se incluye la primera etapa. Las preferencias de D y M_{OCAD} se asumen como el agregado de los integrantes del conjunto. Inicialmente, se suponen las preferencias dadas y luego se recomendará cómo puede ser dicha "agregación" de preferencias en una sola para que se mantengan los resultados.

A. Propiedades

Se introducen algunas propiedades estándar de la literatura que son deseables para cualquier regla $\varphi(P)$.

Unanimidad: $\forall P \in \wp, Si\ \exists a \in A$ *tal que* $\left|\left\{i \in N \mid \forall b \neq a \in A, aP_ib\right\}\right| = |N|$, *entonces* $\varphi(P) = a$. Una regla es "unánime" cuando existe una alternativa que es preferida por todos los agentes y es elegida por la regla.

10 Según la Ley 1550 del 2012, "... serán elegidos democráticamente, mediante el sistema de cuociente electoral, para períodos anuales...". Para el ámbito regional se elegirán dos alcaldes por departamento y para el departamental el 10% de los alcaldes. Esto solo aplica para los OCAD regionales y departamentales.

11 Según la Ley 1550 del 2012, "Cada nivel de gobierno [...] tendrá derecho a un (1) voto, para un total de tres (3) votos. Las decisiones se adoptarán por mayoría calificada de dos (2) votos...".

No veto: $\forall P \in \wp, Si\ \exists a \in A\ tal\ que\ \left|\left\{i \in N \mid \forall b \neq a \in A, aP_i b\right\}\right| = |N| - 1$, *entonces* $\varphi(P) = a$. Una regla cumple "no veto" cuando existe una alternativa que es preferida por todos los agentes menos uno, el cual no está en la capacidad de impedir que dicha alternativa sea elegida. En el contexto de los OCAD, esta propiedad mostraría que las decisiones no son centralizadas, ya que el gobierno central no está en la capacidad de vetar alguna alternativa.

No dictatorial: $si\ \nexists i \in N\ tal\ que\ \forall P \in \wp\ si\ \forall b \neq a \in A, aP_i b\ \ entonces$ $\varphi(P) = a$. Una regla es "no dictatorial" si no existe un agente que determine la alternativa elegida por la regla sin importar las preferencias de los demás.

Transformación monotónica P'_i **de** P_i **sobre** a**:** $si\ \forall a, b \in A, aP_i b\ \ entonces$ $aP'_i b$. Una "transformación monotónica sobre una alternativa *a*" es un cambio en las preferencias, de manera que ninguna alternativa que era menos preferida a *a* pase a ser más preferida.

Monotonicidad: $\forall P \in \wp\ si\ \forall i\ P'_i \in \wp$ *es una transformación monotónica de* P_i *sobre* $a = \varphi(P)$ *entonces* $\varphi(P') = a$. Una regla es "monotónica" si ante una "transformación monotónica" de la alternativa elegida, la regla sigue eligiendo la misma alternativa.

Sobreyectividad: $\forall a \in A, \exists P \in \varphi\ tal\ que\ \varphi(P) = a$**.** Una regla es "sobreyectiva" si es posible que se elija cualquier alternativa. Es decir, para cada alternativa posible existe un perfil de preferencias tal que la regla elige dicha alternativa.

No manipulación: $\forall P \in \wp, \nexists i \in N\ y\ \nexists P'_i \in \wp_i\ \ tal\ que\ \varphi(P_i, P_{-i}) P_i \varphi(P'_i P_{-i})$ ó $\varphi(P_i, P_{-i}) = \varphi(P'_i, P_{-i})$. Una regla es "no manipulable" si para cada agente es mejor reportar sus verdaderas preferencias. Es decir, no se beneficia de mentir.

Se tiene establecida una regla que para cada perfil de preferencias *P* tiene una solución. Sin embargo, el planeador no conoce las verdaderas preferencias individuales y, por tanto, él debe diseñar un mecanismo, de manera que interactúen los agentes y los resultados en equilibrios de Nash (o estrategias dominantes) sean los mismos de la regla social. Cuando existe dicho mecanismo se dice que "la regla es implementable". Es posible que una regla se implemente a sí misma.

La teoría de implementación se divide según los equilibrios de los juegos o mecanismos que implementan las reglas sociales. Estos pueden ser equilibrios en estrategias dominantes o equilibrios de Nash.

Para todo $i \in N$ se define lo que reportan los agentes como $S_i \in \wp_i$. Dados los espacios de estrategias $E \equiv \left(E_M, E_D, E_g\right)$ en donde $E \in \wp$, se define el juego $T\left(N, (E_i)_{i \in N}, f, (P_i)_{i \in N}\right)$, donde f es una función que asocia una estrategia (un perfil de preferencias) a una alternativa $\forall E, f\left(E\right) \in A$ Por tanto, $f\left(E\right)$ es el resultado del juego, el cual pertenece al conjunto de alternativas A.

$\Gamma(f)$ Implementa la regla social φ en estrategias dominantes, si y solo si $\forall P \in \wp$ y $\forall a = \varphi\left(P\right), \exists E \in \wp$ *tal que* $f\left(E\right) = a$ y $\forall i \in N$ y $\forall E'_i \in \wp_i f\left(E\right)$ $P_i f\left(E'\right)$.

Se dice que una regla es "implementable en estrategias dominantes", si existe un juego $\Gamma(f)$ tal que la alternativa resultado de dicho juego en estrategias dominantes es la misma elegida por la regla.

$\Gamma(f)$ Implementa la regla social φ en equilibrios de Nash, si y solo si $\forall P \in \wp$ y $\forall a = \varphi\left(P\right), \exists E \in \wp$ *tal que* $f\left(E\right) = a$ y $\forall i \in N$ y $\forall E'_i \in \wp_i f\left(E\right)$ $P_i f\left(E'_i, E_{-i}\right)$.

Se dice que una regla es "implementable en equilibrios Nash", si existe un juego $\Gamma(f)$ tal que la alternativa resultado de dicho juego en equilibrios de Nash es la misma elegida por la regla.

La implementación en estrategias dominantes es una condición más estricta que en equilibrios de Nash. Es decir, si una regla es implementable en estrategias dominantes, entonces es implementable en equilibrios de Nash. Asimismo, si una regla no es implementable en equilibrios de Nash, entonces no lo es en estrategias dominantes. Se define que una regla es implementable si es implementable en estrategias dominantes o en equilibrios de Nash.

1. Teorema de Gibbard (1973) y Satterthwaite (1975)

Si $|A| \geq 3$ y φ es sobreyectiva y no hay restricción en el dominio sobre el perfil de preferencias, entonces φ es no manipulable si solo si φ es dictatorial.

La única manera de que una regla sea no manipulable es que sea dictatorial.

Proposición 1 (Maskin *et al.*, 1982):

Si φ es sobreyectiva entonces φ es implementable en estrategias dominantes si solo si φ es no manipulable.

Proposición 2 (Maskin, 1999):

Si φ es implementable en equilibrios de Nash entonces φ es monotónica.

Proposición 3 (Maskin, 1999):

Si $|A| \geq 3$ y φ es montónica y satisface no veto entonces φ es implementable en equilibrios de Nash.

Algunos resultados de Maskin *et al.* (1982) y Maskin (1999) permiten relacionar implementabilidad, no manipulación, monotonicidad y no veto. Una regla no manipulable es implementable en estrategias dominantes, y una que cumpla no veto y monotonicidad es implementable en equilibrios de Nash. Estos resultados serán usados en todo el documento para concluir sobre la implementabilidad de los triángulos de buen gobierno.

III. La familia de reglas de mayoría

La nueva ley de regalías expresa que la forma como se van a elegir los proyectos a financiar con los recursos provenientes de las regalías es mediante mayoría calificada. Esta dice que se aprueba un proyecto con mínimo dos de los tres votos. Existen muchas reglas sociales que se pueden considerar mayoría calificada, y se diferencian en la alternativa que se elige cuando no hay un conjunto de proyectos con mayoría (casos de empate). Estas reglas se denominarán como la familia de reglas de mayoría, el cual es un concepto nuevo usado para el desarrollo del artículo que unifica todas las reglas que cumplen mayoría simple.

