

# Una concepción institucional sobre la derivada en la Universidad Tecnológica de Pereira, en el curso de Matemáticas I.<sup>1,2</sup>

## An institutional conception about the derivative in the course Mathematics I at Universidad Tecnológica de Pereira

## Uma concepção institucional sobre a derivada na Universidade Tecnológica de Pereira, no curso de Matemática I.

W. F. Castro y G. Cadavid

Recibido Diciembre 15 de 2015 – Aceptado Mayo 30 de 2016

**Resumen**— Este artículo reporta resultados de una investigación que indagó por los significados institucionales del objeto matemático derivada en la Universidad Tecnológica de Pereira en el periodo 2009-2014, referidos en el primer examen parcial unificado de derivadas. Se identificaron tanto configuraciones epistémicas como contextos preferenciados por el grupo de profesores quienes diseñan las pruebas unificadas.

**Palabras clave**— configuraciones epistémicas, contextos, derivadas, institución, objeto matemático.

**Abstract**— This article reports the results of a research on the institutional meanings of the mathematical object derivative carried out at Universidad Tecnológica de Pereira during the period 2009-2014. Epistemic configurations as well as contexts preferred by the group of teachers who design the unified tests were identified.

**Key words**— configurations, epistemic, contexts, derivatives, institution, mathematical object

**Resumo** - Este artigo informa resultados de uma pesquisa que indagou pelos significados institucionais do objeto matemático derivada na Universidade Tecnológica de Pereira no período

2009 – 2014, referidos no primeiro exame parcial unificado de derivadas. Identificaram-se tanto configurações epistêmicas como contextos de preferência pelo grupo de professores quem desenharam as provas unificadas.

**Palavras chave** - configurações epistêmicas, contextos, derivadas, instituição, objeto matemático.

### I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo indaga sobre los diversos significados que tiene el objeto matemático derivada en el curso de Matemáticas I, en la Universidad Tecnológica de Pereira (U.T.P).

La idea para esta investigación empezó casualmente en octubre de 2009, cuando se observó que en el curso de Matemáticas I en la U.T.P, el concepto del objeto matemático derivada, presentaba diversas acepciones en cursos paralelos orientados por diferentes profesores, pero los exámenes aplicados indagaban por las mismas acepciones. Posteriormente en junio de 2013, se inició una investigación en la línea de educación matemática, en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la U.T.P. con el propósito de determinar los diversos significados institucionales que se ofrecen sobre la derivada.

El estudio del cálculo diferencial se enmarca dentro de las ciencias básicas y su enseñanza resulta fundamental en el desarrollo de las carreras tecnológicas o científicas. Según el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación Colciencias [1] “*Las Ciencias Básicas se constituyen en la base fundamental de los procesos de desarrollo científico y tecnológico... Las disciplinas que se consideran Ciencias Básicas son: Biología, Biomédicas, Ciencias de la Tierra, Física, Matemáticas, y Química*”.

<sup>1</sup> Una versión preliminar de este trabajo se presentó en el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, en Bucaramanga, en 2014.

<sup>2</sup> Producto derivado del proyecto de investigación “Significados institucionales del objeto derivada en el curso de Matemáticas I, en la Universidad Tecnológica de Pereira”. Presentado por el Grupo de Investigación MES, de la Universidad de Antioquia.

W. F. Castro, docente de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Medellín (Colombia); email: wfcastro82@gmail.com; walter.castro@udea.edu.co

G. Cadavid, docencia en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia), email: gcadavid@utp.edu.co

En la Universidad Tecnológica de Pereira, el curso de Matemáticas I, CB 115, es visto aproximadamente por 1200 estudiantes, cada semestre, inscritos en once carreras, y más del 44% no logra aprobarlo [2].

Este curso se divide en dos partes: Pre-cálculo y Cálculo diferencial. Cada una de ellas tiene un peso ponderado del 50% del total de la nota de la asignatura.

El objeto matemático derivada es el eje principal correspondiente al Cálculo diferencial, ha sido tema de investigación y se reportan dificultades diversas para su aprendizaje y enseñanza.