Se define la familia de reglas de mayoría $M^{\theta}(P)$ de la siguiente manera:

Se tiene que $|N| = 3$ y $M^{\theta}(P) = \begin{cases} a & si\ \forall b \neq a \in A, |\{\hat{\imath} \in N | aP_i b\}| \geq 2, \\ \theta(P) & De\ lo\ contrario. \end{cases}$

$M^{\theta}(P)$ es por tanto todo un grupo de reglas que cuando por los menos 2 agentes prefieren la misma alternativa sobre todas las demás esa es la elegida. Cada regla está asociada a una función $\theta(P)$ de desempate que determina la diferencia entre cada regla social. Se supone además que $\theta(P) \in A$ y $\theta(P) \neq \varnothing$.

Corolario 1: $\forall P \in \wp, M^{\theta}(P)$ es manipulable y no implementable en estrategias dominantes.

Se tiene que es $M^{\theta}(P)$ sobreyectiva y no dictatorial (véanse las demostraciones A1.1 y A1.2 en el anexo 1). Utilizando el teorema de Gibbard-Satterthwaite se concluye que $M^{\theta}(P)$ es manipulable para $|A| \geq 3$ y, dado que el modelo es para cualquier número de alternativas, se concluye que cualquier regla de la familia de mayoría $M^{\theta}(P)$ es manipulable. Utilizando la proposición 1 y la misma racionalidad anterior, $M^{\theta}(P)$ no puede ser implementable en estrategias dominantes, completando así la demostración.

Proposición 4: $\forall P \in \wp, M^{\theta}(P)$ **no es monotónica.**

Demostración: se supone que $M^{\theta}(P)$ es monotónica, hay 3 alternativas y es lo siguiente:

$P_{M_{OCAD}}$	P_D	P_g
a_1	a_2	a_3
a_2	a_3	a_1
a_3	a_1	a_2

Según la definición de M^{θ}, la solución de la regla del perfil anterior debe ser $\theta(P)$ que puede ser cualquiera de las 3 alternativas.

Se suponen ahora estos perfiles de preferencia:

$P'_{M_{OCAD}}$	P'_D	P'_g	$P''_{M_{OCAD}}$	P''_D	P''_g	$P'''_{M_{OCAD}}$	P'''_D	P'''_g
$\mathbf{a_1}$	a_3	a_3	a_1	$\mathbf{a_2}$	a_1	a_2	a_2	$\mathbf{a_3}$
a_2	a_2	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	a_3	a_3	a_1	$\mathbf{a_3}$	a_1
a_3	$\mathbf{a_1}$	a_2	a_3	a_1	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	a_1	a_2

En donde P' es una transformación monotónica de P sobre a_1, P'' es una transformación monotónica de P sobre a_2 y P''' es una transformación monotónica de P sobre a_3.

Se tiene por definición de $M^{\theta}(P)$:

$$M^{\theta}(P') = a_3 \qquad M^{\theta}(P'') = a_1 \qquad M^{\theta}(P''') = a_2$$

Ahora se miran los 3 casos posibles sobre $\theta(P)$:

Caso 1: $M^{\theta}(P) = \theta(P) = a_1$

Como M^{θ} es monotónica y P' es una transformación monotónica de P sobre a_1 se debería tener que $M^{\theta}(P') = a_1$. Sin embargo, por la definición de M^{θ} se tiene que $M^{\theta}(P') = a_3$. Así, M^{θ} no es monotónica si $\theta(P) = a_1$.

Caso 2: $M^{\theta}(P) = \theta(P) = a_2$

Como M^{θ} es monotónica y P'' es una transformación monotónica de P sobre a_2 se debería tener que $M^{\theta}(P'') = a_2$. Sin embargo, por la definición de M^{θ} se tiene que $M^{\theta}(P'') = a_1$. Así, M^{θ} no es monotónica si $\theta(P) = a_2$.

Caso 3: $M^{\theta}(P) = \theta(P) = a_3$

Como M^{θ} es monotónica y P''' es una transformación monotónica de P sobre a_3 se debería tener que $M^{\theta}(P''') = a_3$. Sin embargo, por la definición de M^{θ} se tiene que $M^{\theta}(P''') = a_2$. Así, M^{θ} no es monotónica si $\theta(P) = a_3$.

Los 3 casos muestran todas las posibilidades de solución de $M^{\theta}(P)$ y en todos ellos se demostró que no se cumple monotonicidad. Por tanto, una regla de la familia de mayoría no es monotónica cuando cualquier perfil de preferencias es admisible para los agentes.

Nota: la demostración se puede extender a más de 3 alternativas. Se sigue la misma racionalidad y se ponen las alternativas adicionales como menos preferidas de las 3 primeras para todos los agentes tanto en P, P', P'' y P''':

$P_{M_{OCAD}}$	P_D	P_g
a_1	a_2	a_3
a_2	a_3	a_1
a_3	a_1	a_2
a_4	a_4	a_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La demostración se hace de la misma manera y para los casos $M^{\theta}(P) = \theta(P) = a_b$ *con* $b > 3$, es claro que no es monotónica, ya que para cualquier perfil P', P''y P''', se cumple la propiedad necesaria de monotonicidad, pero la familia de reglas elige otra alternativa diferente. ■

De acuerdo con la proposición 4, una regla de la familia de mayoría y sin restricción en el dominio de preferencias no es monotónica. Por otro lado, la proposición 2 dice que, si una regla es implementable en estrategias de Nash, entonces es monotónica. Es decir, no puede pasar que sea implementable y no monotónica. Por tanto, como corolario, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2. $\forall P \in \wp, M^{\theta}(P)$ no es implementable en equilibrios de Nash.

El primer resultado muestra que cualquier regla social de la familia de mayoría, cuando cualquier perfil de preferencias es posible, no es implementable en estrategias dominantes ni en equilibrios de Nash. Además, es manipulable (existen incentivos a mentir), no es monotónica, no es dictatorial y cumple propiedad de no veto (véase la demostración A1.3 en el anexo 1).

A. Cuando el gobierno central no es estratégico (dice siempre la verdad sobre sus preferencias)

El siguiente paso es hacer modificaciones a los supuestos planteados y, de esa manera, encontrar cuáles serían suficientes para que la votación dentro de los OCAD sea implementable. El primer cambio que se hace es eliminar el supuesto de que el gobierno central es estratégico. Es decir, el gobierno central siempre va a reportar sus verdaderas preferencias y esto lo saben los demás agentes[12].

12 Que el gobierno central siempre dice la verdad y no es estratégico significa que no existen transformaciones monotónicas sobre sus preferencias.

Este es un supuesto que se debería cumplir por parte de un gobierno central, pero muchas veces existen intereses que hacen que el mismo gobierno central sea estratégico. El motivo de estudiar este supuesto es determinar si el gobierno central tendría la capacidad de hacer los OCAD implementables con el hecho de reportar siempre sus verdaderas preferencias. Esto sería en principio un supuesto esperado, dado que el gobierno central es el planeador de los OCAD y de otro modo hubiera sido preferible elegir un mecanismo dictatorial.

Proposición 5: $\forall P \in \wp$ sin transformaciones monotónicas sobre las preferencias del gobierno central, $M^{\theta}(P)$ es no monotónica.

Demostración: se supone que $M^{\theta}(P)$ es monotónica y sin transformaciones monotónicas sobre las preferencias del gobierno central, hay 3 alternativas y P es el siguiente:

$P_{M_{OCAD}}$	P_D	P_g
a_1	a_2	a_3
a_2	a_3	a_1
a_3	a_1	a_2

Según la definición de M^{θ}, la solución de la regla del perfil anterior debe ser $\theta(P)$, que puede ser cualquiera de las 3 alternativas. Ahora, se suponen los siguientes perfiles de preferencias:

$P'_{M_{OCAD}}$	P'_D	P'_g	$P''_{M_{OCAD}}$	P''_D	P''_g
a_2	a_2	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_1}$	a_3	a_3
a_1	$\boldsymbol{a_3}$	a_1	a_2	a_2	$\boldsymbol{a_1}$
$\boldsymbol{a_3}$	a_1	a_2	a_3	$\boldsymbol{a_1}$	a_2

En donde P' es una transformación monotónica de P sobre a_3 y P'' es una transformación monotónica de P sobre a_1.