Artigue [3] manifiesta que si bien se puede enseñar a los estudiantes a calcular derivadas de funciones explícitas y a resolver algunos problemas estándar, los mismos muestran grandes dificultades cuando abordan ejercicios que requieren un discernimiento que trascienda el conocimiento del álgebra de derivadas. Por ejemplo, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios propuestos con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan usar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

Artigue [3] también advierte que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, se reportan dificultades para que los estudiantes logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el núcleo de este campo de las matemáticas.

De igual manera diversas investigaciones [4] y [5] concluyen que no es fácil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del cálculo, a no ser que sea por medio de su componente algebraica. De esta forma, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación, pero manifiestan dificultades cuando deben recurrir a otros significados del objeto derivada, el cual comúnmente se presenta en la enseñanza a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente a un punto dado de la gráfica de la función.

Sánchez-Matamoros [6] señala que varias investigaciones han reportado confusiones de los estudiantes para diferenciar entre la derivada en un punto y la función derivada, y de igual manera se ha reportado que las unidades didácticas presentadas a los estudiantes no tienen en cuenta tal diferencia.

Orton [7] identificó tres tipos de errores cometidos por los estudiantes en tareas sobre derivación y sus aplicaciones:

1. Estructurales: relacionados con los conceptos implicados.
2. Arbitrarios: el estudiante opera arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema.
3. Manipulativos: surgen durante los procesos de cálculo, pasan inadvertidos para el estudiante.

Calvo [8] afirma que muchos estudiantes matriculan los cursos de cálculo en tanto que son requisitos para matricular

otros cursos posteriores vinculados con sus carreras de elección.

Godino y Font [9] afirman que la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.

Cuando se pretende mostrar a los estudiantes la utilidad de los contenidos que se estudian, lo más lejos que se suele llegar en un curso común de cálculo es a resolver “problemas de aplicación” [10] que se proponen en los textos, que casi nunca corresponden a problemas reales.

Por otra parte en los libros de texto se asemeja la modelación con las aplicaciones. En la literatura especializada sobre modelación se encuentran enfoques diversos, por ejemplo, Fosnot [11] afirma que los modelos matemáticos son representaciones que se han construido a lo largo del tiempo generalizando ideas, estrategias y representaciones.

Para Lesh [12] el modelo resulta ser un esquema que describe un sistema tomado de la vida real, que ayuda a pensar ese sistema, a darle sentido o a hacer predicciones. La propuesta de Lesh [12] con respecto a la modelación matemática inicia con la comprensión del problema, la identificación de sus elementos y de relaciones entre ellos.

Es clara la preocupación de la comunidad científica por investigar sobre las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial. De ahí que resulte interesante plantear la pregunta: ¿Cuáles son los significados institucionales del objeto matemático derivada en el curso de Matemáticas I, en la Universidad Tecnológica de Pereira?

El objetivo general de la investigación es indagar por los diferentes significados para el objeto matemático derivada en el primer examen parcial de derivadas en el periodo 2009-2014. Para responder a este objetivo se utiliza tanto el constructo “configuraciones epistémicas” como los contextos que surgen y se identifican, respectivamente, en las diferentes preguntas realizadas a los estudiantes en el primer examen de derivadas en el periodo 2009-2014.

Para indagar por los significados institucionales preferenciados para la derivada, se utilizan algunas herramientas provistas por el Enfoque Onto semiótico de la de la Cognición e Instrucción matemática (EOS) [9]. Así mismo, usamos la investigación de Pino-Fan [13] quien efectúa un estudio epistémico-histórico sobre las distintas acepciones de la derivada. Para estudiar los contextos, recurrimos a las investigaciones de Ramos y Font [14] que retoman el trabajo de Martínez y Gorgorió [15] sobre el concepto de Contexto en educación matemática:

1. Contexto Real: se refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar.
2. Contexto Simulado: tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características (por ejemplo, cuando los alumnos simulan situaciones de compra-venta en un “rincón” de la clase).
3. Contexto Evocado: se refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho.

Se considera pertinente, incluir el contexto “matemático” no considerado por los autores anteriores. Este contexto se refiere a tareas que relacionan conceptos matemáticos o que exigen la demostración de propiedades de derivadas de funciones.