Se tiene por definición de M^{θ}:

$$M^{\theta}(P') = a_2 \quad M^{\theta}(P'') = a_3$$

Se supone $M^{\theta} = \theta(P) = a_3$. Como P' es una transformación monotónica de P sobre a_3, se debería tener que $M^{\theta}(P') = a_3$. Sin embargo, por definición de M^{θ} se tiene que $M^{\theta}(P') = a_2$. Entonces, hay una contradicción y $\theta(P) \neq a_3$.

Se supone ahora $M^{\theta} = \theta(P) = a_1$. Como P'' es una transformación monotónica de P sobre a_1, se debería tener que $M^{\theta}(P'') = a_1$. Sin embargo, por definición de M^{θ} se tiene que $M^{\theta}(P') = a_3$. Entonces, hay una contradicción y $\theta(P) \neq a_1$.

Por tanto, la regla debe elegir a a_2 ya que es la única que no genera una contradicción $M^{\theta}(P) = a_2$.

Como la regla es monotónica, la solución al siguiente perfil de preferencias debe ser a_2 ya que P''' es una transformación monotónica de P sobre a_2.

$P'''_{M_{OCAD}}$	P'''_{D}	P'''_{g}
a_1	$\mathbf{a_2}$	a_3
$\mathbf{a_2}$	a_1	a_1
a_3	a_3	$\mathbf{a_2}$

$M^{\theta}(P''') = a_2$.

Ahora, se supone el siguiente perfil de preferencias $\hat{P}$

$\hat{P}_{M_{OCAD}}$	$\hat{P}_{D}$	$\hat{P}_{g}$
a_1	a_2	a_3
a_3	a_1	a_1
a_2	a_3	a_2

Según la definición de M^{θ}, la solución de la regla del perfil anterior debe ser $\theta(\hat{P})$ que puede ser cualquiera de las 3 alternativas. Ahora, se suponen los siguientes perfiles de preferencias:

$\hat{P}'_{M_{OCAD}}$	$\hat{P}'_{D}$	$\hat{P}'_{g}$	$\hat{P}''_{M_{OCAD}}$	$\hat{P}''_{D}$	$\hat{P}''_{g}$
a_1	a_2	$\mathbf{a_3}$	a_3	$\mathbf{a_2}$	a_3
$\mathbf{a_3}$	a_1	a_1	a_1	a_3	a_1
a_2	$\mathbf{a_3}$	a_2	$\mathbf{a_2}$	a_1	$\mathbf{a_2}$

En donde $\hat{P}'$ es una transformación monotónica de $\hat{P}$ sobre a_3 y $\hat{P}''$ es una transformación monotónica de $\hat{P}$ sobre a_2.

Se tiene por definición de $M^{\theta}\left(\hat{P}\right)$:

$$M^{\theta}\left(\hat{P}'\right)=a_1 \qquad M^{\theta}\left(\hat{P}''\right)=a_3$$

Se supone $M^{\theta}=\theta\left(\hat{P}\right)=a_3$. Como $\hat{P}'$ es una transformación monotónica de $\hat{P}$ sobre a_3, se debería tener que $M^{\theta}\left(\hat{P}'\right)=a_3$. Sin embargo, por definición de M^{θ} se tiene que $M^{\theta}\left(\hat{P}'\right)=a_1$. Entonces, hay una contradicción y $\theta\left(\hat{P}\right)\neq a_3$.

Se supone $M^{\theta}=\theta\left(\hat{P}\right)=a_2$. Como $\hat{P}''$ es una transformación monotónica de $\hat{P}$ sobre a_2, se debería tener que $M^{\theta}\left(\hat{P}''\right)=a_2$. Sin embargo, por definición de M^{θ} se tiene que $M^{\theta}\left(\hat{P}''\right)=a_3$. Entonces, hay una contradicción y $\theta\left(\hat{P}\right)\neq a_2$.

Por tanto, la regla debe elegir a a_1 ya que es la única que no genera una contradicción $M^{\theta}\left(\hat{P}\right)=a_1$.

Como la regla es monotónica, la solución al siguiente perfil de preferencias debe ser a_1 ya que $\hat{P}'''$ es una transformación monotónica de P sobre a_1.

$\hat{P}'''_{M_{OCAD}}$	$\hat{P}'''_{D}$	$\hat{P}'''_{g}$
$\boldsymbol{a_1}$	a_2	a_3
a_2	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_1}$
a_3	a_3	a_2

$M^{\theta}\left(\hat{P}'''\right)=a_1$.

Sin embargo $\hat{P}'''=P'''$ por tanto $M^{\theta}\left(\hat{P}'''\right)=M^{\theta}\left(P'''\right)$ pero $M^{\theta}\left(\hat{P}'''\right)=a_2$ y $M^{\theta}\left(P'''\right)=a_1$.

Por tanto, hay una contradicción y $M^{\theta}\left(P\right)$ no es monotónica, inclusive sin transformaciones monotónicas sobre las preferencias del gobierno central (es decir, el gobierno central siempre dice la verdad)[13]. ■

13 Con la misma racionalidad de la nota de la demostración de la proposición 4, la demostración anterior es aplicable a más de 3 alternativas.

Nuevamente, los resultados son negativos, incluso cuando el gobierno central siempre dice la verdad. Por tanto, como corolario, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3: $\forall P \in \wp$, sin transformaciones monotónicas sobre las preferencias del gobierno central (gobierno central dice siempre la verdad), $M^{\theta}\left(P\right)$ es manipulable (sigue cumpliendo corolario 1) y no es implementable en estrategias dominantes ni en equilibrios de Nash (no es monotónica y por la proposición 2).

Analizando las demostraciones anteriores, los perfiles de preferencia que generan problemas se dan cuando no existe un consenso sobre las alternativas entre por lo menos 2 agentes. Por tanto, una posible solución a los resultados negativos anteriores podría ser la de "restringir el dominio de preferencias", en donde los perfiles de preferencias posibles sean un subconjunto de $\wp$.

A. La regla de Condorcet

A partir de las demostraciones anteriores, se observa que los perfiles de preferencias que generan los contraejemplos son similares a lo que se conoce en la literatura como la *paradoja de Condorcet*. Por eso, el siguiente paso a analizar es la regla social de Condorcet, en la cual se debe observar si pertenece a la familia de reglas de mayoría definida, y si eso es cierto, qué pasa si se eliminan del dominio de preferencias aquellos perfiles de preferencias que caen en la paradoja de Condorcet. Esto es relevante para determinar qué otros posibles supuestos son suficientes para que el OCAD sea implementable, que son las secciones que se estudian más adelante.

La "regla de Condorcet" dice que una alternativa es elegida si se compara con todas las alternativas y el número de agentes que la prefiere es mayor al número de agentes que no.

$a = \varphi^{C}\left(P\right)$ *si* $\forall b \neq a \in A : \left|\left\{i \in N \middle| aP_i b\right\}\right| \geq \left|\left\{i \in N \middle| bP_i a\right\}\right|$. Se habla de "paradoja de Condorcet" cuando $\varphi^{C}\left(P\right) = \varnothing$.

Debido a que la regla de Condorcet forma parte de la familia de reglas de mayoría (véase la demostración en el anexo 2 A2.1), cumple con los corolarios 1, 2 y 3.

Por tanto, se denominará $M^{c}(P)$ la regla de Condorcet adecuada al modelo, es decir, con $N = 3$. Así, el resultado es el siguiente corolario:

Corolario 4: $\forall P \in \wp, M^{c}(P)$ es manipulable, cumple no veto, no es monotónica y no es implementable inclusive si el gobierno central siempre dice la verdad.

Dado el resultado anterior, se quiere entonces restringir el dominio de preferencias para los casos donde siempre haya solución. El "perfil de preferencias restringido o el dominio de preferencias de Condorcet" $\wp^{c} \subseteq \wp$ es el subconjunto de perfiles de preferencia tal que $\forall P \in \wp^{c}, \varphi^{c}(P) \neq \varnothing$.

Se tiene, entonces, que la regla de Condorcet cumple no veto y que cuando se les restringe el dominio a los perfiles de preferencias que tienen solución es monotónica (Taylor y Pacelli, 2008). Utilizando el resultado de Maskin (Proposición 3), resulta el siguiente corolario:

Corolario 5: $\forall P \in \wp^{c}, M^{c}(P)$ es implementable en equilibrios de Nash.

Este resultado sugiere que, con el fin de que los OCAD sean implementables, se deben modificar supuestos que restrinjan el dominio de preferencias de manera que haya el equivalente a una solución de Condorcet, y esto es lo que se busca en la siguiente sección del artículo.

IV. El dominio de preferencias unimodales

El resultado anterior es positivo, pero abre la pregunta sobre cómo restringir el dominio de preferencias. En general, en la literatura, se supone que las preferencias son unimodales. Las preferencias unimodales asumen que existe un orden lineal (o espacial) de las alternativas, y que para cada agente existe una alternativa que representa el pico de satisfacción, y que la satisfacción aumenta a medida que se acerca ese pico.

Se supone, entonces, que las preferencias sobre los proyectos para cada uno de los dirigentes son unimodales y que el orden lineal con el cual se determinan las preferencias de los agentes puede ser parte de cualquier espacio lineal, como el impacto del proyecto, su ubicación, el tiempo que toma, el costo, la rentabilidad, espectro político del proponente del proyecto, entre otros.

Con fines motivacionales, tendría sentido hablar de preferencia según la ubicación geográfica, ya que cada gobernante prefiere más los proyectos a medida que se acercan a su territorio. Este supuesto tiene sentido, ya que el proyecto más preferido es el de su propio territorio y a medida que se aleja la ubicación del proyecto, menos impacto tiene para la zona que gobierna el político, por lo que debería ser menos preferido. En cuanto al gobierno central, este supuesto no es defendible y se eliminará más adelante en el artículo[14].

La relación de preferencia $P \equiv \left(P_{M_{OCAD}}, P_D, P_g\right)$ es unimodal con respecto al orden lineal $\geq$ en *A*, si existe una alternativa $a_i^s \in A$ (la alternativa pico del agente i) con la propiedad que P_i está creciendo con respecto a $\geq$ en $\left\{b \in A : a_i^s \geq b\right\}$ y decreciendo con respecto a $\geq$ en $\left\{b \in A : b \geq a_i^s\right\}$. Esto es, *si* $a_i^s \geq c > b$ *entonces* $c\ P_i\ b$ y *si* $b > c \geq a_i^s$ *entonces* $c\ P_i\ b$. El conjunto de los perfiles de preferencias unimodales se denominará $\wp^S \subseteq \wp$.

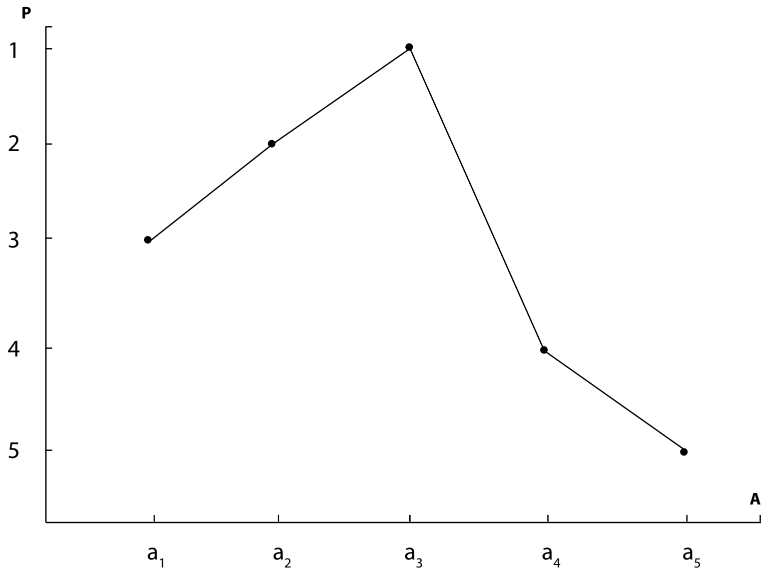
En la figura 2 se observa un ejemplo de preferencias unimodales en donde hay 5 proyectos. El municipio del alcalde está cerca (o es del municipio) del proyecto 3 $\left(a_i^s = a_3\right)$ y entre más cerca una alternativa esté de a_3 es más preferida[15].

En este caso las preferencias son de la siguiente manera: $a_3\ P_i\ a_2\ P_i\ a_1\ P_i\ a_4\ P_i\ a_5$. En el eje vertical se representan las preferencias, como si se tratara de un *ranking*. Es importante aclarar que el eje horizontal no mide la distancia entre proyectos, si no el orden en el que se encuentran. Por tanto, es posible que el proyecto 4 sea menos preferido que el 1. Lo que si no es posible es que el 5 sea preferido al 4, o el 1 preferido al 2.

14 Es importante aclarar que las preferencias basadas en la ubicación geográfica es un subconjunto de todas las posibles preferencias unimodales. Los resultados que se presentan en este documento cumplen para cualquier tipo de preferencias unimodales; sin embargo, se utiliza la ubicación geográfica como un ejemplo defendible del supuesto.

15 Para esta sección, los resultados no se pueden extender a alternativas que representan subconjuntos de proyectos. La razón es que los subconjuntos de proyectos no se pueden expresar en un orden lineal.

Figura 2. Preferencias unimodales



Fuente: elaboración propia.

A. La regla de mayoría en el dominio de preferencias unimodales

Se define a_k^s como la "alternativa pico del agente" $k \in N$ como su alternativa más preferida, y el agente $k \in N$ será el "agente mediano" con el perfil si $P\ si\left|\left\{i \in N \middle| a_k^s \geq a_k^s\right\}\right| \geq \frac{|N|}{2}$ y $\left|\left\{i \in N \middle| a_k^s P_i a_k^s\right\}\right| \geq \frac{|N|}{2}$ (Mas-Collel, Whinston y Green, 1995).

Con preferencias unimodales, la alternativa favorita del agente mediano vence uno a uno a cualquier otra alternativa en una votación de mayoría (Easley y Kleinberg, 2010). Esto quiere decir que, si se compara la alternativa pico del agente mediano con cualquier otra alternativa, el número de agentes que van a preferir la primera es mayor a los que prefieren la otra alternativa. Esto es consistente con la definición de familia de reglas de mayoría.

Por tanto, la "regla de mayoría en el dominio de preferencias unimodales" $M^s(P)$ elige la alternativa pico del agente mediano $\forall P \in \wp^S \subseteq \wp, M^S(P) = a_k^s$ en donde k es el agente mediano. Esto es conocido como el "teorema de la mediana".

Black (1948) y Downs (1957) muestran que con preferencias unimodales, la paradoja de Condorcet no ocurre, y que el resultado del teorema de la mediana es el mismo ganador de Condorcet. Esto es equivalente a decir que con preferencias unimodales se restringe el dominio de preferencias, de tal modo que siempre hay solución de Condorcet. Siguiendo el corolario 5, se entiende que:

Corolario 6: $\forall P \in \wp^S, M^C(P)$ cumple monotonicidad y es implementable en equilibrios de Nash.

De acuerdo con lo anterior, una definición equivalente del teorema de la mediana con preferencias unimodales es la regla de Condorcet $\forall P \in \wp^S \subseteq \wp, a = M^S(P)$ *si y solo si* $\forall b \neq a \in A : \left|\left\{i \in N \middle| aP_ib\right\}\right| \geq \left|\left\{i \in N \middle| bP_ia\right\}\right|$. Por tanto, dado que Condorcet pertenece a la familia de reglas de mayoría (anexo 2, proposición A2.1), implica que la regla de mayoría en el dominio de preferencias unimodales también pertenece a la familia de reglas de mayoría.

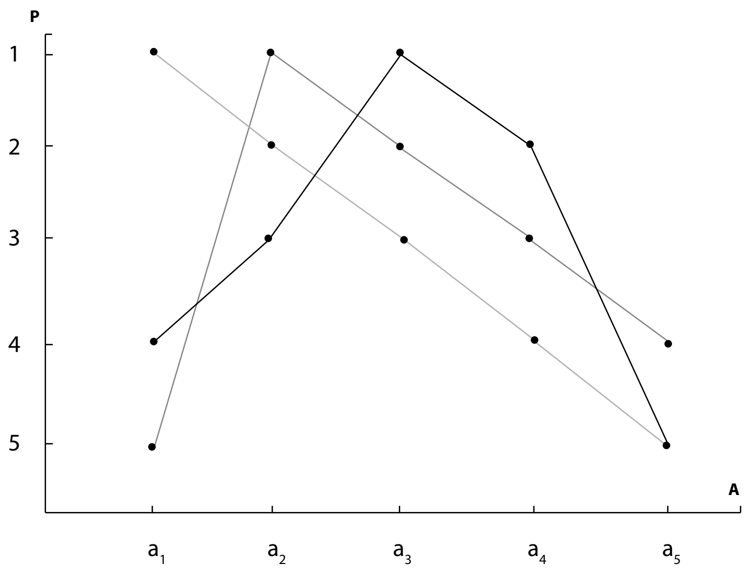
Siguiendo el ejemplo anterior y suponiendo que existen 3 agentes, 5 alternativas y las siguientes preferencias unimodales, se tiene que el agente mediano es el que tiene como pico el proyecto 2. Para completar el *ranking* resultado, se elimina la alternativa del agente mediano y se repite el procedimiento con las restantes. Y así, iterativamente, hasta que no queden más alternativas.