Pino-Fan [16] propone la noción de Configuración Epistémica (C.E) como una organización de objetos y significados matemáticos que intervienen en la solución de tareas matemáticas.

## II. METODOLOGÍA

La investigación es de tipo exploratoria y descriptiva, y se enmarca dentro de la metodología del análisis documental [17]. El estudio se articula en dos etapas: la primera incluye la recolección de la información documental disponible. Se recuperaron y resolvieron 6 exámenes parciales en el período 2009 a 2014. Paralelamente se efectuó una revisión de los capítulos ocho y nueve del libro “Talleres de Matemáticas I” Profesores de Matemáticas I, U.T.P (2008). Talleres de Matemáticas I. Pereira: Postergraph S.A.

Tanto en los seis exámenes como en los ejercicios propuestos en los capítulos ocho y nueve que se resolvieron, fueron considerados los elementos primarios de significado [9], cuyo uso se ilustra en Godino, Rivas, Castro y Konic [18].

Al estudiar las entidades primarias: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, sus significados y sus relaciones, presentes en las soluciones de las preguntas incluidas en cada examen y en los ejercicios propuestos en los capítulos ocho y nueve, se identificaron las configuraciones epistémicas preferenciadas en ambas fuentes documentales.

En la segunda etapa se tabuló la información recolectada, se cruzaron datos, se analizaron y se hicieron inferencias con los datos obtenidos. La información se trianguló entre los dos investigadores y la literatura.

A partir del análisis de las entidades primarias de significado presentes en las soluciones de las preguntas propuestas en los exámenes y en los capítulos ocho y nueve del Libro de Talleres, emergieron cuatro Configuraciones Epistémicas. A continuación, se describe cada una de ellas y se enumeran los criterios usados para valorar cada pregunta y atribuir su pertenencia a cada configuración:

CE1: Tangentes y cálculo de la ecuación de la recta tangente a la curva, usando la acepción: la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado.

CE2: Derivabilidad, continuidad de funciones y derivadas laterales por definición, usando la definición de derivadas laterales aplicada sobre funciones a trozos.

CE3: Verificación de derivadas, aquí se observa la destreza para constatar de manera algebraica, que efectivamente la respuesta dada en el Libro de Talleres de Matemáticas I, es la derivada en forma simplificada de la función indicada.

CE4: Reglas de Derivación (teoremas sobre derivadas): aplicación de las reglas de la derivada de suma, resta, producto, cociente de funciones, además de la regla de la cadena. Incluyen las derivadas de: funciones trigonométricas

y sus inversas; logarítmicas con base natural, con base 10 o con base arbitraria; derivación logarítmica; derivadas de orden superior; derivadas de las funciones hiperbólicas y sus inversas, derivadas de funciones exponenciales y derivación implícita.

## III. RESULTADOS

La Tabla I categoriza los tipos de contexto identificados para el primer examen parcial de derivadas, correspondiente al período 2009-2014.

La inclusión de tareas en contexto se vincula con la matemática como actividad de carácter humano [19] y es una característica motivacional que se propone. Durante los seis años se tuvieron 28 ocasiones para formular preguntas e incluir los contextos. De éstas el 21% corresponden al contexto matemático, mientras que el 79% corresponden al contexto evocado.

En la Tabla II se muestran las diferentes Configuraciones Epistémicas identificadas en el primer parcial de Matemáticas I, durante el período 2009-2014. Así mismo se informa sobre la valoración puntual de cada pregunta asignada por los diseñadores de las pruebas. Al cruzar las Configuraciones Epistémicas identificadas con las valoraciones, para cada pregunta de cada examen, asignadas por el equipo diseñador de la prueba se puede colegir tanto la preferencia como la valoración que los profesores diseñadores de la prueba conceden implícitamente a cada configuración.