Iterando la regla de mayoría definida, el *ranking* resultado $Y_{M^S(P)}$ para el ejemplo es $a_2P^M\ a_3P^M\ a_4P^M\ a_1P^M\ a_5$.

Según Nehring y Puppe (2006), si las preferencias son unimodales, entonces la única regla que es neutral, anónima, no dictatorial y no manipulable es seleccionar la alternativa favorita del agente mediano. Siguiendo entonces la proposición 1 de Maskin (1982), se tiene el siguiente corolario:

Corolario 7: $\forall P \in \wp^S, M^S(P)$ es implementable en estrategias dominantes.

Figura 3. Preferencias unimodales para tres agentes



Fuente: elaboración propia.

Proposición 6: $\forall P \in \wp^S$, la iteración de aplicar $M^S(P)$ es no manipulable.

Demostración: se va a demostrar que si pasa que $a\ P_i\ b\ y\ M^S(P_i, P_{-i})$ y implica $b\ P^M\ a$, (donde P^M representa el orden de preferencias del *ranking* resultado de aplicar la regla de mayoría) entonces no existe $P' = \{P'_i, P_{-i}\}$ tal que $M^s(P'_i, P_{-i})$ implique $a\ P^{M'}\ b$. De esa manera, no existe un orden de preferencias que mejore la situación del agente i (si puede pasar que lo empeore) y, por tanto, no existen incentivos a mentir, es decir, es no manipulable. En ese caso se cumpliría no manipulación, ya que, sabiendo que no podría pasar que $M^S(P'_i, P_{-i}) P_i M^S(P_i, P_{-i})$ se cumple la definición de no manipulación.

Según lo anterior, se tiene que la regla de mayoría con preferencias unimodales es equivalente a la regla de Condorcet y además siempre existe solución. Se supone que $\exists i\ tal\ que\ a\ P_i\ b\ y\ M^S(P_i, P_{-i})$ implica $b\ P^M\ a$. De acuerdo con la definición de la regla de Condorcet, como se eligió primero b que a, quiere decir que $\left|\{j \in N | bP_j a\}\right| \geq \left|\{j \in N | aP_j b\}\right|$. Así cambie de preferencias, no podrá alterar el signo de la desigualdad, ya que no puede aumentar el lado derecho de la desigualdad porque el agente forma parte de esos agentes. Esto implica que no existe $P' = \{P'_i, P_{-i}\}$ tal que $\left|\{j \in N \mid aP'_j b\}\right| \geq \left|\{j \in N \mid bP'_j a\}\right|$ y por tanto, no puede pasar por la definición de la regla de Condorcet que $M^S(P'_i, P_{-i})$ implique $a\ P^{M'}\ b$. En otras palabras, se demostró que no hay ningún perfil de preferencias que genere un cambio positivo en cualquier agente y la regla es entonces no manipulable. ■

Utilizando las proposiciones 1 y 6 se llega al siguiente corolario:

Corolario 8: $\forall P \in \wp^S$, la iteración de aplicar $M^S(P)$ para obtener el *ranking* de proyectos $Y_{M^S(P)}$ en los OCAD es implementable en estrategias dominantes. Esto quiere decir que la regla de mayoría que elige la alternativa de la mediana iterativamente con preferencias unimodales es implementable en estrategias dominantes.

V. Votaciones de dos etapas

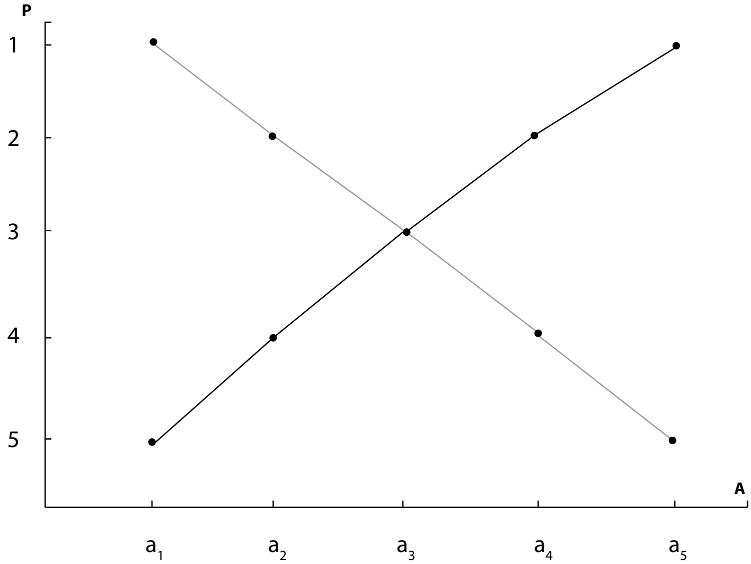
Ya teniendo un resultado positivo que muestra que la regla de mayoría dentro de los OCAD es implementable en estrategias dominantes y equilibrios de Nash cuando las preferencias son unimodales, se quiere mirar qué pasa cuando se incluye la elección de los alcaldes. Es importante recordar que en los OCAD regionales y departamentales, los alcaldes presentes fueron previamente elegidos por mayoría. A esa elección se le conoce como primera etapa, al OCAD como la segunda etapa y al mecanismo completo se denominará votación de 2 etapas. La segunda etapa mantendrá la modelación de la sección anterior, donde la regla de mayoría está dada por la alternativa del agente mediano.

Para fines de este artículo, se supone que los proyectos son conocidos antes de la primera etapa, los alcaldes mantienen sus preferencias entre la primera y segunda etapa, existe una función de desempate (como en la familia de reglas de mayoría) que elige un alcalde en caso de que no haya mayoría definida y el alcalde ganador impone sus preferencias en el OCAD.

Proposición 7: $\forall P \in \wp^S$, la votación de 2 etapas es manipulable.

Demostración: se supone que existen tres alcaldes con las preferencias descritas en la figura 3 y que deben elegir a un alcalde que los represente en el OCAD. Las preferencias del gobierno departamental y gobierno central se muestran en la figura 4:

Figura 4. Preferencias del gobierno departamental y gobierno central



Fuente: elaboración propia.

Se va a demostrar que, sin importar qué alcalde se elija, van a existir incentivos para no reportar las verdaderas preferencias por parte de los alcaldes y, por tanto, la regla es manipulable[16]. Para la demostración, no es necesario distinguir en la figura 4 de quién son las preferencias entre el gobierno departamental y el gobierno central.

El primer paso es mostrar que, dadas las preferencias del gobierno departamental y el gobierno central expresadas en la figura 4, el *ranking* de proyectos elegidos estará determinado por las preferencias del gobierno municipal. Esto se muestra utilizando la definición de la regla de Condorcet. Dadas las preferencias,

16 Los únicos supuestos que se necesitan para la demostración son consistencia en el tiempo con respecto a las preferencias y para el caso de tres alcaldes, si dos de ellos tienen las mismas preferencias, alguno de los dos será el elegido.

se tiene que si $aP_g a$ entonces $bP_D a$. Por tanto, sin contar a los municipios, se tiene que $\forall b \neq a \in A \left| \{ i \in N \mid aP_i b \} \right| = \left| \{ i \in N \mid bP_i a \} \right| = 1$. El gobierno municipal, de acuerdo con sus preferencias, puede sumar a cualquiera de los 2 lados y la alternativa que prefiera será la elegida por la regla de Condorcet. Además, se sabe por la proposición 6 que este juego es no manipulable y, por tanto, todos los agentes van a decir la verdad.

Caso 1: el alcalde 1 es el ganador de la primera etapa. En ese caso el orden de proyectos final estará dado por sus preferencias y será $a_1 P^M \ a_2 P^M \ a_3 P^M \ a_4 P^M \ a_5$. Sin embargo, al alcalde 3 le puede ir mejor si el alcalde 2 los representa, ya que el orden de proyectos sería: $a_2 P^M \ a_3 P^M \ a_4 P^M \ a_5 P^M \ a_1$ y se supone le da mucho peso al proyecto de su municipio (a_3) y, por tanto, prefiere esta última. De esa manera, el alcalde 3 prefiere reportar sus preferencias igual a las del alcalde 2 para que gane cualquiera de los 2. Quiere decir que es manipulable.

Caso 2: el alcalde 2 es el ganador de la primera etapa. En ese caso el orden de proyectos final estará dado por sus preferencias y será $a_2 P^M \ a_3 P^M \ a_4 P^M \ a_5 P^M \ a_1$. Sin embargo, al alcalde 1 le puede ir mejor si el alcalde 3 los representa, ya que el orden de proyectos sería: $a_3 P^M \ a_4 P^M \ a_2 P^M \ a_1 P^M \ a_5$ y se supone le da mucho peso al proyecto de su municipio (a_1) y por tanto, prefiere esta última. De esa manera, el alcalde 1 prefiere reportar sus preferencias igual a las del alcalde 3 para que gane cualquiera de los 2. Quiere decir que es manipulable.

Caso 3: el alcalde 3 es el ganador de la primera etapa. En ese caso, el orden de proyectos final estará dado por sus preferencias y será $a_3 P^M \ a_4 P^M \ a_2 P^M \ a_1 P^M \ a_5$. Sin embargo, al alcalde 2 le puede ir mejor si el alcalde 1 los representa, ya que el orden de proyectos sería: $a_1 P^M \ a_2 P^M \ a_3 P^M \ a_4 P^M \ a_5$ y se supone le da mucho peso al proyecto de su municipio (a_2) y, por tanto, prefiere esta última. De esta manera, el alcalde 2 prefiere reportar sus preferencias igual a la del alcalde 1 para que gane cualquiera de los 2. Quiere decir que es manipulable.

Dado que se cubren todos los casos posibles, se demuestra que cuando hay 2 etapas las votaciones son manipulables. ■

Al ser el mecanismo manipulable y utilizando la proposición 1, se llega al siguiente corolario:

Corolario 9: $\forall P \in \wp^S$**,** la votación de 2 etapas no es implementable en estrategias dominantes.

El resultado anterior se deriva de tener alcaldes que van a representar los municipios, pero que buscan imponer sus preferencias y no las de todos los municipios. Se quiere estudiar, entonces, qué pasa si todos los alcaldes participan en la elección de los proyectos. Es decir, si el resultado del gobierno municipal, o el resultado de la primera etapa, es el agregado de todos los alcaldes correspondientes.

De ahora en adelante, se asume que la primera etapa ya no elige un alcalde, sino un *ranking* de proyectos iterando la regla de mayoría del agente mediano. En la segunda etapa el OCAD permanece igual en donde ahora las preferencias del gobierno municipal están dadas por el *ranking* de la primera etapa y el "nuevo mecanismo de votación de 2 etapas" es la unión de estas 2 etapas.

Proposición 8: $\forall P \in \wp^S$**,** el nuevo mecanismo de votación de 2 etapas es no manipulable.

Demostración: de acuerdo con la proposición 6, se sabe que la segunda etapa es no manipulable. La misma demostración puede ser aplicada a más de 3 agentes (inclusive si el número de alcaldes es par, ya que se puede definir la alternativa ganadora en caso de empate, por ejemplo, que gane siempre la de la izquierda) y, por tanto, también será no manipulable para la elección del *ranking* agregado de los alcaldes en la primera etapa. En otras palabras, se tiene que un alcalde no puede cambiar su estrategia, de modo que un proyecto preferido por él cambie de posición en el *ranking* agregado por uno menos preferido. De igual modo, en la segunda etapa, se sabe que el "*ranking* agregado" de los alcaldes no puede cambiar su estrategia de manera que un proyecto preferido por el "*ranking* agregado" cambie de posición en el resultado final de las votaciones. Se quiere demostrar que un agente que vota en la primera etapa no puede modificar sus estrategias de tal manera que el resultado de la segunda etapa sea mejor.

Se va a demostrar que si pasa que $a\ P_i\ b$ y $M^S(P_i, P_{-i})$ implica $b\ P^{M^2}\ a$, (donde P^{M^2} representa las preferencias del *ranking* agregado de los agentes mediante la regla de mayoría en la segunda etapa) no existe $P' = \{P'_i, P_{-i}\}$

tal que $M^S(P'_i, P_{-i})$ implique $a\ P^{M^2}{}'\ b$. De esa manera, no existe un orden de preferencias que mejore la situación del agente i (si puede pasar que lo empeore) y, por tanto, no existen incentivos a mentir, es decir, es no manipulable. En ese caso se cumpliría la no manipulación, ya que sabiendo que no podría pasar que $M^S(P'_i, P_{-i}) P_i M^S(P_i, P_{-i})$ se cumple la definición: *φ no es manipulable si solo si* $\forall i \in N, \forall P_i P'_i \in \wp_i\ M^S(P_i, P_{-i}) P_i M^S(P'_i, P_{-i})$.

Suponiendo que $a\ P_i\ b$ y $M^S(P_i, P_{-i})$ implica $b\ P^{M^2}$ de acuerdo con la definición de mayoría establecida con preferencias unimodales, como se eligió primero b a a, quiere decir que en la segunda etapa $\left|\left\{j \in N \mid bP_j a\right\}\right| \geq \left|\left\{j \in N \mid aP_j b\right\}\right|$. Existen entonces 2 casos, que $a\ P^{M^1}\ b$ o $b\ P^{M^1}\ a$. En el primer caso se utilizaría la misma demostración de la proposición 6 y se concluye que no puede modificar los resultados, ya que es imposible aumentar el conteo del lado derecho de la desigualdad anterior.

Suponiendo que $bP^{M^1}\ a$, sería posible cambiar el signo de la desigualdad si el agente i es capaz de lograr que $aP^{M^1}{}'\ b$. Pero de acuerdo con la demostración de la proposición 6, como $a\ P_i\ b$ se sabe que eso no es posible, ya que ese sistema de una etapa es no manipulable.

Esto implica que no existe $P' = \{P'_i, P_{-i}\}$ tal que en la segunda etapa suceda $\left|\left\{j \in N \mid aP'_j b\right\}\right| \geq \left|\left\{j \in N \mid bP'_j a\right\}\right|$ y, por tanto, no puede pasar por la definición de la regla de mayoría definida que $M^S\{P'_i, P_{-i}\}$ implique $aP^{M^2}{}'b$. En otras palabras, se demostró que no hay ningún orden de preferencia que genere un cambio positivo en cualquier agente así se tengan 2 etapas, y la regla es entonces no manipulable. ■

Demostrando que la regla de mayoría en los OCAD sin elección de alcaldes previa es no manipulable, y sabiendo que se puede elegir cualquier alternativa (sobreyectiva) y utilizando las proposiciones 1 y 2, se llega al siguiente corolario:

Corolario 10: $\forall P \in \wp^S$, el nuevo mecanismo de votación es implementable en equilibrios dominantes y, por tanto, en equilibrios de Nash y monotónica.

Es decir, la regla de mayoría en los OCAD con preferencias unimodales, incluyendo a todos los alcaldes en la elección de proyectos en una etapa previa que agregue sus preferencias en una sola, es implementable en estrategias dominantes.

Al comienzo del artículo se había asumido que las preferencias de los gobiernos departamentales y gobiernos municipales elegidos eran una preferencia agregada y se suponía que estaban dadas. A partir de los resultados anteriores, se puede concluir que la forma adecuada de agregar las preferencias es iterando, por medio de mayoría, con el dominio de preferencias unimodales (eligiendo la alternativa de la mediana o el ganador Condorcet) y se mantienen los resultados encontrados. Por tanto, dado que cada nivel de gobierno es representado por varios agentes, se recomienda que se utilice dicho mecanismo para determinar la preferencia de proyectos que será finalmente el voto de cada nivel. Esto implica que la primera etapa no se utilice para elegir alcaldes si no de una vez para votar por proyectos, y de ahí salga la preferencia agregada para la votación en el OCAD.

A. Cuando el gobierno central no tiene preferencias unimodales

El supuesto sobre las preferencias unimodales con la ubicación geográfica, ya utilizado, es creíble para los gobiernos municipales y departamentales. Cada uno va a preferir proyectos que los impacten en mayor medida y estos son los más cercanos geográficamente. Sin embargo, el gobierno central no tiene una preferencia geográfica específica, ya que debe procurar estar en todo el territorio nacional. Por eso se van a estudiar los resultados encontrados, asumiendo preferencias unimodales para los gobiernos municipales y departamentales y cualquier tipo de preferencias para el gobierno central. El nuevo conjunto de perfiles de preferencias es $\wp^{S-g}\left(\wp^{S}{}_{M}, \wp^{S}{}_{M}, \wp_{M}\right) \subseteq \wp$.

Para los siguientes resultados se continúa suponiendo que en la primera etapa se eligen proyectos y no alcaldes. Es importante aclarar que con $\wp^{S-g}$, la regla de Condorcet puede caer en la paradoja de Condorcet, por lo que la definición de la regla de mayoría es elegir la alternativa de la mediana de los proyectos más preferidos de los agentes. De igual manera, el *ranking* agregado se elabora eliminando la alternativa ganadora y aplicando la regla a un perfil de preferencias que excluye las alternativas que ya fueron elegidas.

Proposición 9: $\forall P \in \wp^{S-g}\left(\wp^{S}{}_{M}, \wp^{S}{}_{M}, \wp_{M}\right), M^{\theta}(P)$ es manipulable y no implementable en equilibrios de Nash.

Demostración: la demostración se basa en la demostración de la proposición 4. Asumiendo que la ubicación lineal de los proyectos es en este orden a_1, a_2 y a_3 y que el gobierno central es el agente g, se observa que durante toda la demostración los agentes M_{OCAD} y D siempre conservan las preferencias unimodales. Por tanto, las conclusiones son las mismas y entonces, si se asume que el gobierno central no tiene preferencias unimodales, se tiene que la regla de mayoría en los OCAD no es monotónica y por tanto, no es implementable en equilibrios de Nash. Como no es implementable en equilibrios de Nash, no lo es en dominantes (condición más estricta) y utilizando la proposición 1 de Maskin, se tiene entonces que es manipulable. ■

Proposición 10: $\forall P \in \wp^{S-g}\left(\wp^{S}{}_{M}, \wp^{S}{}_{M}, \wp_{M}\right)$ sin transformaciones monotónicas sobre las preferencias del gobierno central, el nuevo mecanismo de votación de 2 etapas no es manipulable.

Demostración: primero se va demostrar que si un agente tiene preferencias unimodales, sin importar el tipo de preferencias de los demás agentes, y si se elige la alternativa de la mediana, decir la verdad es una estrategia débilmente dominante. Para este agente existen 2 casos:

Caso 1. Su alternativa preferida está en la mediana. En ese caso, es la alternativa elegida y no hay incentivo alguno a mentir, ya que en cualquier otro escenario estaría peor o igual.

Caso 2. Su alternativa no está en la mediana y por tanto no es elegida. Sin pérdida de generalidad se supone que la mediana $a_M \geq a_i^s$ es su alternativa preferida. Si el agente modifica sus preferencias de modo que su $b_i^s \leq a_M$, esta seguirá siendo la mediana y por tanto el agente estará igual y no tendrá incentivos a mentir. Si por el contrario $b_i^s \leq a_M$, el proyecto de la mediana va a cambiar por $a_{M'}$ y por definición de mediana tiene que pasar que $a_{M'} \geq a_M$. Dado que las preferencias son unimodales para este agente y su pico $a_i^s \leq$

$a_M \leq a_{M'}$, por definición $a_M P_i \; a_{M'}$ y por tanto no tiene ningún incentivo a reportar preferencias $a_M P_i b_i^s$ tal que representen $b_i^s \leq a_M$.

De esta manera, se demuestra que un agente que tiene preferencias unimodales no tiene incentivos para mentir cuando se elige la alternativa de la mediana. Esto es cierto entonces para los gobiernos municipales y departamentales. Sin embargo, teniendo las conclusiones de la proposición 9, se sabe que el gobierno central tiene incentivos para mentir. Pero como el supuesto de ahora es que el gobierno central no es estratégico y siempre reporta la verdad, se concluye que las votaciones no son manipulables.

El resultado anterior se puede extender a que el *ranking* agregado es no manipulable. Se utiliza la misma estrategia para la demostración de la proposición 6. Se supone que $aP_i \; b$ y $bP^M \; a$, quiere decir que *b* fue una alternativa de la mediana antes que *a*. Para que *b* deje de ser mediana, el agente *i* debe reportar unas preferencias con un pico más alejado que *b* de *a* que por ser preferencias unimodales será peor que como está. Por tanto, no tiene ningún incentivo a mentir y entonces el *ranking* agregado con las especificaciones planteadas es no manipulable. ■

Dado que no es manipulable cuando el gobierno central siempre dice la verdad, sabiendo que se pueden elegir todas las alternativas (sobreyectiva) y utilizando las proposiciones 1 y 2 de Maskin, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 11: $\forall P \in \wp^{S-g}\left(\wp_M^S, \wp_M^S, \wp_M\right)$, sin transformaciones monotónicas sobre las preferencias del gobierno central, el nuevo mecanismo de votación de 2 etapas es implementable en equilibrios dominantes. Además, por ser implementable en equilibrios dominantes lo es en equilibrios de Nash y es monotónica.

Es decir, con preferencias unimodales, el gobierno central no siendo estratégico y todos los alcaldes previamente votando por proyectos, la regla de mayoría que elige la alternativa del agente mediano es implementable.

VI. Conclusiones

La nueva Ley 1530 del 2012 de regalías determinó que, por mayoría, por medio de los OCAD (triángulos de buen gobierno), los gobiernos municipales, los gobiernos departamentales y el gobierno central elegirán los proyectos a financiar con los recursos de las regalías. Existe toda una familia de reglas sociales que se pueden catalogar como mayoría y se caracterizan por elegir una alternativa cuando es la más preferida por más de la mitad de los agentes (en este caso es 2). La diferencia entre cada una de las reglas de esta familia se da en los casos en que no existe tal alternativa más preferida por mínimo 2 agentes y hay que determinar un desempate.

El primer resultado que se encontró es que cualquier regla de la familia de mayoría, para el caso de los OCAD, no es implementable ni en equilibrios de Nash, ni en estrategias dominantes. Además, es manipulable, no es monotónica y cumple propiedad de no veto. Incluso si se supone que el gobierno central siempre dice la verdad, y que todos los demás agentes saben esto, las conclusiones siguen siendo las mismas. Este resultado es modificado si se restringe el dominio de perfiles de preferencias.

El siguiente resultado muestra que la regla de Condorcet forma parte de la familia de reglas de mayoría. Además, cuando se restringe el dominio de preferencias de manera que no exista la llamada paradoja de Condorcet, se solucionan los problemas anteriores y la regla de Condorcet en los OCAD es implementable y no manipulable.

Una de las formas de restringir el dominio de preferencias de manera que haya solución con la regla de Condorcet, es suponer que las preferencias son unimodales. En este supuesto, la regla de mayoría en los OCAD no es manipulable y por tanto implementable. Para motivar el supuesto de preferencias unimodales, se supone que las preferencias de proyectos se basan en la ubicación geográfica, en donde se supone se prefiere un proyecto a medida que esté más cerca del municipio o departamento del dirigente.

El resultado anterior se pierde cuando se agrega la etapa en la cual los alcaldes votan para elegir quiénes van a representarlos en los OCAD. Cuando se incluyen todos los alcaldes en las votaciones, se encuentra que nuevamente el triángulo de buen gobierno es implementable y no manipulable. Se recomienda entonces que la primera etapa no se realice para la elección de los alcaldes, sino para votar por los proyectos y tener una preferencia agregada para la votación del gobierno municipal dentro del OCAD.

Finalmente, se elimina el supuesto de las preferencias unimodales para el gobierno central y se determina que vuelve a ser manipulable y no implementable. Este resultado se soluciona suponiendo que el gobierno central siempre dice la verdad y no actúa como un agente estratégico. Se recomienda, por tanto, que el gobierno central, al reportar sus preferencias sobre los proyectos, siempre diga la verdad y no cambie sus preferencias (véase el cuadro 1 con el resumen de los resultados).

Cuadro 1. Resumen de resultado sobre implementación de los OCAD

Regla bajo triángulo de buen gobierno	Implementable
Familia de reglas de mayoría	—
Familia de reglas de mayoría y el gobierno dice la verdad	—
Regla de Condorcet con el dominio restringido	+
Regla de mayoría bajo preferencias unimodales*	+
Regla de mayoría bajo preferencias unimodales con etapa previa de alcaldes	—
Regla de mayoría bajo preferencias unimodales con todos los alcaldes participando	+
Familia de reglas de mayoría bajo preferencias unimodales solo para municipios y departamentos y todos los alcaldes participando	—
Regla de mayoría bajo preferencias unimodales solo para municipios y departamentos**, todos los alcaldes participando y el gobierno dice la verdad	+

* La regla de mayoría bajo preferencias unimodales elige la alternativa de la mediana entre las más preferidas o la ganadora de la regla de Condorcet.

** La regla de mayoría bajo preferencias unimodales solo para municipios y departamentos elige la alternativa de la mediana entre las más preferidas.

Fuente: elaboración propia.

Además, los resultados muestran que la regla de la familia de mayoría que debe ser utilizada para asignar los proyectos elija la alternativa que linealmente esté en la mediana de los proyectos preferidos de cada uno de los agentes (para el trabajo se utilizó la ubicación geográfica, pero los resultados son aplicables a cualquier espacio lineal que represente preferencias unimodales).

Este proceso se repite para tener un *ranking* agregado de proyectos, que es compatible con todos los resultados encontrados.

Quedan algunas preguntas abiertas para futuras investigaciones. Sería interesante estudiar los equilibrios y predecir posibles resultados en las votaciones. Esto implica el análisis de posibles coaliciones entre dirigentes y su efecto en los proyectos elegidos. También se pueden relajar algunos supuestos y tener conclusiones más cercanas a la realidad. Por ejemplo, suponer preferencias unimodales en espacios bidimensionales daría mayor robustez a los resultados, ya que en la realidad los municipios están ubicados geográficamente en un plano. De igual manera, incluir información incompleta y el dinero permite acercarse más a la realidad del problema.

Agradecimientos

Agradecimiento muy especial a Paula Jaramillo Vidales por el asesoramiento en la elaboración del artículo. Asimismo, a los demás jurados, Çağatay Kayı, Andrés Zambrano, y los dos evaluadores anónimos de la revista *Desarrollo y Sociedad* por todos los comentarios y observaciones.

Una versión preliminar de este artículo fue presentada como tesis de Maestría de Economía PEG (Programa de Economía para Graduados), en la Facultad de Economía de la Universidad de los Andes. Este artículo no tuvo financiadores.

Referencias

1. Arrow, K. (1951). *Social choice and individual values*. Nueva York: John Wiley.

2. Black, D. (1948). On the rationale of group decision-making. *Journal of Political Economy*, *56*(1), 23-34.

3. Downs, A. (1957). *An economic theory of democracy*. Nueva York: Harper Collins.

4. Easley, D., & Kleinberg, J. (2010). *Networks, crowds and markets: Reasoning about a highly connected world*. Cambridge: Cambridge University Press.

5. Gaertner, W. A. (2009). *A Primer in social choice theory*. Oxford: Editorial Wiley Finance, Oxford University Press.

6. Gibbard, A. (1973). Manipulation of voting schemes: A general result. *Econometrica*, *41*(4), 587-601.

7. Mas-Collel, A., Whinston, M., & Green, J. (1995). *Microeconomic theory*. Oxford: Oxford University Press.

8. Maskin, E., Laffont, J., & Hildebrand, W. (1982). *The theory of incentives: An overview*. Cambridge University Press.

9. Maskin, E. (1999). Nash equilibrium and welfare optimality. *Review of Economics Studies, 66*(1), 23-38.

10. Nehring, K., & Puppe, C. (2002). *Strategy-proof social choice on single-peaked domains. Possibility, impossibility and the space between*. Davis: Department of Economy, University of California at Davis.

11. Satterthwaite, M. (1975). Strategy-proofness and arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, *10*(2), 187-217.

12. Serrano, R. (2003). *The theory of implementation of social choices rules*. Providence: Brown University.

13. Sistema General de Regalías. (2012). Cartilla virtual Ley 1530 de 2012. Bogotá. República de Colombia: Departamento Nacional de Planeación.

14. Taylor, A., & Pacelli, A. (2008). *Mathematics and politics*. Nueva York: Editorial Springer.

Anexos

Anexo 1

Proposición A1.1. $M^{\theta}(P)$ es sobreyectiva.

Demostración: esto quiere decir que para cualquier alternativa existe, por lo menos, una combinación de perfiles de preferencias tal que es elegida por la regla social. Por definición del modelo se tiene $\forall i \in N$ y $\forall a \in A\ \exists P^{*}_{i} \in \wp_{i}$ *tal que* $\forall b \neq a \in A, aP_{i}b$. Por definición de la familia de reglas de mayoría se tiene entonces que $M^{\theta}(P^{*}) = a$. Por tanto, se tiene que $\forall a \in A\ \exists P^{*}_{i}$: $M^{\theta}(P^{*}) = a$ y se concluye que $M^{\theta}(P)$ es sobreyectiva. ■

Proposición A1.2. $M^{\theta}(P)$ no es dictatorial.

Demostración: se supone que $M^{\theta}(P)$ si es dictatorial y sin pérdida de generalidad que el agente i es el dictador y su alternativa más preferida baja el perfil de preferencias P_{i} es b. Por la definición del modelo se tiene tal que $\forall a \in N$ y $\forall \mathrm{a} \in A\ \exists P^{*}_{i} \in \wp_{i}$ tal que $\forall b \neq a \in A, aP_{i}b$. Por definición de la familia de reglas de mayoría $M^{\theta}(P_{i}, P_{-i}{}^{*}) = a$ ya que dos agentes prefieren la alternativa a. Por tanto i no es dictador, hay una contradicción y se demuestra que $M^{\theta}(P)$ no es dictatorial. ■

Proposición A1.3. $M^{\theta}(P)$ **satisface no veto y unanimidad.**

Demostración: se supone que se tiene cualquier regla de la familia de mayoría $M^{\theta}(P)$. Ahora se supone que existe un a tal que: $\left|\{i \in N \mid \forall b \neq a \in A, aP_{i}b\}\right|$ $= |N| - 1 = 2$. Por definición de la regla de mayoría $M^{\theta}(P) = a$ y cumple con la definición de no veto.

Ahora para demostrar unanimidad, se supone que existe un a tal que $\left|\left\{i \in N \mid \forall b \neq a \in A, aP_i b\right\}\right| = |N| = 3$. Por definición de la regla de mayoría $M^{\theta}(P) = a$ y cumple con la definición de unanimidad. ■

Anexo 2

Proposición A2.1: con $|N| = 3$, la regla de Condorcet forma parte de la familia de reglas de mayoría definida anteriormente (suponiendo que si hay paradoja de Condorcet elige una alternativa).

Demostración: se supone que $\forall b \neq a \in A, \left|\left\{i \in N \middle| aP_i b\right\}\right| \geq 2$. Por la definición de P y como el número de agentes es 3, debe pasar que $\forall b \neq a, \left|\left\{i \in N \middle| aP_i b\right\}\right| + \left|\left\{i \in N \middle| bP_i a\right\}\right| = 3$. Como el primer término es mayor o igual que 2, debe pasar que $\forall b \neq a \in A, \left|\left\{i \in N \middle| aP_i b\right\}\right| \geq \left|\left\{i \in N \middle| bP_i a\right\}\right|$. Por definición de Condorcet $\varphi^C(P) = a$. En conclusión, se demostró que si pasa que $\forall b \neq a \in A, \left|\left\{i \in N \middle| aP_i b\right\}\right| \geq 2$ entonces $\varphi^C(P) = a$, que es la condición necesaria y suficiente para ser de la familia de reglas de mayoría definida anteriormente. Además, si hay paradoja se elige cualquier alternativa (supuesto) se cumple que $\theta(P) \neq \emptyset$. ■