TABLA I  
CONTEXTOS USADOS EN EL PRIMER PARCIAL DE DERIVADAS PERÍODO  
2009-2014

Examen	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5
Parcial	Contexto	Contexto	Contexto	Contexto	Contexto
P1(2009)	matemático	evocado	evocado	evocado	No pregunta
P2	matemático	evocado	evocado	evocado	evocado
P3	matemático	evocado	evocado	evocado	evocado
P4	matemático	evocado	evocado	evocado	evocado
P5	matemático	evocado	evocado	evocado	No pregunta
P6(2014)	matemático	evocado	evocado	evocado	evocado

TABLA II.  
VALORACION PUNTUAL DE LAS CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS EN EL  
PRIMER EXAMEN PARCIAL DE DERIVADAS PERÍODO 2009-2014

CE	Parcial I	Parcial II	Parcial III	Parcial IV	Parcial V	Parcial VI
CE1	0.8	1.0	-	-	-	0.5
CE2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.2	1.0
CE3	0.5	0.5	1.0	1.0	1.7	1.5
CE4	2.7	2.5	3.0	3.0	2.1	2.0

La C.E 1 que se asocia con la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva, presentó una ponderación del total de la nota entre un 10 y un 20%. Se observa que la C.E 2, que se relaciona con la derivabilidad, con condiciones de continuidad y con las derivadas laterales por definición, tiene una ponderación entre el 20 y el 24% de la nota total del examen.

La C.E 3 que se refiere a verificación de derivadas presenta una ponderación entre el 10% y el 34% del total de la nota para esta prueba. Se destaca la C.E 4, que aborda las fórmulas para derivación (incluyendo la regla de la cadena), se valora con una ponderación que va desde el 40% hasta el 60%.

La Tabla III confronta los contextos empleados con las Configuraciones Epistémicas identificadas en los exámenes en el curso de Matemáticas I para el periodo 2009-2014.

TABLA III.  
DISTRIBUCIÓN DE CONTEXTOS PARA EL PRIMER PARCIAL DE DERIVADAS.  
PERIODO 2009-2014

Contextos	Primer parcial
Evocado	CE1 CE2 CE3 CE4
Real	
Simulado	
Matemático	CE1 CE2 CE3 CE4

En el primer parcial los contextos empleados son el Evocado y el Matemático, en pruebas que se resuelven utilizando una de las cuatro configuraciones epistémicas.

La Tabla IV cruza las Configuraciones Epistémicas identificadas en los exámenes sobre la derivada para el periodo 2009-2014.

TABLA IV.  
CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS EN EL PRIMER EXAMEN PARCIAL DE DERIVADAS EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS I. PERIODO 2009-2014.

Configuraciones Epistémicas	CE1	CE2	CE3	CE4
Examen 1	✓	✓	✓	✓
Examen 2	✓	✓	✓	✓
Examen 3	-	✓	✓	✓
Examen 4	-	✓	✓	✓
Examen 5	-	✓	✓	✓
Examen 6	✓	✓	✓	✓

La Tabla IV muestra que durante este período las Configuraciones CE2, CE3 y CE4 fueron preferenciadas sostenidamente durante seis años. Las tres configuraciones enfatizan el uso de la definición de la derivada, de reglas de derivación o de la comprobación de identidades.

El carácter procedimental y algebraico identificado en la preferencia por estas tres configuraciones es notable. Artigue [20] advierte que aunque es importante enseñar a realizar cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, es importante enfatizar otros aspectos del concepto para favorecer que los estudiantes logren alcanzar una

comprensión satisfactoria tanto de los conceptos como de los métodos de pensamiento que conforman el centro de este campo de las matemáticas. Zandieth [21] afirma que un estudiante no exhibe comprensión amplia sobre el concepto derivada, si éste no puede, en algún contexto relevante, reconocer y construir cada uno de los tres procesos (razón, límite y función) involucrados en la comprensión del concepto de derivada.

#### IV. CONCLUSIONES

Las configuraciones de significados y los tipos de contextos que surgen en las diferentes versiones de los exámenes parciales del tema derivada, aplicadas a los estudiantes que cursaron Matemáticas I, en la Universidad Tecnológica de Pereira, durante el periodo 2009-2014, muestran las preferencias manifestadas por los diseñadores de las pruebas.

Las tres primeras configuraciones enfatizan el uso de la definición de la derivada, el uso de reglas de derivación o la comprobación de ciertas identidades. Los tres procesos planteados por Zandieth [21] -razón, límite y función- están escasamente representados en el conjunto de exámenes.

Los contextos elegidos para ubicar los conceptos son, mayoritariamente dos: el evocado y el matemático.

A lo largo del tiempo se observa una clara preferencia por emplear en el primer parcial de derivadas los contextos evocado y matemático.

La C.E 1 que versa sobre “*Tangentes, Cálculo de la ecuación de la recta tangente a la curva, usando la acepción: la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto dado*” tiene una ponderación total de la nota entre un 10% y un 20%. Se observa que la C.E 2 “*Derivabilidad, continuidad de funciones y Derivadas laterales por definición, usando la definición de derivadas laterales aplicada sobre funciones a trozos*” tiene una ponderación entre el 20% y el 24% de la nota total de dicho examen. Por su parte la C.E 3 “*Verificación de Derivadas, aquí se quiere observar la destreza para constatar de manera algebraica, que efectivamente la respuesta dada en el libro de talleres de Matemáticas I, es la derivada en forma simplificada de la función indicada.*” tiene una ponderación comprendida entre el 10% y el 34% del total de la nota para esta prueba. Se destaca la C.E 4 “*Reglas de Derivación (Teoremas sobre derivadas)...*” tiene una ponderación comprendida entre el 40% hasta el 60%. Se aprecia un claro enfoque que favorece el desarrollo de procedimientos algorítmicos y algebraicos para la obtención de la derivada de una función dada.

Las preferencias por ciertas configuraciones de significados para el concepto de derivada se organizan en cuatro configuraciones, de las cuales sobresalen tres: CE2: derivabilidad y derivadas laterales por definición; CE3: verificación de derivadas, CE4: fórmulas de derivación.

Estas tres configuraciones enfatizan el uso de la definición de la derivada o el uso de reglas de derivación o la comprobación de ciertas identidades.

En relación con los contextos elegidos para motivar a los estudiantes se aprecia, a lo largo de los seis años estudiados

en esta investigación, una clara preferencia por los contextos evocado y matemático. El contexto real que refiere a la práctica real de las matemáticas en su entorno socio cultural, no se aprecia en los exámenes realizados a los futuros ingenieros, que podrían observar en este contexto, quizá uno de los más potentes aspectos del cálculo diferencial.

Los programas de estudio y los textos que se llevan en el curso de Matemáticas I, presentan muestras del significado de los saberes matemáticos, con frecuencia no característicos y a veces con preferencias difíciles de suprimir, de las instituciones formadas por los autores de los mismos.

Si bien no existe una normativa en la Universidad que señale que los exámenes sobre el objeto matemático derivada deben incluir los términos, conceptos, propiedades y procedimientos identificados en las cuatro Configuraciones Epistémicas, así como los contextos evocado y matemático, es claro que las escogencias realizadas por los profesores que diseñan tanto el examen como por los profesores que diseñaron el Libro de Talleres de Matemáticas I, son sostenidas a lo largo de seis años. La escogencia de la “institución” formada por los profesores es apoyada por el Departamento de Matemáticas y por la Universidad.

El análisis del contexto de significación que se le brinda al estudiante en la clase de matemáticas se presenta como fundamental para interpretar adecuadamente las respuestas de éste.

Por varias razones los usos y connotaciones de las generalidades matemáticas tratadas en las instituciones de enseñanza son necesariamente limitados. El problema didáctico se presenta cuando el estudio realizado sobre los elementos del significado tiene un carácter parcializado o se añaden prácticas improcedentes, presentando, no un significado limitado del concepto (lo cual resulta ser natural e inevitable), sino otro inexacto o de poca trascendencia.

Las creencias epistémicas [22] de los maestros en quienes la Universidad confía el diseño de las pruebas imponen una elección epistémica sobre el colectivo de profesores que dictan el curso. Esta investigación desvela la representación epistémica y cultural que los profesores tienen sobre un objeto matemático en particular, y puede servir para motivar reflexiones sobre tales escogencias y las implicaciones que tienen sobre la formación matemática que se brinda a los estudiantes.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los comentarios de los doctores Oscar Fernández y Eliecer Aldana, que ayudaron a mejorar el documento.

#### REFERENCIAS

- [1] COLCIENCIAS, [http://www.colciencias.gov.co/programa\\_estrategia/ciencias-b-sicas](http://www.colciencias.gov.co/programa_estrategia/ciencias-b-sicas), [En línea]. Available: [http://www.colciencias.gov.co/programa\\_estrategia/ciencias-b-sicas](http://www.colciencias.gov.co/programa_estrategia/ciencias-b-sicas). [Último acceso: 11 09 2012].
- [2] O. I. UTP, Datos estadísticos matemáticas 1 CB 115, UTP. Periodo 2005-2015, Pereira, 2015.
- [3] M. Artigue, “Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?”, RELIME. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 1, no. 1, pp. 40-55, 1988.
- [4] L. R. Pino-Fan, J. D. Godino y V. Font, “Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (2ª parte)”, *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, no. 8, pp. 1-47, 2013.
- [5] E. Badillo, “La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia”, Tesis doctoral dirigida por C. Azcárate, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, España, 23 jul. 2003.
- [6] G. Sanchez-Matamoros, “La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 2, no. 11, pp. 267-296, 2008.
- [7] A. Orton, “Students’ understanding of differentiation”, *Educational Studies Mathematics*, vol. 3, no. 14, pp. 253-250, 1983.
- [8] A. Calvo, “Un Estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral”, Tesis doctoral, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, España, 17 sep. 2001.
- [9] J. D. Godino, y V. Font, “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284.
- [10] L. Zuñiga, “El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 1, no. 10, pp. 145-175, 2007.
- [11] C. T. Fosnot, “Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents”, Portsmouth, NH: Heinemann, 2002.
- [12] R. Lesh and H. M. Doerr, “Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design”, no.1, pp. 361-384, 2000.
- [13] L. Pino-Fan, “*Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: Clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje*”, Editorial Académica Española, 2011.
- [14] A. B. Ramos y V. Font, “Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica”, *La Matemática e la sua didáctica*, vol. 4, no. 20, pp. 535-556, 2006.
- [15] M. Martínez Silva y N. Gorgorió, “Concepciones sobre la enseñanza de la resta: Un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado”, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 6, no. 1, 2004.
- [16] L. Pino-Fan, “Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada”, Tesis doctoral dirigida por J. D. Godino y V. Font, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España, 2013.
- [17] L. Cohen, L. Manion and K. Morrison, “*Research methods in education*”, Milton Park. Abingdon, Oxon (England): Routledge, 2011.
- [18] J. D. Godino, M. Rivas, W. F. Castro and P. Konic, “Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution”, *ICME 11, Topic Study Group 27, Mathematical Knowledge for Teaching*, Monterrey, Mexico, 2008.
- [19] M. Van Den Heuvel-Panhuizen, “The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 54, no. 1, pp. 9-35, 2003.
- [20] M. Artigue, “*La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos*”, Grupo editorial Iberoamericano, México, 1995.
- [21] M. Zandieth, “A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate”. *American Mathematical Society*, pp. 103-127, 2000.
- [22] L. Mason and P. Boscolo, “Role of epistemological understanding and interest in interpreting a controversy and in topic-specific belief change”, *Contemporary Educational Psychology*, vol. 29, no. 2, pp. 103-128, 2004.

**Walter F. Castro Gordillo** nació en El Cairo-Valle del



Cauca, Colombia, el 24 de noviembre de 1964. Se graduó de la Universidad del Valle con los títulos de Licenciado en Educación, Matemático y Magister en Matemáticas. Es Master en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España, y Doctor en Didáctica de la Matemática por la misma Universidad. Realizó su postdoctorado en la Universidad de Granada y en la Escuela de Formación del profesorado de la Universidad de Barcelona, España.

Actualmente es profesor asociado en la Universidad de Antioquía, adscrito a la Facultad de Educación.



**Germán Cadavid Arango** nació en Pereira, Risaralda, Colombia, el 7 de abril de 1972. Ingeniero Industrial de la Universidad Tecnológica de Pereira. Magister en Enseñanza de las Matemáticas de la misma Universidad. Docente adscrito al Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira.