

Formas de matematización de la filosofía natural: Galileo y la redefinición sociocognitiva de sus matemáticas*

Forms of mathematization of natural philosophy: Galileo and the socio-cognitive redefinition of his mathematics

Por: Helbert E. Velilla Jiménez

G.I.: Conocimiento, filosofía, ciencia, historia y sociedad
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia

E-mail: helbertvelillajimenez@gmail.com

Fecha de recepción: 25 de febrero de 2017

Fecha de aprobación: 30 de octubre de 2017

Doi: 10.17533/udea.ef.n57a04

Resumen. *El tema de este artículo es la certeza de las matemáticas en los siglos XVI y XVII. El problema específico del que trata es que las matemáticas, en este contexto, no ofrecen explicaciones causales y por ello no forman parte de la filosofía natural. Mi hipótesis es que la redefinición epistemológica de las matemáticas depende de las prácticas y de factores sociocognitivos; propongo que se redefinen las prácticas y el manejo de los objetos, como el plano inclinado, la balanza, la palanca y el péndulo. Para desarrollar esta hipótesis, en primer lugar analizaré el problema de la hegemonía de la filosofía natural sobre las matemáticas. En segundo lugar, mostraré la relación de las matemáticas con la filosofía natural a partir de los usos conceptuales y prácticos de los objetos en el contexto galileano. Finalmente, mostraré que sí hay una redefinición práctica y epistemológica de las matemáticas: se redefinen como el estudio de las matemáticas aplicado al movimiento.*

Palabras clave: prácticas, matematización, geometría, Galileo, filosofía natural

Abstract. *The topic of this paper is the certainty of mathematics during the 16th and 17th centuries. The specific problem it addresses is that mathematics, in this context, does not provide causal explanations and therefore is not considered to be part of natural philosophy. My working-hypothesis is that the epistemological redefinition of mathematics depends on the practices and on sociocognitive factors; I suggest that there is a redefinition of practices and of the treatment of objects, such as the inclined plane, the balance, the lever and the pendulum. In order to develop this idea, I will firstly analyze the question of the hegemony of natural philosophy over mathematics. Secondly, I will present the relationship between mathematics and natural philosophy, based on the conceptual and practical uses of objects in the Galilean context. Finally, I will point out the practical and epistemological redefinition of mathematics as the study of mathematics applied to motion.*

Keywords: practices, mathematization, geometry, Galileo, natural philosophy

* Este artículo es producto de la investigación de maestría dirigida por los profesores Ángel Romero y Andrés Klaus Runge. Agradezco al profesor Sergio Orozco por sus rigurosas sugerencias y por estar atento a responder todas mis preguntas. El artículo forma parte de los productos de investigación del Grupo Conocimiento, filosofía, ciencia, historia y sociedad clasificado en Colciencias.

Cómo citar este artículo:

MLA: Velilla, Helbert. "Formas de matematización de la filosofía natural: Galileo y la redefinición sociocognitiva de sus matemáticas". *Estudios de Filosofía*, 57 (2018): 59–93

APA: Velilla, H. (2018). Formas de matematización de la filosofía natural: Galileo y la redefinición sociocognitiva de sus matemáticas. *Estudios de Filosofía*, (57), 59–93.

Chicago: Velilla, Helbert. "Formas de matematización de la filosofía natural: Galileo y la redefinición sociocognitiva de sus matemáticas." *Estudios de Filosofía* n.º 57 (2018): 59–93.

Introducción

El propósito de este artículo es abordar el problema sobre la legitimación epistemológica de las matemáticas en los siglos XVI y XVII, que tiene como punto de inscripción la supuesta incapacidad de éstas de poder explicar las causas eficientes y finales, en comparación con la filosofía natural, y en consecuencia se les considera subordinada a ésta. En este contexto, las matemáticas no ofrecen una explicación causal, pero su valor reside en que su carácter demostrativo es el más elevado. Ahí se inscribe el debate sobre la legitimidad de incorporar las matemáticas en la filosofía natural para analizar la naturaleza en términos cuantitativos, lo cual, desde luego implica una reconfiguración de la organización (jerarquización) de las ciencias, tal como sucedió en el surgimiento de la ciencia moderna. Cuando hablo de “términos cuantitativos” no me refiero únicamente a técnicas matemáticas para realizar cálculos. Si bien esto es muy importante sólo cubre parcialmente su significado. En efecto, pensar en una única definición como “ciencias de las cantidades” o “magnitudes” resulta problemático por las diversas prácticas y concepciones sobre la cantidad. En su lugar, lo que quiero señalar es que es importante apelar a una definición históricamente situada y empírica de las matemáticas, lo cual sugiere que lo que debería ser llamado “matemáticas” son las prácticas de los que se llamaron —o fueron llamados por otros— “matemáticos” (Roux, 2010; Velilla, 2015b). En este artículo sostengo que la ciencia de Galileo surge en un contexto cultural e intelectual en el que la práctica de las matemáticas se encontraba en reconstrucción por parte de algunos matemáticos cuyo campo de investigación estaba en proceso de ser definido. Esto quiere decir que parto de la hipótesis según la cual, si hay una redefinición de las prácticas matemáticas de Galileo, se redefinen sociocognitivamente para mostrar que sus pruebas, contrario a lo que defendían los filósofos naturales, pueden constituir una explicación filosófico-natural, entendida ésta como el análisis del movimiento y sus causas. Mediante la introducción de un análisis sobre los objetos (plano inclinado, balanza) y su representación geométrica, enfocado en las prácticas matemáticas de Galileo, concluiré que el estudio del movimiento es lo matematizable.

1. Matemáticas y filosofía natural: antecedentes

El problema que abordaré es la supuesta incapacidad de las matemáticas de poder ofrecer explicaciones causales en el contexto del debate sobre sus demostraciones y su certeza (*De Quaestio de certitudine mathematicarum*). En el renacimiento tardío se puede estudiar el estatus sociocognitivo de las matemáticas en el marco

de su legitimación en la filosofía natural, dado que en este periodo se encuentran diferentes textos y posturas que debaten sobre su certeza y que ofrecen elementos de análisis sobre la incorporación de esta disciplina a la filosofía natural, debates que se dieron por la alegada incapacidad de las matemáticas de ser explicativas en el orden de la causalidad. Particularmente, me refiero a la revisión crítica de la filosofía aristotélica que tuvo lugar en los siglos XVI y XVII. Esta revisión se hizo en todos los frentes,¹ uno de los cuales se refiere a la certeza del que me ocuparé a continuación.

En el caso particular de la naturaleza de las matemáticas y su rigor demostrativo, filósofos naturales como Alessandro Piccolomini (1565), Pietro Catena (1563) y Benito Pereira (1591) afirmaron que las matemáticas no son ciencias. Sin embargo, matemáticos como Francesco Barozzi (1560) y Giuseppe Biancani (1615), trataron de restablecer las matemáticas al orden de las ciencias causales.

Las dos tesis fundamentales de este debate, según Paolo Mancosu (1992), son:

1. ¿Cuál es la relación entre la lógica aristotélica y las matemáticas euclidianas? En otras palabras, ¿se pueden considerar las matemáticas, como a menudo se cree, el paradigma de la ejemplificación de la “ciencia aristotélica” descrito en los *Analíticos posteriores*? Esto llevó a un análisis cuidadoso, en los estándares del renacimiento, de la naturaleza de las demostraciones matemáticas.
2. Si las matemáticas no derivan su certeza por la forma de sus demostraciones, ¿cómo vamos a justificar su certeza y evidencia? (p. 242)

Los filósofos naturales como Alessandro Piccolomini, Pietro Catena y Benito Pereira tienen como punto de inscripción el ideal explicativo aristotélico, el cual se halla en la causalidad como se puede observar en los *Analíticos Segundos* (78a 25–40)² cuando Aristóteles distingue las demostraciones: *hoti y dioti*, es decir, el qué y el por qué (*quid y propter quid* en latín).³ Las explicaciones que ofrecen los matemáticos parece que no se ajustan a los criterios que se señalan en los *Analíticos Segundos*. De hecho, en el comentario a la traducción de las *Cuestiones Mecánicas* pseudoaristotélicas (*Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum*) realizada por Alessandro Piccolomini, éste sostiene la inferioridad epistemológica de

1 Entre ellos: la certeza de las matemáticas y su posible aplicación para la solución a problemas filosófico-naturales, su estructura lógica y su causalidad. Se pueden consultar también las disputas matemáticas de Hobbes con Jonh Wallis en: Schaffer (1988) y Jesseph (1999).
2 Utilizo la versión de Gredos cuya traducción es de Miguel Candel (1995)
3 Para ampliar este tema se puede consultar: Mancosu (1992); Ochoa (2013); Velilla (2015). Se pueden revisar también los trabajos de Giulio Cesare Giacobbe, a quien agradezco además por compartirme este material: Giacobbe (1972b, 1972a, 1972c, 1973, 1976, 1977).

las matemáticas en relación con la lógica porque “la certeza de las matemáticas no surge de la demostración *potissima*” (Piccolomini, 1565: 100) en que se demuestra, a partir de la demostración *quid y propter quid*, la existencia de un efecto y su causa (Velilla, 2015a). Aquí se inscribe el debate sobre la legitimidad de analizar la naturaleza en términos cuantitativos. En este contexto, los ataques a la certeza de las matemáticas se articularon por las diferentes posturas *reaccionarias* que planteaban la separación entre el análisis de la cantidad, del análisis del movimiento, el cual le corresponde a la filosofía natural. En efecto, los filósofos naturales como los arriba mencionados, insisten en preservar la separación entre las matemáticas y la filosofía natural, sometiendo así a la primera a una subordinación con respecto a la segunda porque el énfasis se hace en que las matemáticas no son filosofía natural.

Precisamente, dicho énfasis se hace porque el conocimiento en sentido aristotélico, como lo caracterizó Piccolomini en su *Commentarium*, significa el conocimiento de las cuatro causas. Así, las cuatro causas pueden considerarse cuatro tipos de explicaciones de por qué una cosa es como es. La comprensión aristotélica de las matemáticas implica un estricto fundamento ontológico de éstas y de sus pruebas, mientras que, en el ámbito relacionista, las pruebas matemáticas se basan en las relaciones entre las figuras y la construcción particular de cada figura. Aquí se encuentra una singular diferencia entre las matemáticas según la perspectiva aristotélica y las matemáticas en la modernidad, las cuales se centrarían en el campo relacionista, lo que a largo plazo sería una condición preliminar para el reconocimiento de la geometría no euclidiana (Schöttler, 2012: 30).

La ciencia tal y como la concibe Aristóteles, exige que sus principios se refieran con el mismo género que sus objetos.⁴ La filosofía natural encaja en esta visión con facilidad, sin embargo, las matemáticas presentan un problema porque aplican sus principios a fenómenos naturales como los rayos visuales, sonidos, movimientos celestes, entre otros. Ahora bien, en la medida en que se aplican a estos objetos *qua* objetos geométricos, las matemáticas no presentarían este problema. Con esto se quiere mencionar que, si bien los rayos visuales no son idénticos a líneas geométricas ya que tienen diferentes propiedades cualitativas, en una ciencia subordinada se les trata como si tuviesen propiedades geométricas. En efecto, no se debe olvidar que el problema sobre la legitimidad de las matemáticas tiene su origen en si las demostraciones geométricas son capaces de demostraciones *potissimae*.⁵

4 Principio de homogeneidad. Cfr: Analíticos posteriores

5 Se puede ampliar el problema conceptual de los rayos visuales desde la Óptica. En esta disciplina se considera que tienen propiedades geométricas y por lo tanto se pueden aplicar a ellos este tipo de

Ahora bien, el punto central es que las prácticas matemáticas, esto es, el manejo conceptual, las explicaciones, el uso de los objetos, los discursos institucionales sobre su incorporación en los programas de estudio de las universidades, etc., se transforman con la intención de incorporarlas en la filosofía natural. No obstante, en las narrativas clásicas de la historia de la ciencia se asume, sin explicar los obstáculos, transformaciones y errores de su incorporación en las investigaciones filosófico–naturales, que las matemáticas son una disciplina central para la constitución de la Revolución científica de los siglos XVI y XVII. Alexandre Koyré, por ejemplo, considera que el desarrollo de una teoría explicativa de los fenómenos naturales es central para la conformación de la ciencia, y observa que el lugar de la ciencia aristotélica, va a ser ocupado por los desarrollos teóricos de Copérnico, Galileo, Kepler y Newton. Este enfoque historiográfico característico de las “grandes narrativas” pretende capturar un momento histórico en una afirmación general como la “matematización de la naturaleza”. Sin embargo, la relación entre las matemáticas y la filosofía natural debe atender a los contextos sociales y culturales de producción del conocimiento, lo que la hace ser una situación mucho más variada y compleja que obedece, precisamente, “no a una matematización de la naturaleza sino a formas de matematización de la filosofía natural” (Velilla: 2015b).

En la anterior línea de análisis se inscriben los trabajos de Peter Dear. En su libro *Revolutionizing the sciences* (2009) sostiene que el objetivo del siglo XVII se encontraba en el marco de la creación de un nuevo universo y una nueva filosofía natural. Mientras la ciencia moderna se desarrollaba proyectando sus objetivos en un conocimiento operativo y práctico, los conceptos fundamentales y/o constitutivos de la ciencia tradicional fueron objeto de una revisión. Asimismo, en su trabajo *Discipline and experience* (1995), ofrece un enfoque revisionista sobre la matematización de la filosofía natural resaltando sus aspectos sociales e institucionales de producción de conocimiento. Aquí es preciso recordar que las explicaciones matemáticas tenían un estatus sociocognitivo menor en relación con la filosofía natural porque no se referían a las esencias ni a las causas aristotélicas, por el contrario, las investigaciones filosófico–naturales tenían como objeto de estudio los procesos cualitativos. Por este motivo, la “matematización de la naturaleza” no puede abarcar de una forma general una situación donde emergen

demostraciones. La demostración *potissima* (*demonstratio potissima*) es la que alcanza el mayor grado de certeza en tanto logra proporcionar al mismo tiempo el conocimiento de la causa y el efecto (Velilla, 2015a).

cambios conceptuales y prácticos sobre las formas de matematización de la filosofía natural, entendida ésta no como formas —ideas— platónicas sino como formas históricamente construidas.

Como he dicho, uno de los factores importantes en el nacimiento de la ciencia moderna es la revisión crítica que se hizo a la filosofía aristotélica durante los siglos XVI y XVII. Como parte de estas formas de matematización de la filosofía natural surgieron dos tesis relevantes: por un lado la tesis según la cual las matemáticas no son ciencia, y por otro, la reacción a ésta sugiriendo que sí son ciencia incluso dentro del marco aristotélico porque sí responden a causas. Aquí cobra importancia el debate conocido como *De quaestio de certitudine mathematicarum*, que en principio tuvo su difusión en Italia y se fue extendiendo hacia Francia y Portugal, pasando más tarde por Inglaterra y Polonia. Sin embargo, más allá de la difusión que alcanzó este debate, como lo menciona Nicholas Jardine (1988), su importancia se inscribe también en el problema de la continuidad entre las nuevas ciencias y epistemologías del siglo XVII y sus primeros desarrollos. Jardine plantea que los debates del siglo XVI sobre la certeza de las matemáticas han sido poco estudiados, pero que éstos se reflejan en el tratamiento del estado de las matemáticas por Clavius, Biancani y Galileo, los cuales combinan la certeza y las demostraciones matemáticas con énfasis en el importante papel de éstas en el estudio de la naturaleza.

2. Galileo Galilei: matemáticas y filosofía natural

En esta sección del texto indagaré sobre las prácticas matemáticas para producir una explicación válida en la filosofía natural. Es decir, atendiendo a un contexto particular como lo es el de Galileo Galilei, mostraré que sus prácticas —conceptos, experimentos, discusiones, testificaciones— se redefinen en relación con el aristotelismo escolástico. El problema es que las explicaciones matemáticas no forman parte de la filosofía natural y, por ello, aunque se trabaja con conceptos matemáticos que no son nuevos en los siglos XVI y XVII, los usos y prácticas de los matemáticos varían con el propósito de obtener el mismo estatus sociocognitivo de los filósofos naturales.

Bertoloni–Meli (2006) problematiza esta redefinición atendiendo a la siguiente pregunta: ¿Cuáles fenómenos se pueden describir de una forma matemática? Aquí plantea que una cosa es sostener que el movimiento de una bala de cañón o el flujo del agua en un río se puede describir en términos de cualidades, pero otra muy

distinta es producir una explicación cuantitativamente rigurosa del fenómeno en cuestión. No obstante, el punto no es si los fenómenos pueden o no describirse matemáticamente, de hecho, las matemáticas mixtas, como la astronomía, ya tenían esa función. El problema es si esta descripción puede constituir una explicación en la filosofía natural. Precisamente esto es lo que está en debate, a saber, cómo cambió la noción de explicación y cuáles son los presupuestos filosóficos de este giro epistemológico. Aquí se inscribe el problema del rigor matemático frente al físico, o de otro modo, cómo las matemáticas se incorporan a una nueva física que tiene un lenguaje matemático y una base empírica, lo cual sería un sello distintivo respecto de la física especulativa y cualitativa del linaje aristotélico.

Sin embargo, sostener que las matemáticas se incorporan a una nueva física que tiene un lenguaje matemático y una base empírica, como lo sostiene la narrativa histórica tradicional, es problemático. Nociones como “física”, “matemáticas” y “experiencia”, ocuparon un lugar central en las concepciones sobre la investigación natural en los siglos XVI y XVII. Estas nociones tomaron su vía a partir de la filosofía escolástica de la Edad Moderna, colegios y universidades tanto protestantes como católicos. Según esto, se puede afirmar que ninguna de estas tres nociones aparecieron como “recién llegadas” al discurso y la práctica intelectual, lo que cambió fueron las caracterizaciones y prácticas que muchos filósofos, en particular los practicantes de las matemáticas clásicas (astronomía, mecánica y óptica), habían comenzado a ofrecer en virtud de sus relaciones mutuas (Dear, 1995).

Galileo fue uno de los filósofos naturales que vio en las matemáticas un modo adecuado de explicar todos los fenómenos físicos sin recurrir a las ciencias ocultas. Adicionalmente, Galileo intentó promover el copernicanismo no sólo aportando pruebas y los argumentos a su favor, sino también debatiendo los argumentos que presentaban en su contra, y trató de promover su propia filosofía de inspiración matemática no sólo por los argumentos en su apoyo, sino también mediante la exposición de las deficiencias del enfoque aristotélico (Henry, 2011). De esta manera, Galileo al mostrar cómo se pueden utilizar las matemáticas para revelar verdades reales sobre el mundo físico, fue uno de los más grandes de aquellos primeros pensadores modernos que quitaron la barrera tradicional mantenida por la escolástica aristotélica, “entre una filosofía de la naturaleza supuestamente basada en causas físicas y una matemática que fue vista como meramente instrumental” (Henry, 2011: 4). A continuación voy a señalar algunos puntos importantes de la geometría de Galileo.

Galileo utiliza una geometría con base en proporciones que es comparativa y relacional. Esto quiere decir que da cuenta de una cosa mostrando su relación con otra, identifica ciertos patrones y regularidades. A esto le subyace una comparación cuantitativa. En este sentido, en *De motu*,⁶ Galileo trató de demostrar las insuficiencias de la teoría aristotélica de los movimientos naturales. Allí propone que sólo debe haber una teoría causal del movimiento natural donde lo que se necesita saber es la relación proporcional del peso por el volumen de un cuerpo, —concebido, según Machamer (1998) como la fuerza causada por el peso— al peso por volumen de su medio circundante. Lo que hace Galileo es *transformar* un problema de caída libre en un problema para ser abordado en términos de cuerpos flotantes. Sin embargo, ¿qué explica la flotabilidad de los cuerpos que no es posible explicar por caída libre? La relación entre el peso por volumen de un cuerpo al peso por volumen de su medio circundante, podría describir las fuerzas que actúan sobre el cuerpo para hacer que vaya hacia arriba, abajo o permanecer en reposo.⁷ En hidrostática se puede observar cuándo el cuerpo está subiendo, cayendo o flotando en un medio (Drake & Drabkin, 1969; Machamer, 1998). De esta manera, fenómenos como la caída y la flotación deberían ser vistos como un problema asociado al equilibrio. Precisamente en la sección 9 del *De motu* Galileo sostiene que “todas las cosas que se han demostrado anteriormente son consideradas desde un punto de vista físico, y el movimiento natural de los cuerpos se reduce a los pesos en equilibrio”. En efecto, el movimiento hacia abajo es mucho más natural que el movimiento ascendente porque éste depende del peso del medio (el punto no es que sean movimientos diferentes, sino que se pueden explicar de la misma manera, lo cual es opuesto al argumento aristotélico). Sin embargo, el movimiento hacia abajo es causado por la pesadez inherente al cuerpo. Aparte de cualquier

6 Aquí utilizo la traducción del latín al inglés realizada por Raymond Fredette, disponible en Max Planck Institute for the History of Science: (Galilei, n.d.).

7 José Romo sostiene que cuando Galileo aborda su teoría del movimiento natural, en contra de lo que su regla indicaba, la velocidad de caída no se mantenía uniforme sino que aumentaba desde el comienzo del movimiento. Este aumento de velocidad es explicado mediante la teoría de la fuerza impresa. Se inicia con la regla según la cual la velocidad de caída es proporcional a la diferencia entre el peso específico del cuerpo y el del medio. Como la velocidad de caída es menor al principio del movimiento, debe ocurrir que el peso específico haya disminuido. Pero el volumen del cuerpo que cae es constante, luego la disminución debe ocurrir en su peso. El punto central es saber a qué se debe esa disminución en el peso. “No puede ser *causada* por un aumento del peso del medio ya que éste permanece constante en el movimiento” (Romo, 1985, p. 31). En consecuencia, tiene que haber una *causa extrínseca* que convierta el cuerpo en ligero *per accidens*. Esta causa es precisamente la fuerza impresa.

consideración del medio, todas las cosas se moverán hacia abajo. Al igual que en una balanza, el menos pesado es desplazado forzosamente hacia arriba por el más pesado (Machamer, 1998).⁸ Galileo lo plantea así en la sección 6:

En el caso de los cuerpos que se mueven naturalmente, como en el caso de la balanza, la causa de todos los movimientos hacia arriba o hacia abajo puede referirse sólo al peso... lo que se mueve es movido, por así decirlo, por la fuerza y por la acción de la extrusión del medio. (*De motu*, Capítulo 6)

Adicionalmente, Galileo sostiene que el movimiento natural de los cuerpos puede reducirse al movimiento de los pesos en la balanza:

En lo que se explica la correspondencia que tienen los móviles naturales con los pesos de una balanza. Así, primero examinaremos las cosas que suceden en el platillo, para que podamos mostrar que todas estas cosas suceden en el caso de móviles naturales.

La línea *ab* se entiende como la construcción de la balanza, cuyo centro por encima del cual se produce el movimiento, es *c*, que divide precisamente la línea *ab* en dos; y deje que dos pesos, *e* and *o*, sean suspendidos de los puntos *a* y *b*. En el caso del peso *e* tres cosas pueden suceder: que esté en reposo, que se mueva hacia arriba o que se mueva hacia abajo. (*De motu*, Capítulo 6. Traducción mía)

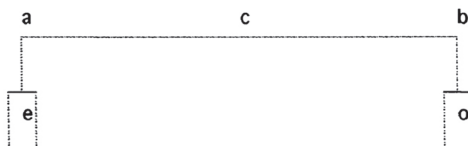


Figura 2. Pesos de una balanza. Tomado de: (*De motu*, Capítulo 6)

Como se puede observar en esta representación, para el caso del peso *e* se tienen tres opciones: (1) que esté en reposo, (2) moviéndose hacia arriba o (3) moviéndose hacia abajo. En efecto, esto sucederá toda vez que *e* tenga el mismo peso que *o* para el primer caso; que *e* sea menos pesado que *o* para el segundo caso y, que *e* sea más pesado que *o* para el tercer caso. El punto aquí, es que la

8 Efectivamente lo que se identifica aquí es una relación de la estática (ciencia del equilibrio) y el concepto de pesantez de los cuerpos. Para el caso del plano inclinado, como lo plantean Rodríguez y Romero (2014), la tendencia de los cuerpos a descender se debe considerar de acuerdo a las diversas situaciones donde se presenta, puesto que, como lo propone Galileo, un cuerpo va reduciendo su tendencia a descender toda vez que disminuye la inclinación del plano, no hay tendencia al descenso si éste es horizontal y se alcanza la máxima siguiendo la vertical.

balanza representa el movimiento hacia arriba y hacia abajo debido al peso, pero de una forma diferente: el movimiento hacia arriba de e se produce a causa del peso de o y, el movimiento de e hacia abajo se produce a causa de su propio peso (*De motu*, capítulo 6).

Como lo sostiene Machamer (1998), esta geometría proporcional permite pensar en términos de movimiento relativo (o en relación con), porque sólo cuando un peso es más pesado que otro la balanza se mueve. Cuando las fuerzas son iguales no hay movimiento observable, aunque hay una fuerza que actúa. Sin embargo, aquí se identifica un problema: el equilibrio exigía subjetividad. Cualquier persona podría mirar la balanza y juzgar, pero esto era insuficiente dado que la objetividad era necesaria. La pregunta se enfoca en un problema de equilibrio: ¿Cuál es la causa de (o la fuerza que causa) que algo se desequilibre?⁹ ¿qué fuerza hará que vuelva a estar en equilibrio? ¿dónde está el punto de equilibrio? Aquí cobran importancia los diagramas geométricos dado que para abordar estos problemas Galileo empleaba líneas, ángulos inscritos, circunscritos o tangentes a los círculos. Según Machamer éstos literalmente describían un verdadero equilibrio, pero también le permitían usar las reglas de la geometría para las construcciones que iban más allá de estos problemas, por ejemplo, la parábola como la curva que describe los proyectiles.

9 Como se observa en este artículo, un estudio de caso puede evidenciar la transformación de las prácticas de galileo en la filosofía natural, ello implica, también, la redefinición de los conceptos con los que allí trabaja, como la noción de causalidad. En efecto, en los trabajos de Galileo se puede observar el empleo de esta noción. Ducheyne la denomina “una noción intervencionista”, donde las relaciones causales pueden ser descubiertas explorando y manipulando activamente los procesos naturales (Ducheyne, 2006). Asimismo, Burt sostiene que Galileo trató los movimientos como las causas secundarias de los fenómenos naturales y las fuerzas que los producen como sus causas primarias. Esta última –la fuerza– al ser difícil de conocer, se evidencia mediante sus efectos expresados en el movimiento: “Parecía haber alguna realidad invisible presente que produjera la aceleración observada de los cuerpos. Los movimientos atómicos se tratan simplemente como causas secundarias de los acontecimientos, siendo las causas primarias o últimas concebidas siempre en términos de fuerza” (Burt, 1954, p. 99). De igual manera, Machamer en su artículo “Galileo y las causas” plantea que la noción de causa que utiliza Galileo es la de la tradición de las ciencias mixtas (“scientiae mixtae”): “Intentaré demostrar que, si bien Galileo usa ese lenguaje causal con una intención seria, hay un sentido en el que Drake tiene razón en cuanto a la indiferencia de Galileo por las causas; Galileo es, en su mayor parte pero no siempre, despreocupado por causas extrínsecas y eficientes. Este es un aspecto familiar para aquellos que se ocupan de las ciencias mixtas. Galileo se preocupa mucho por las causas formales y finales, y a veces las causas materiales” (Machamer, 1978, p.162). Otro enfoque de análisis sobre la explicación causal en el contexto galileano es el que propone Alexandre Koyré en *Études Galiléennes*, donde dice que para Galileo no es importante encontrar la causa de por qué los cuerpos caen, sino la esencia del movimiento de la caída o su definición. Para ampliar este tema se puede consultar Koyré (1966).

El problema sobre el movimiento en el *De motu*, que fue presentado mediante una teoría unificada de todos los movimientos, eventualmente falló en explicar una característica básica de éstos, a saber, la aceleración. El modelo arquimediano —la hidrostática— explicaba la diferencia en las velocidades de los cuerpos en cuanto a los desplazamientos ascendentes y descendentes, como una diferencia entre sus pesos específicos en relación con los medios en los que se movían. De igual forma, el modelo de equilibrio fue utilizado para visualizar la analogía entre el equilibrio y los movimientos ascendentes y descendentes, y experimentar con el mismo cuerpo a lo largo de planos de inclinación diferente. Sin embargo, los dos modelos no se correspondían porque uno considera pesos específicos, mientras que el otro, pesos absolutos. Además, no se tuvo en cuenta el efecto total del peso sobre el movimiento, ya que Galileo no incluyó en su modelo de equilibrio la distancia entre el peso y el centro del sistema.¹⁰ La velocidad, en cualquier caso, salió de la teoría como directamente proporcional al peso (específico) del cuerpo. Por lo tanto, sólo podría ser uniforme. Pero eso era incompatible con los hechos conocidos por la experiencia (Feldhay, 1998).

El anterior argumento muestra que el estudio de las prácticas, que incluye los usos conceptuales, el manejo de los instrumentos, las formas como se presentan los enunciados, etc, no es coherente tal y como lo han mostrado las “grandes narrativas”. Por el contrario, lo que se observa en el *De motu* es un proyecto de investigación cambiante y dependiente de las prácticas y sus transformaciones.

Asimismo, en *El ensayador* (1960), la geometría constituye para Galileo el medio para presentar verdades concluyentes:

Mis opiniones se contradecían sin el menor aprecio por el hecho de que lo que había expuesto estaba apoyado y probado por demostraciones geométricas; y tal es la fuerza de la pasión de los hombres que no se dieron cuenta de cómo la contradicción de la geometría es una franca negación de la verdad (Galilei, 1960, p. 1).

10 Por otro lado, en *Le Mecaniche* (1891), Galileo considera que el equilibrio, además del peso, está en relación con el acercamiento o distanciamiento al centro de la tierra. Esta idea la aplica al plano inclinado:

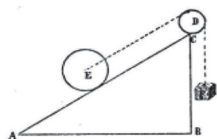


Figura 3. Acercamiento o distanciamiento al centro de la tierra en el plano inclinado. Tomada de: (Galilei, 1891, p. 185)

Según lo anterior, la geometría puede cumplir dos roles, a saber, servir como método de investigación y de demostración porque resuelve problemas y además prueba las causas de los fenómenos físicos. Aquí se empieza a configurar una forma de comprensión de los fenómenos naturales basada tanto en el discurso teórico como en la experiencia. Precisamente, como lo propone Machamer (1998), la inteligibilidad o tener una verdadera explicación para Galileo, consistía en incluir un modelo mecánico o representación del fenómeno, porque replicando o reproduciendo los efectos mediante la construcción de un artefacto, se lograría llegar a la verdadera causa en tanto los efectos se hacían visibles.

Así las cosas, hay una correlación entre las matemáticas y la experiencia, en la cual el discurso matemático se puede representar gráficamente o mediante el funcionamiento de un artefacto. De esta manera, con el testimonio sensible, que ya de por sí comporta una mirada matemática, se pueden identificar ciertos accidentes y regularidades. Al respecto Salviati en el *Diálogo* sostiene:

[...] afirmo que en nuestro siglo disponemos de accidentes y observaciones nuevas y de tal carácter, que no dudo que si Aristóteles viviese hoy cambiaría de opinión. Lo que se deduce claramente de su propio modo de filosofar. Puesto que, cuando escribe que cree que los cielos son inalterables, etc., porque no se ha visto generar ninguna cosa nueva o disolverse las antiguas, implícitamente nos está dando a entender que si hubiese visto uno de estos accidentes, habría opinado lo contrario y antepuesto, como conviene, la experiencia sensible al razonamiento natural [...] estoy seguro de que primero procuró asegurarse cuanto fuera posible de las conclusiones mediante los sentidos, las experiencias y las observaciones, y que después trató de buscar los medios para poder demostrarla, porque así se hace usualmente en las ciencias demostrativas. [...] Y la certeza de la conclusión ayuda no poco a encontrar la demostración, refiriéndonos siempre a las ciencias demostrativas. (Galilei, 1994, p. 47)

Este planteamiento resulta importante dado que Galileo le atribuye especial relevancia a la observación, pero toda vez que ésta esté acompañada de un razonamiento sobre lo observado: un razonamiento matemático. De hecho, en la segunda jornada del *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* (2003), también se concede importancia al razonamiento matemático en la investigación de los fenómenos naturales:

Sagredo: ¿No conviene confesar que la geometría es el más poderoso de todos los instrumentos, para aguzar el ingenio y disponerlo a discurrir y especular correctamente? ¿No era razonable que Platón quisiera que sus discípulos estuvieran de antemano bien instruidos en matemáticas? Yo había comprendido perfectamente la dificultad de la palanca, y cómo aumentando o disminuyendo su longitud, aumentaba o disminuía el momento de su fuerza y de su resistencia; con todo, en la determinación del presente problema no era pequeño, sino grande, mi engaño

Simplicio: Verdaderamente comienzo a comprender que la lógica, aunque instrumento prestantísimo para regular nuestro modo de discurrir, no alcanza a la agudeza de la geometría, en cuanto a incitar nuestra mente a la investigación.

Sagredo: A mí me parece que la lógica enseña a conocer si los raciocinios y demostraciones ya hechos y hallados proceden concluyentemente, pero que ella nos enseñe a descubrir los raciocinios y las demostraciones concluyentes, esto no lo puedo creer. (Galilei, 2003: 186–187)

Como se puede notar, la geometría aparte de desempeñar un papel fundamental en el proceso investigativo, se ve acompañada del razonamiento lógico con el fin de corregir los procesos demostrativos. Sin embargo, el énfasis que además se debe hacer sobre el uso de las matemáticas en Galileo es su relación con la experiencia y el experimento. Es decir, el punto que debe ser comprendido es que la evidencia proporcionada por los experimentos se da junto con la certeza de las demostraciones matemáticas.

Ahora bien, ¿Hay un cambio en las matemáticas de Galileo? ¿Las matemáticas por parte de Galileo se deben entender sólo en el sentido de cálculos y demostraciones geométricas? ¿Hay un cambio en la situación institucional y social de los profesionales en matemáticas y de la práctica de éstas en el siglo XVI? ¿Es esto importante para comprender correctamente la posición desde la cual Galileo estaba trabajando y escribiendo?

Como bien lo plantea Bertoloni–Meli (2006) una de las formas de comprender la relación entre las matemáticas y la filosofía natural es haciendo énfasis en la manipulación intelectual y material de herramientas como la balanza, el plano inclinado y el péndulo. Para Bertoloni–Meli, las nuevas disciplinas matemáticas y sus principios se pueden abordar estudiando el manejo matemático, experimental y conceptual de los objetos. No obstante, en lugar de considerar nuevas disciplinas matemáticas en la misma línea de la narrativa historiográfica tradicional, optaré por proponer una redefinición sociocognitiva de las prácticas matemáticas de Galileo que puede ser abordada apuntando a los usos matemáticos y prácticos de los objetos.

Mediante la introducción de algunos puntos de vista filosóficos y sociológicos sobre la relación entre las matemáticas, la experiencia y el experimento en el contexto galileano, trataré de rastrear una ciencia matemática en su propio contexto. Esto quiere decir que parto de la hipótesis según la cual, sí hay una redefinición de las prácticas matemáticas de Galileo porque éstas no tienen un componente estático, sino que las prácticas redefinen las nociones que ellas comportan. Las matemáticas galileanas le sirven a la filosofía natural, se redefinen no sólo sus prácticas, sino que

se redefinen sociocognitivamente como el estudio de las matemáticas en la filosofía natural, entendida ésta como el análisis del movimiento y sus causas. Aquí entra la rivalidad entre matemáticos y filósofos naturales. Cuando se redefine la práctica de las matemáticas se redefine epistemológicamente el alcance de la filosofía natural. Así las cosas, el estudio del movimiento es lo matematizable.

2.1 Prácticas y objetos

Las prácticas, como lo sostienen Martínez y Huang (2011), son una unidad de análisis con un rango de aplicación más amplio porque nos permite atender a algo más que normas formalmente expresables en la relación sobre evidencia y teoría. Efectivamente, un estudio centrado en las prácticas podría dar cuenta de la racionalidad científica, toda vez que no se enfoca sólo en la teoría sino en el conjunto de normas que estructuran las prácticas, por ejemplo, el manejo y desarrollo de aparatos y sistemas de representación. Éstos están constituidos por factores psicológicos, históricos y sociológicos con los que se reconocen características de la ciencia como su dinámica histórica y la institucionalidad. A continuación expondré una de las formas de abordar mi hipótesis sobre la redefinición sociocognitiva de las matemáticas, a saber, apuntando a los usos prácticos de los objetos en el contexto galileano.

En el caso de la fuerza de percusión, cuando un cuerpo cae desde una altura mayor adquiere una mayor velocidad y produce una depresión significativa sobre la superficie de un objeto. En consecuencia, la continuidad del espacio garantiza la continuidad de la velocidad medida por las depresiones producidas (Bertoloni–Meli, 2006). Así lo señala Galileo (2003):

“[...] Posa tú un cuerpo sobre materia blanda, dejándolo hasta que oprima cuanto le sea posible con su simple y sola gravedad; es evidente que levantándolo un codo o dos, y dejándolo caer después sobre la misma materia, hará con el choque, una nueva presión mayor que la primera, hecha con el solo peso; el efecto estará ocasionado por el móvil que cae, al caer junto con la velocidad adquirida en la caída; efecto que será cada vez más grande, a medida que la altura de donde procede el choque sea mayor, o sea que a medida que la velocidad del cuerpo que choca sea más grande. Por consiguiente, nosotros podemos, sin error, deducir de la calidad y cantidad del choque, la cantidad de velocidad de un grave en caída. Pero decidme, amigos: el mazo que dejado caer sobre una estaca, desde una altura de cuatro codos, la hinca en tierra, digamos cuatro dedos, si viniera de una altura de dos codos la clavaría mucho menos, y menos todavía si viniera de la altura de un codo, y menos todavía si viniera de la altura de un palmo; y finalmente, levantándolo un solo dedo, ¿qué más hará que sí, sin percusión, lo hubiésemos hecho descansar sobre ella? Ciertamente muy poco más. Y sería operación del todo imperceptible, si lo elevásemos tan solo al grueso de una hoja. Y dado que el efecto de la percusión depende la velocidad del mismo percuyente, ¿quién podrá dudar que es muy lento el movimiento, y más que insignificante la velocidad, cuando su efecto es imperceptible? (pp. 224–225)

Galileo aquí se refiere a la percusión y establece una relación con el estudio del movimiento. Allí establece una proporción entre la altura de la caída y el efecto de la percusión. De esta manera, se puede concluir que la altura de caída es proporcional a la velocidad. De hecho, Galileo afirmó que la velocidad de un cuerpo que cae se puede determinar por la percusión que produce (Drake, 1978). Esta idea se encuentra en la carta que Galileo le escribe a Paolo Sarpi en 1604:¹¹

Reflexionando acerca de los problemas del movimiento, para los cuales, y con el fin de demostrar los accidentes observados por mí, me faltaba totalmente un principio indubitable que pudiese poner como axioma, he llegado a una proposición que tiene mucho de natural y evidente; y supuesta ésta, demuestro después el resto, particularmente que los espacios atravesados por el movimiento natural están en proporción doble del tiempo, y por consiguiente los espacios atravesados en tiempos iguales son como los números impares *ab unitate* y las otras cosas. Y el principio es éste: que el móvil natural va aumentando de velocidad en la misma proporción en que se aleja de su punto de partida; verbi gratia, si un grave cae del punto *a* por la línea *abcd*, supongo que el grado de velocidad que tiene en *c* es al grado de velocidad que tenía en *b* como la distancia *ca* es a la distancia *ba*, y así, por consiguiente, tendrá en *d* un grado de velocidad mayor que en *c* en la medida en que la distancia *da* es mayor que la distancia *ca*. (Carta a Sarpi, 16 ottobre 1604, Opere, [1900], Vol. X, p. 115)¹²



*Galileo afirmó que un cuerpo que cae a través de *ad* tiene en cada punto un grado de velocidad proporcional a la distancia recorrida, *ab* en *b*, *ac* en *c*, y *ad* en *d*.*

Figura 4. Diagrama de la carta de Galileo a Sarpi.
Tomado de: (Carta a Sarpi, 1604, Opere, Vol. X, p. 115)

Como se puede observar, Galileo afirmó que un cuerpo que cae a través de *ad* tiene en cada punto un grado de velocidad proporcional a la distancia recorrida, *ab*

11 Utilizo la versión en italiano que se encuentra en: Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale Sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia, Volumen X, Firenze, Tipografia di G. Barbéra, (1900). Disponible en la biblioteca digital de la Biblioteca Nacional de Francia.

12 Ripensando circa le cose del moto, nelle quali, per dimostrare li accidenti da me osservati, mi mancava principio totalmente indubitabile da poter porlo per assioma, mi son ridotto ad una proposizione la

en *b*, *ac* en *c*, y *ad* en *d*. Es decir, la velocidad va aumentando proporcionalmente a la distancia recorrida desde el reposo. Aquí, el aumento de velocidad se vuelve una característica central de la caída de los cuerpos, ya no es un fenómeno accidental como en el *De motu* sino un fenómeno distintivo que permite comprender y definir la caída libre (Romo, 1985). Adicionalmente, uno de los aspectos importantes de esta carta es la formulación —errónea— de la caída de los cuerpos, un principio “natural y evidente” como lo menciona Galileo. En la carta a Sarpi, Galileo sostiene que ya conoce los accidentes de ese movimiento natural: a) “los espacios atravesados por el movimiento natural están en proporción doble del tiempo” y b) “los espacios atravesados en tiempos iguales son como los números impares *ab unitate*”. De esta manera, el principio propuesto para demostrar los accidentes es: “que el móvil natural va aumentando de velocidad en la misma proporción en que se aleja de su punto de partida”.

Ahora bien, si en la carta a Sarpi el principio aparece como natural y evidente, en el folio 128r¹³ del volumen 72 de los manuscritos galileanos, que además ha sido ubicado en el mismo año de la carta a Sarpi, se ofrece una demostración sobre la ley de caída con el principio erróneo mediante una justificación empírica. A continuación señalaré el principio que se corresponde con el de la carta a Sarpi y su justificación:

1

Io suppongo (et forse potrò dimostrarlo) che il grave cadente naturalmente vada continuamente accrescendo la sua velocità secondo che accresce la distanza dal termine onde si parti [...]

Traducción:

2

Supongo (y tal vez pueda demostrarlo) que el grave que cae naturalmente va aumentando continuamente su velocidad a medida que aumenta la distancia al punto desde donde partió.

Questo principio mi par molto naturale, et che risponda a tutte le esperienze che veggiamo negli strumenti et machine che operano percotendo, dove il percuziente fa tanto maggiore effetto quanto da più grande altezza casca [...]

quale ha molto del naturale et dell'evidente; et questa supposita dimostre poi il resto, cioè gli spazzii passati dal moto naturale esser in proporzione doppia dei tempi, et per conseguenza gli spazzii passati in tempi eguali esser come i numeri impari *ab unitate*, o le altre cose. Et il principio è questo: che il mobile naturale vadia crescendo di velocità con quella proportion che si discosta dal principio del suo moto; come v. g. cadendo il grave dal termine a per la linea *abcd*, suppongo che il grado di velocità che ha in *c* al grado di velocità che hebbe in *b* esser come la distanza *ca* alla distanza *ba*, et cosi conseguentemente in *d* haver grado di velocità maggiore che in *c* seconda che la distanza *da* è maggiore della *ca*. (Carta a Sarpi, 1604, Opere, Vol. X, p. 115). La traducción es mía.

13 El folio 128r de Galileo (1604) se encuentra disponible en: Biblioteca Nazionale Centrale y el Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.

Traducción:

Este principio me parece muy natural, y que corresponde a todas las experiencias que vemos en los instrumentos y máquinas que obran por percusión, en los que el percutor hace un mayor efecto cuando cae de una mayor altura.

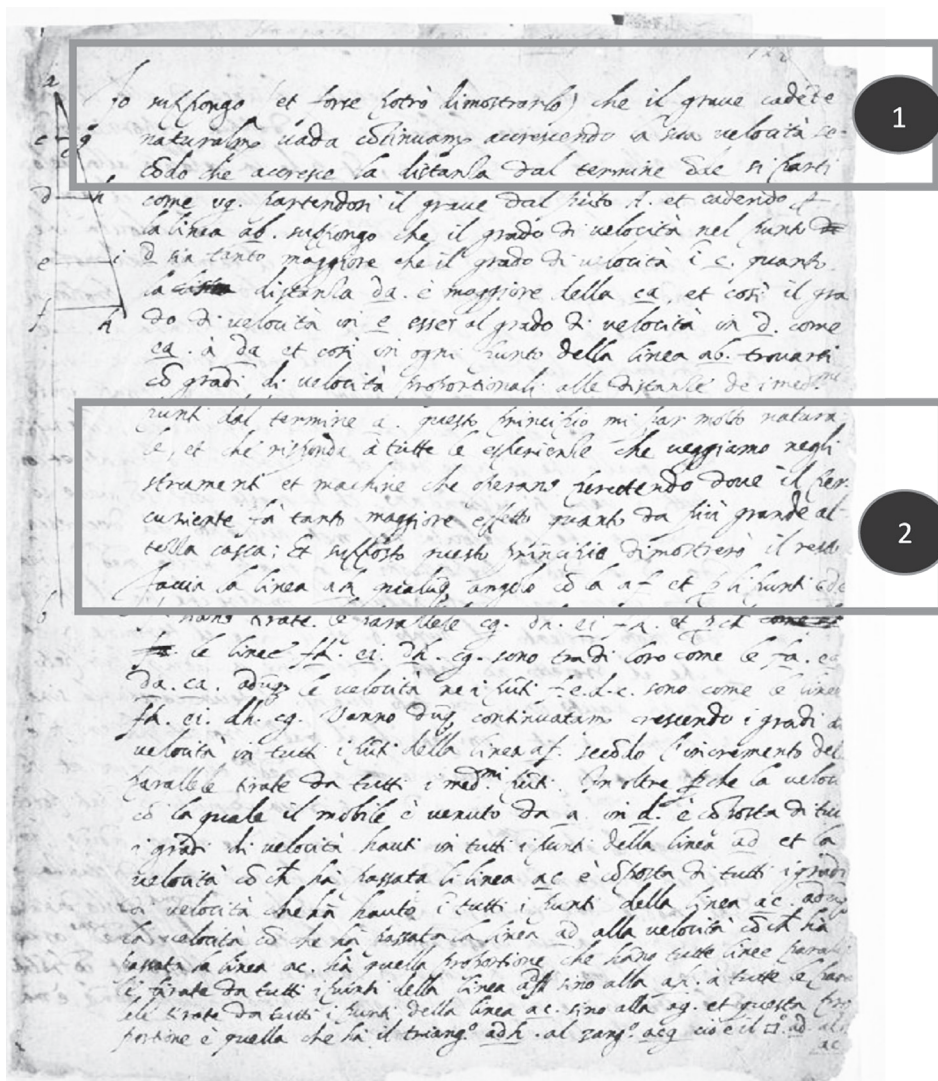


Figura 5. Folio 128r

Disponible en: Biblioteca Nazionale Centrale/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.

Es claro que el principio propuesto es incorrecto porque la velocidad no aumenta según la distancia sino con el tiempo transcurrido. Sin embargo, la justificación empírica que ofrece Galileo estriba en el efecto del choque, el cual puede ser comprendido mediante la velocidad final del cuerpo, precisamente porque considera que el efecto o el impacto de la percusión será mayor toda vez que la altura de donde procede también lo sea. Aquí es donde se halla la relación entre velocidad y altura. El punto es que Galileo la considera como una proporcionalidad lineal $v \propto h$ y no respecto de la raíz cuadrada de la altura $v \propto \sqrt{h}$ como lo señala Romo (1985).

Independientemente de la verdad o falsedad de los principios, lo que me interesa señalar es que la formulación de Galileo sobre la ley de la caída es mucho más compleja que su presentación en los *Discorsi (Diálogos)* de 1638. No se trata de un proceso lineal y exitoso, sino de diversas situaciones que involucran obstáculos, errores y transformaciones. Precisamente los folios y las cartas exhiben periodos de transición así como los obstáculos y dificultades. Efectivamente, en la carta a Sarpi y en el folio 128r Galileo utiliza el principio incorrecto donde la velocidad va aumentando proporcionalmente a la distancia recorrida desde el reposo: $v \propto s$

No obstante, en la carta a Belisario Vinta escrita el 7 de mayo de 1610, en la carta de Daniello Antonini del 9 de abril de 1611 y en los folios 152r y 107v, ya se puede rastrear el principio correcto, y nótese que es mucho antes de la publicación de los *Discorsi* en 1638. A continuación voy a mostrar estos cuatro momentos. Aunque el folio 152r ha sido fechado para el periodo 1603–1604, es decir, antes de la carta a Belisario Vinta, de la carta a Sarpi, de la carta de Antonini y del folio 128r, lo abordaré al final junto con el folio 107v debido a su carácter historiográfico problemático, en particular me remitiré a las cuestionadas tesis de Stillman Drake quien fue el que descubrió estos folios.

En la carta a Belisario Vinta escrita el 7 de mayo de 1610,¹⁴ se puede observar que Galileo ya conocía el principio correcto en tanto menciona la publicación del “De motu locali” (Galilei, 2003) donde se encuentra la definición correcta del movimiento uniformemente acelerado. Galileo en esta carta sostiene:

Las obras que tengo para finalizar son principalmente dos libros *De sistemate seu constitutione universi*, tema inmenso y lleno de filosofía, astronomía y geometría: tres

14 Utilizo la versión en italiano que se encuentra en: Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale Sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia, Volumen X, Firenze, Tipografia di G. Barbéra, (1900). Disponible en la biblioteca digital de la Biblioteca Nacional de Francia

libros *De motu locali*, ciencia totalmente nueva, en la que nadie, ni antiguo ni moderno, ha descubierto alguna de las leyes más notables que demuestro que existen tanto en el movimiento natural como en el violento: de ahí que pueda llamarlo razonablemente una ciencia nueva y descubierta por mí desde sus primeros principios. (Carta a Belisario Vinta, 1610, Opere, Vol. X, pp. 351–352)¹⁵

En efecto, Galileo durante los años 1602 y 1609 trabajó en los teoremas sobre el isocronismo del péndulo y sobre la caída de los cuerpos y sus problemas, los cuales como lo plantea Crombie (1990), debían fundar su nueva cinemática y dinámica que se publicaría en el tratado *De motu locali* en el *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638). En la obra referenciada en la carta a Belisario Vinta, Galileo plantea:

Se ha fijado la atención en algunas [propiedades] que son de poca importancia, como por ejemplo, que el movimiento natural [libre] de los graves en descenso se acelera continuamente; sin embargo, no se ha hallado hasta ahora en qué proporción se lleve a cabo esta aceleración; pues nadie, que yo sepa, ha demostrado que los espacios, que un móvil en caída y a partir del reposo recorre en tiempos iguales, retienen entre sí la misma razón que tiene la sucesión de los números impares a partir de la unidad. [...] Yo demostraré que esto es así, y también otras cosas muy dignas de saberse; y, lo que es de mayor importancia, dejaré expeditos la puerta y el acceso hacia una vastísima prestantísima ciencia, cuyos fundamentos serán estas mismas investigaciones, y en la cual, ingenios más agudos que el mío, podrán alcanzar mayor profundidades. [...] Entiendo por movimiento uniforme aquel cuyos espacios, recorridos por un móvil en cualesquiera (quibuscunque) tiempos iguales, son entre sí iguales. (Galilei, 2003: 213–214)

Y a partir de la definición correcta sobre el movimiento uniforme, Galileo pasa a considerar el movimiento naturalmente acelerado: “Llamo movimiento igualmente o uniformemente acelerado aquel que, a partir del reposo, va adquiriendo incrementos iguales de velocidad durante intervalos iguales de tiempo” (Galilei, 2003: 223).

La obra a la que se refiere Galileo en la carta a Belisario Vinta es precisamente los *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, donde Galileo expone su ciencia del movimiento que, como se ha caracterizado en la tradición historiográfica, aparece en 1638 en su estado de madurez más alto. En particular, en el *De motu locali* que se encuentra en la tercera y cuarta jornada,

15 Le opere che ho da condurre a fine sono principalmente 2 libri *De sistemate seu constitutione universi*, concetto immenso e pieno di Filosofia, astronomia e geometria: tre libri *De motu locali*, scienza interamente nuova, non avendo alcun altro, nè antico nè moderno, scoperto alcuno de i moltissimi sintomi ammirandi che io dimostro essere ne i movimenti naturali e ne i violenti, onde io la posso ragionevolissimamente chiamare scienza nuova e ritrovata da me sin da i suoi primi principi (Carta a Belisario Vinta, 1610, Opere, Vol. X, pp. 351–352).

Galileo propone con base en el *De motu aequabili* (movimiento uniforme), *De motu naturaliter accelerato* (movimiento naturalmente acelerado) y el *De motu proietorum* (movimiento de los proyectiles) un trabajo detallado sobre la ley de la caída con el principio correcto.

En la carta del 9 de abril de 1611 donde Daniello Antonini¹⁶ analiza una proposición de Galileo, se puede observar que este último ya conocía el principio correcto mucho antes de la publicación del *Discorsi* en 1638, ya que en la carta se menciona el principio con el que Galileo rectifica su formulación inicial: “He pensado algún tiempo en su proposición: un cuerpo que se mueve desde el reposo, aumentando su velocidad en proporción a sus distancias recorridas, debe ser movido instantáneamente”.¹⁷ Como lo sostiene Drake (1978) aunque la cita se encuentra en latín, esa proposición no se encuentra en los manuscritos de Galileo pero sí es el punto dominante para la refutación del principio erróneo en los *Discorsi*.

En el folio 152r,¹⁸ Galileo (1603/1604) utiliza una relación de proporción entre la velocidad adquirida en caída libre y la raíz cuadrada del espacio recorrido.

Uno de los argumentos más importantes de este folio es el siguiente:

3

Sit ut ba ad ad, ita da ad ac, et sit be gradus velocitatis in b, et ut ba ad ad, ita sit be ad cf; erit cf gradus velocitatis in c. Cum itaque sit ut ca ad ad, ita cf ad be, erit etiam ut [quadratum] ca ad [quadratum] ad, ita [quadratum] cf ad [quadratum] be: ut autem [quadratum] ca ad [quadratum] ad, ita ca ad ab; ut igitur ca ad ab, ita [quadratum] cf ad [quadratum] be: sunt ergo pun[c]ta e, f in parabola.

Traducción:

Como BA es a AD, sea DA a AC, y sea BE el grado de velocidad en B, y como BA es a AD sea BE a CF; CF será el grado de velocidad en C. Y como CA es a AD así es CF a BE, entonces como el [cuadrado] de AC es al [cuadrado] de AD, así será el [cuadrado] de CF al [cuadrado] de BE: adicionalmente, como el [cuadrado] de CA es al [cuadrado] de AD, así es CA a AB; el [cuadrado] de CF será al cuadrado de BE como CA es a AB: ergo los puntos E y F están en una parábola

16 Utilizo la versión en italiano que se encuentra en: Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale Sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia, Volumen X, Firenze, Tipografia di G. Barbéra, (1901). Disponible en la biblioteca digital de la Biblioteca Nacional de Francia

17 Ho pensato alcuna volta a quella sua propositione: *Mobile secundum proportionem distantie, a termino a quo movetur velocitatem acquirens, in instanti movetur* (Carta de Antonini a Galileo, 1611, Opere, Vol. XI, p.84).

18 El folio 152r de Galileo ha sido ubicado en el periodo de 1603–1604. Se encuentra disponible en: Biblioteca Nazionale Centrale y en el Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.

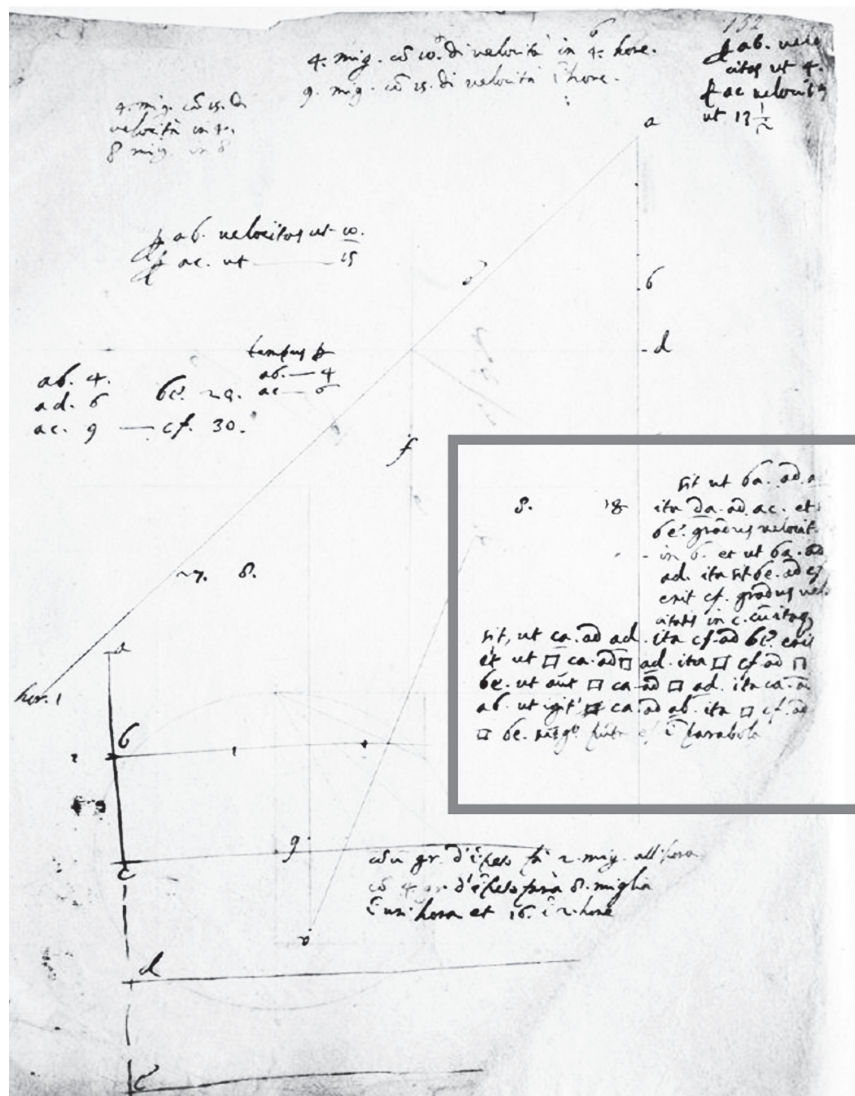


Figura 6. *Folio 152r*

Disponibile in: Biblioteca Nazionale Centrale/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze

El punto central de este argumento es que BE y CF representan los grados de velocidad en B y C. Aquí Galileo sostiene que $\frac{BE}{CF} = \frac{BA}{AD}$ y CF será el grado de velocidad en C. Según Romo (1985), si se utiliza notación moderna entonces V_1 y V_2 serán los grados de velocidad en B y C, y S_1 y S_2 serán las distancias AB y AC. Para este caso, $\frac{BE}{CF} = \frac{BA}{AD}$ será $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$

Así las cosas, es claro que Galileo en este folio afirma que en la caída libre se da

$$v \propto \sqrt{s}$$

y no lo que propuso en la carta a Sarpi:

$$v \propto s$$

De esta manera, Galileo deriva $v^2 \propto s$ a partir de $v \propto \sqrt{s}$. Si esto se relaciona con $s \propto t^2$ que es el principio correcto de la ley de caída de los cuerpos, entonces se obtiene la formulación correcta del movimiento acelerado que aparece en 1638: $v \propto t$

Según Drake (1975a) cuando Galileo le escribe a Sarpi en 1604, no consideró las velocidades adquiridas como cuadradas, sino que asumió la cuadratura como parte del significado de la palabra *velocita*. Así, propuso que la *velocita* era proporcional al espacio recorrido desde el reposo, y la justificación empírica fue que en los instrumentos de percusión el efecto es mayor (doble) al caer de una altura mayor (doble). Por el contrario, en el folio 152r el grado de velocidad no es mayor (doble) después de que el objeto haya recorrido una distancia doble, sino que está en relación $\sqrt{2}:1$. En conclusión, el significado físico otorgado a grados de velocidad es distinto tanto en el folio 152r como en la carta a Sarpi, y esto resuelve parcialmente una de las primeras preguntas: si Galileo ya conoce el principio correcto —folio 152r— ¿por qué utiliza la formulación errónea en el folio 128r y en la carta a Sarpi? Al respecto, se puede agregar el argumento de Drake: se trata de “un dispositivo matemático arbitrario —esta vez, el de la cuadratura— permitió a Galileo simplificar su procedimiento adoptando una nueva definición” (1975: 141).

De otro lado, el folio 107v¹⁹ que fue descubierto después del folio 152r ha orientado la discusión hacia el papel del experimento en la construcción

19 El folio 107v Galileo ha sido ubicado en el periodo de 1603–1604. Se encuentra disponible en: Biblioteca Nazionale Centrale; Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.

de la ley de la caída $s \propto t^2$. La importancia historiográfica de este folio estriba en la afirmación de Drake (1975b), quien cuando lo descubrió sostuvo que la formulación de la ley de la caída no es matemática sino experimental, siendo el plano inclinado el recurso utilizado por Galileo para el descubrimiento de la ley.

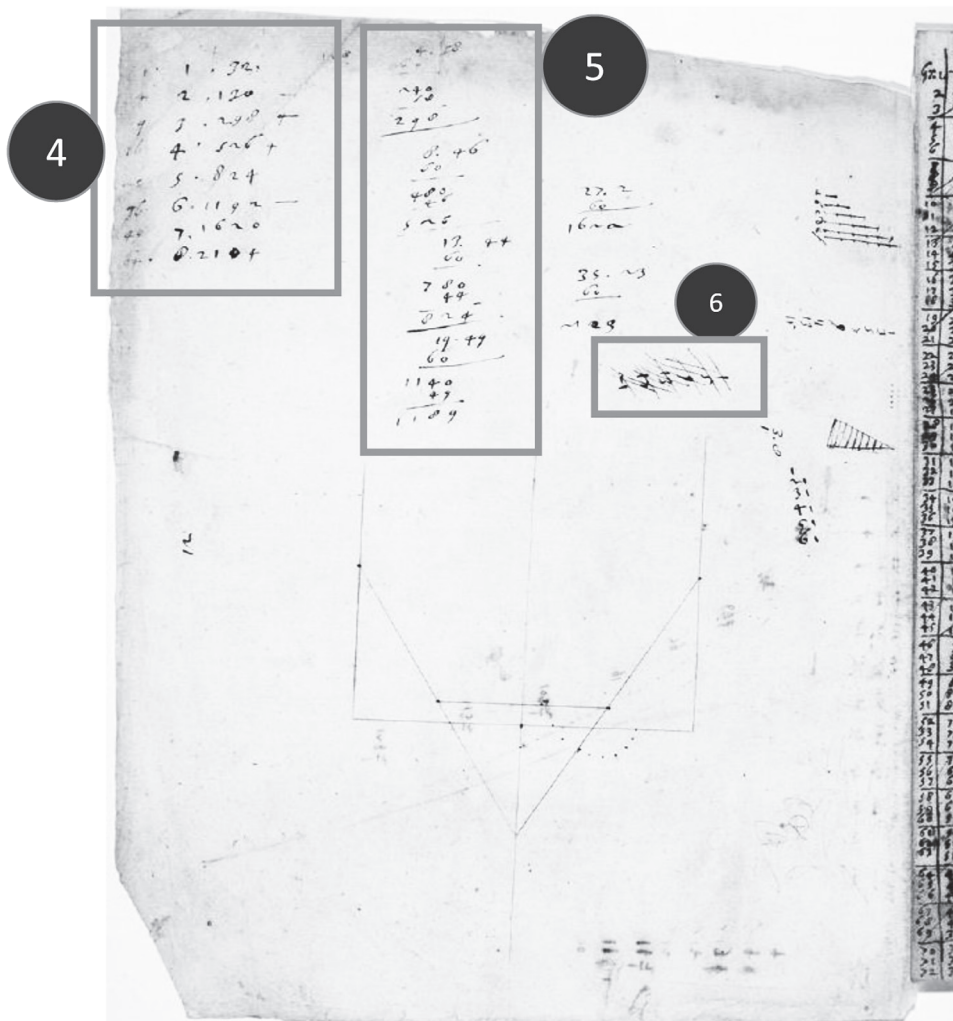


Figura 7. Folio 107v

Disponible en: Biblioteca Nazionale Centrale/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.

El folio 107v contiene en su parte superior izquierda los siguientes números que agrupo en esta tabla:

4

1	1	33
4	2	130-
9	3	298+
16	4	526+
25	5	824
36	6	1192-
49	7	1620
64	8	2104

La tercera columna representa los valores de las distancias que recorre una bola por un plano inclinado y con un movimiento uniforme acelerado en 8 unidades de tiempo contadas desde el reposo. Estos números se obtienen del cálculo que Galileo realizó en la parte central del folio:

5

Lo que realiza Galileo en

5

 es multiplicar un número entero por 60 y luego añadir un número menor que 60. Drake (1975b) sostiene que esto se debe a que probablemente midió las distancias con una regla dividida en 60 partes iguales. En

4

 la primera columna que se encuentra en negrita se debe a que es una anotación con lápiz realizada después de los datos escritos en la tercera columna, y representa la regla correcta 1, 4, 9, 16...64 sobre el crecimiento de las distancias medidas. En

6

 se observa lo que podría ser una primera conjetura (1, 5, 9, 13, 17, 21) sobre dicha regla, la cual indica que Galileo aún no contaba con la ley de caída libre.

Teniendo en cuenta los anteriores datos del folio 107v, Drake pasa a realizar la reconstrucción del experimento. Para establecer los intervalos de tiempo se cantó “Onward, Christian Soldiers” a un tempo de dos notas por segundo. Establecido el tempo se procedió a soltar la bola en una nota, se marcó con una tiza su posición sobre el plano coincidiendo con otras notas a intervalos de 0.5 segundos (cuando la bola ha hecho más o menos 4 recorridos por la longitud del plano se tendrán 8 posiciones). En cada marca de tiza se puso una banda de goma alrededor del plano (esto es similar a los trastes del mástil de una guitarra). Las posiciones de las bandas se ajustaron de modo que el sonido del golpe de la bola al pasar por cada banda fuera exactamente en una nota de la marcha. Finalmente, se midieron las distancias desde la posición inicial de la bola (reposo) hasta cada una de la bandas.

5

4.	58
<u>60</u>	
240	
<u>58</u>	
298	
8.	46
<u>60</u>	
480	
<u>46</u>	
526	
13.	44
<u>60</u>	
780	
<u>44</u>	
824	
19.	49
<u>60</u>	
1140	
<u>49</u>	
1189	

Se encontró que las proporciones de los intervalos sucesivos coincidían con los números registrados por Galileo en la tercera columna del folio 107v (Drake, 1975b).

Así las cosas, este experimento señala que las distancias desde el reposo están relacionadas con el cuadrado del tiempo. Es decir, en el folio 107v Galileo ha encontrado la regla de la raíz cuadrada de las velocidades. Como en este experimento los tiempos individuales eran iguales, las velocidades sucesivas deben ser proporcionales a las distancias sucesivas que pasaron. Y dado que las distancias totales desde el reposo aumentan como los números cuadrados, las distancias parciales sucesivas deben aumentar como los números impares, de ahí la anotación que realiza Galileo en la parte derecha del folio.

Una de las principales características de este folio es que pone en tensión la postura, según la cual, los experimentos se realizan para probar una regla preconcebida, no para buscar una regla a partir de las mediciones. De esta manera, el problema es saber si el experimento posibilitó el descubrimiento de la ley o se trata, como usualmente es asumida la experimentación, de la confirmación de la ley (Romo, 1985). En este punto es importante recordar que el rol del experimento no se reduce a la corroboración de teorías. El experimento puede ser de carácter exploratorio y propiciar el descubrimiento de fenómenos o regularidades, puede ayudar a demostrar la existencia de postulados teóricos, corrige y modifica la estructura matemática de las teorías y, por supuesto, se puede diseñar con el fin de confirmar una teoría. El aspecto central es que el experimento también puede producir conocimiento al mismo nivel que lo hace la teoría. Esta última es la línea historiográfica que asume Drake con la información del folio porque rechaza que la formulación de la ley de la caída haya sido mediante un razonamiento matemático, en su lugar, propone que se llegó a tal ley mediante el experimento caracterizado. Lo que es claro por la datación de los folios es que tanto la formulación como la construcción de la ley de la caída tuvo lugar antes de 1638, por ello pretender comprender toda su complejidad apelando estrictamente al resultado final presentado en los *Discorsi* no es posible.

El descubrimiento de los folios 152r, 107v y en general de los manuscritos sobre el movimiento, ha generado unos debates historiográficos de gran interés. Una de las críticas a Drake es que (1) no hay una evidencia clara sobre la fecha del folio 152r, por lo tanto, no es posible afirmar que Galileo antes de 1604 ya conocía el principio correcto. (2) Al final del folio 152r aparece el término *impeto* que no ha sido analizado con detalle dado que se le ha dado prioridad a

la parte superior del folio. Esto puede sugerir otras interpretaciones si el criterio de ordenamiento cronológico se realiza con base en términos técnicos. (3) El análisis del folio 107v sugiere que el descubrimiento de la ley de la caída no es matemático como aparece en el folio 152r, sino mediante el experimento con el plano inclinado. De hecho, Drake en 1975 escribe su artículo *The rol of music in Galileo's experiments*, aquí cambia explícitamente la tesis que sostuvo en el folio 152r y pasa a defender la tesis del folio 107v. Ahora bien, (4) si se acepta esta última tesis, entonces el primer problema que se debe resolver es si el folio 107v es la confirmación experimental de una ley ya conocida o si es un experimento que propicia el descubrimiento de la ley.²⁰ Como lo plantea Romo (1985), el uso de los manuscritos implica cierta cautela con las hipótesis que se propongan sobre la reconstrucción de la ley de la caída y, además, cada interpretación depende de la concepción sobre la actividad científica que asuma el investigador. A mi modo de ver, los manuscritos y las cartas son una excelente fuente para mostrar la complejidad de la práctica científica y como ésta no depende exclusivamente de factores lógicos. Allí se evidencian estrategias, procesos creativos, errores y diversos usos de los conceptos. Además, la interpretación de los folios depende de la manera como el investigador comprenda la práctica científica.

En este sentido es que se puede hacer énfasis en la manipulación intelectual y material de las herramientas como el plano inclinado o la balanza y de los conceptos y su significado físico. Esto es importante porque Galileo conjuga el manejo matemático, experimental y conceptual de los objetos, lo que permite caracterizar una forma de matematización de la filosofía natural, atendiendo, como lo menciona Biagioli (2008) a las taxonomías sociales del estatus y la credibilidad. En el contexto galileano, las matemáticas tienen un estatus social y cognitivo menor en relación a la filosofía aristotélica dominante, como lo he mostrado en la primera sección de este texto, además porque se empleaban en la mecánica y en otros oficios de clase baja (Bertoloni-Meli, 2006; Biagioli, 2008; Salvia, 2014). El manejo matemático y experimental de los objetos es un tipo de práctica que le permite a Galileo a comprender las propiedades de los fenómenos naturales. La tensión que se encuentra aquí estriba en cómo se ha argumentado la matematización del movimiento. Dicha tensión aparece cuando el movimiento se prueba experimentalmente o se argumenta causalmente.

20 Sobre este debate historiográfico se puede consultar: Hahn (2002); Naylor (1974, 1977, 1982); Wisan (1974, 1977).

Como lo muestra Machamer (1998), la geometría utilizada por Galileo era la geometría de Arquímedes, una geometría comparativa y relacional, una cuestión de proporciones: “[...] las máquinas simples de Arquímedes y las experiencias relacionadas con ellas se convierten en un modelo para Galileo, tanto para la teoría como para el experimento” (57). Esto quiere decir que el fenómeno es susceptible de una demostración matemática y una representación mecánica:

“La inteligibilidad o el tener una explicación verdadera para Galileo incluía tener un modelo mecánico o representación del fenómeno. En este sentido, Galileo añadió algo a los criterios tradicionales de descripción matemática (ciencias mixtas) y la observación (de la astronomía) para la construcción de objetos científicos (como dirían algunos) o por tener explicaciones adecuadas de los fenómenos observados (como diría yo)”. (Machamer, 1998: 69)

Para Galileo, una explicación tenía que tener experiencias adecuadas que demostraran que la causa explicativa es la verdadera y que funciona necesariamente. Estas experiencias se tenían por máquinas que duplicaban determinado fenómeno. Esta idea de modelos mecánicos o experiencias reales o construidas, encaja con la tradición geométrica en la que para tener una demostración se debe construir una prueba. De este modo, se evidencia nuevamente la correlación entre la prueba geométrica y las experiencias con el fin de obtener una demostración en la mecánica. Esto es posible gracias a la inteligibilidad y la forma de entendimiento proporcionada por las máquinas simples de Arquímedes, especialmente la balanza. Su concreción física así como su descriptibilidad matemática y poder manipularla físicamente, lo cual posibilita la experimentación, dieron la inteligibilidad y la estructura de los conceptos abstractos de la imagen mecánica del mundo (70–71).

El debate sobre los experimentos mentales o reales no afecta este planteamiento, porque, de un lado, un experimento mental permite visualizar el modelo mecánico de determinada situación, por ejemplo las relaciones espaciales y temporales básicas para la comprensión científica. De otro lado, las situaciones observacionales —reales— permiten corroborar la validez del análisis físico. Lo relevante en este punto es que los experimentos ya sean reales o mentales, se configuren de acuerdo con los requisitos de las matemáticas (Shea, 1998: 239). Esta práctica es importante en el estudio del movimiento porque proporcionó el modelo de inteligibilidad y la prueba en la ciencia. Así las cosas, las matemáticas debían ser la disciplina que justificara el cambio hacia lo cuantitativo que gradualmente se incorporaba en la filosofía natural.

La matematización de la filosofía natural se convirtió en algo pensable para Galileo porque, como lo señala Van Dyck (2006), interpreta las relaciones causales como las relaciones, es decir, son expresables mediante relaciones constantes y esto es por lo que fácilmente se pueden integrar dentro de las demostraciones matemáticas. Asimismo, de particular importancia resulta la estabilidad empírica que se debe reflejar en el plano conceptual.

Es por ello que un modelo de inteligibilidad se hace necesario. Según Machamer (1998):

El punto es que las experiencias son las experiencias, literalmente, de ver los objetos mecánicos, ópticos y astronómicos como los objetos idealizados de la geometría. Todas las experiencias implican ver las cosas como son en conformidad con su modelo de inteligibilidad. (p. 65)

El modelo de inteligibilidad permite que las personas lleguen a un acuerdo porque muestra sólo las propiedades que son importantes. Es usualmente representable y su presencia física permite que se realicen acciones sobre él. Las relaciones entre sus partes pueden ser descubiertas y construidas, puede experimentarse y observarse lo cual explica, además, porque se puede utilizar para formar a los estudiantes (Machamer, 1998; Machamer & Woody, 1994). Está constituido por reglas, acciones, usos, intereses y disputas, por una racionalidad práctica en la que se observa, en el contexto galileano, una filosofía natural matematizada: explicaciones matemáticas y manipulación de objetos que conducen a experimentos con el fin de lograr inteligibilidad y dar estructura a los “conceptos abstractos de la imagen mecánica del mundo” (Machamer, 1998). Evidentemente este modelo requiere mucho más que un debate epistemológico, si bien hay una redefinición epistemológica de las prácticas, éstas dependen de factores sociocognitivos de los filósofos naturales y sus disciplinas. Como lo plantea Biagioli (2008) las matemáticas se legitiman sociocognitivamente en tanto disciplina y las prácticas experimentales permiten ser concebidas no sólo como efectos sino también como causas del desarrollo de las instituciones científicas.

Perspectivas: la relación entre las matemáticas y la filosofía natural

Peter Machamer plantea que Galileo es un mecánico arquimedianeo por formación y temperamento, que trabaja en la tradición de las ciencias mixtas y tratando desesperadamente de avanzar intelectualmente, socialmente y económicamente

mediante la búsqueda de legitimidad como filósofo. Este planteamiento también lo comparte Rivka Feldhay (1998), quien además sostiene que las matemáticas en su contexto no surgieron como un proyecto de investigación coherente sino como una estrategia necesaria para la creación de la coherencia de un proyecto cuyas conexiones internas aún no estaban claras. A mi modo de ver, este planteamiento es bastante importante porque el contexto cultural e intelectual en el que este propósito se gesta se encontraba en reconstrucción por parte de algunos matemáticos cuyo campo de investigación estaba en proceso de ser definido, hablo aquí específicamente de la *Quaestio de certitudine mathematicarum*.

La ciencia de Galileo surgió de las mismas raíces que el programa de los jesuitas y compartió gran parte de su espíritu con jesuitas matemáticos (Feldhay, 1998: 82). Es por esta razón que Galileo debe usar la terminología escolástica y hacer frente a los problemas de la filosofía natural tradicional. Trata de aplicar sus intereses y puntos de vista mecánicos a las preguntas aristotélicas y peripatéticas de la filosofía natural, y hace todo lo posible por utilizar su modo aceptado de discurso filosófico (Machamer, 1998: 57).

La originalidad de Galileo se inscribe no en lo que encontró, sino en la forma como interpretó sus descubrimientos (Swerdlow, 1998: 244). Los estudios astronómicos de Galileo, recogidos en el *Diálogo sobre los dos grandes sistemas del mundo*, tienen un gran aporte porque las observaciones hechas con el telescopio proporcionan evidencias empíricas que se formalizan matemáticamente. Así, una correcta comprensión del fenómeno requeriría de la adecuada combinación de física y principios matemáticos (Finocchiaro, 2010: 97).

A principios del siglo XVII hubo consenso en cuanto a que las ciencias matemáticas debían asumir la filosofía natural como un objeto. De este modo, uno de los principales objetivos de Galileo —y de muchos de sus contemporáneos— era mejorar el estatuto epistemológico de las matemáticas y la abolición de la autoridad y el monopolio de los filósofos y teólogos como responsables del libro de la naturaleza (Remmert, 2005: 349), porque los practicantes de las matemáticas así concebidos, no se enfrentaban a problemas físicos como el movimiento o la aplicación de métodos matemáticos para este tipo de problemas, ya que pertenecían al campo de la filosofía natural. Según esto, las matemáticas estaban subordinadas a la filosofía y a la teología, y a la filosofía natural en particular (Remmert, 2005: 350). Sin embargo, las matemáticas en la modernidad comenzaron a producir instrumentos capaces de suministrar técnica y conocimiento socialmente valioso para su uso en

ingeniería, administración, control social, entre otros. Esta capacidad de producir conocimiento útil y los posibles instrumentos de poder se convirtieron en la base fundamental para la legitimación de las matemáticas. Asimismo, la difusión de esta capacidad fue un medio esencial por el cual las matemáticas establecieron su estatus social y epistemológico.

La incorporación de la geometría a la física, específicamente a la descripción del movimiento que he caracterizado, se constituye como un episodio fundamental para la matematización de la filosofía natural, la cual, además, está llamada a revalorarse en tanto los estudios sobre ella deben atender a factores sociales, culturales e históricos, con el fin de ofrecer un matiz importante para comprender los orígenes de la ciencia moderna.

Bibliografía

1. Aristóteles. (1995). *Tratados de Lógica (Organon) II*. (M. Candel, Trad.). Madrid: Gredos.
2. Barozzi, F. (1560). *Opusculum, in quo una Oratio, et duae Quaestiones: altera de certitudine, et altera de medietate Mathematicarum continentur*; Padua: Excudebat Gratosus Perchacinus.
3. Bertoloni-Meli, D. (2006). *Thinking with Objects: The Transformation of Mechanics in the Seventeenth Century*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.
4. Biancani, G. (1615). *De mathematicarum natura dissertatio*. Bolonia: B. Cocchi.
5. Biagioli, M. (2008). *Galileo cortesano: la práctica de la ciencia en la cultura del absolutismo*. Buenos Aires: Katz Editores.
6. Burt, E. A. (1954). *The metaphysical foundations of modern science*. Mineola, N.Y: Dover Publications.
7. Catena, P. (1563). *Oratio pro idea methodi*. Pud Gratosum Derchacinum (IS), Padua: Percacino, Grazioso.
8. Crombie, A. C. (1990). *Science, Art and Nature in Medieval and Modern Thought*. London: The Hambledon Press.

9. Dear, P. (1995). *Discipline and Experience: The Mathematical Way in the Scientific Revolution*. Chicago and London: University of Chicago Press.
10. Dear, P. (2009). *Revolutionizing the Sciences: European Knowledge and its Ambitions, 1500-1700*. Houndmills: Palgrave Macmillan.
11. Drake, S. (1975a). Galileo's New Science of Motion. En M. L. R. Bonelli & W. Shea (Eds.), *Reason, experiment, and mysticism in the scientific revolution* (pp. 131–156). New York: Science History Publications.
12. Drake, S. (1975b). The Role of Music in Galileo's Experiments. *Scientific American*, 232(6), 98–104. <https://doi.org/10.1038/scientificamerican0675-98>
13. Drake, S. (1978). *Galileo at Work: His Scientific Biography*. Chicago: University of Chicago Press.
14. Drake, S., & Drabkin, I. E. (1969). *Mechanics in sixteenth-century Italy: Selections from Tartaglia, Benedetti, Guido Ubaldo, & Galileo* (First Edition edition). Madison: University of Wisconsin Press.
15. Ducheyne, S. (2006). Galileo's Interventionist Notion of "Cause." *The Journal of the History of Ideas*, 67(3), 443–464.
16. Feldhay, R. (1998). The use and abuse of mathematical entities: Galileo and the Jesuits revisited. En *The Cambridge Companion to Galileo* (pp. 80–145). Cambridge: Cambridge University Press.
17. Finocchiaro, M. (2010). *Defending Copernicus and Galileo: Critical Reasoning in the Two Affairs*. Heidelberg, London, New york: Springer Science & Business Media.
18. Galilei, G. (1603a, 1604). *Folio 107v*. Biblioteca Nazionale Centrale/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.
19. Galilei, G. (1603b, 1604). *Folio 152r*. Biblioteca Nazionale Centrale/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.
20. Galilei, G. (1604). *Folio 128r*. Biblioteca Nazionale Centrale/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze.
21. Galilei, G. (1891). *Le opere di Galileo Galilei: edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia*. (A. Favaro, Ed.) (Vol. 2). Firenze: G. Barbera.

22. Galilei, G. (1900). *Le opere di Galileo Galilei: edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia*. (A. Favaro, Ed.) (Vol. 10). Firenze: G. Barbera.
23. Galilei, G. (1901). *Le opere di Galileo Galilei: edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia*. (A. Favaro, Ed.) (Vol. 11). Firenze: G. Barbera.
24. Galilei, G. (1960). *The Assayer*. (S. Drake y C. O'Malley, Trad.) En *The Controversy on the Comets of 1618*. Philadelphia: University of Pennsylvania Press.
25. Galilei, G. (1994). *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*. (A. Beltrán, Trad.). Madrid: Alianza.
26. Galilei, G. (2003). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. (J. Román, Trad.). Buenos Aires: Losada.
27. Galilei, G. (n.d.). *De Motu Antiquiora*. (R. Fredette, Trad.). Alemania.
28. Giacobbe, G. (1972a). Francesco Barozzi e la quaestio de certitudine mathematicarum. *Physis, Rivista Internazionale Di Storia Della Scienza*, XIV(4).
29. Giacobbe, G. (1972b). Il Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum di Alessandro Piccolomini. *Physis, Rivista Internazionale Di Storia Della Scienza*, XIV(2).
30. Giacobbe, G. (1972c). La quaestio de certitudine mathematicarum all'interno della Scuola Padovana. En *Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica, Società Italiana di Logica e Filosofia delle Scienze*.
31. Giacobbe, G. (1973). Alcune cinquecentine riguardanti il processo di rivalutazione epistemologica della matematica nell'ambito della rivoluzione scientifica rinascimentale. *La Berio, Bollettino Bibliografico Quadrimestrale*, XIII(2-3).
32. Giacobbe, G. (1976). Epigoni nel Seicento della quaestio de certitudine mathematicarum: Giuseppe Biancani. *Physis, Rivista Internazionale Di Storia Della Scienza*, XVIII(1).

33. Giacobbe, G. (1977). Un gesuita progressista nella quaestio de certitudine mathematicarum rinascimentale: Benito Pereyra. *Physis, Rivista Internazionale Di Storia Della Scienza*, XIX(2).
34. Hahn, A. J. (2002). The Pendulum Swings Again: A Mathematical Reassessment of Galileo's Experiments with Inclined Planes. *Archive for History of Exact Sciences*, 56(4), 339–361. <https://doi.org/10.1007/s004070200048>
35. Henry, J. (2011). Galileo and the scientific revolution: The importance of his kinematics. *Galileana*, XVIII, 3–36.
36. Jardine, N. (1988). Epistemology of the Sciences. En C. B. Schmitt, Q. Skinner, & E. Kessler (Eds.), *The Cambridge History of Renaissance Philosophy* (pp. 685–711). Cambridge: Cambridge University Press.
37. Jesseph, D. M. (1999). *Squaring the Circle: The War Between Hobbes and Wallis*. Chicago and London: University of Chicago Press.
38. Koyré, A. (1966). *Études galiléennes*. Paris: Hermann.
39. Machamer, P. (1978). Galileo and the Causes. En *New Perspectives on Galileo* (Vol. 14, pp. 161–180). Dordrecht: Reidel Publishing Company. Recuperado de: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-94-009-9799-8_5#close
40. Machamer, P. (1998). Galileo's machines, his mathematics and his experiments. En *The Cambridge Companion to Galileo* (pp. 53–79). Cambridge: Cambridge University Press.
41. Machamer, P., & Woody, A. (1994). A model of intelligibility in science: Using Galileo's balance as a model for understanding the motion of bodies. *Science & Education*, 3(3), 215–244. <https://doi.org/10.1007/BF00540155>
42. Mancosu, P. (1992). Aristotelian logic and Euclidean mathematics: Seventeenth-century developments of the Quaestio de certitudine mathematicarum. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 23(2), 241–265.
43. Martínez, S., & Huang, X. (2011). Introducción: Hacia una filosofía de la ciencia centrada en prácticas. En *Historia, prácticas y estilos en la filosofía de la ciencia. Hacia una epistemología plural*. (pp. 5–63). México: UAM-Iztapalapa y Miguel Ángel Porrúa.

44. Naylor, R. H. (1974). Galileo and the Problem of Free Fall. *The British Journal for the History of Science*, 7(2), 105–134.
45. Naylor, R. H. (1977). Galileo's theory of motion: Processes of conceptual change in the period 1604–1610. *Annals of Science*, 34(4), 365–392. <https://doi.org/10.1080/00033797700200281>
46. Naylor, R. H. (1982). Galileo's law of fall: Absolute truth or approximation. *Annals of Science*, 39(4), 384–389. <https://doi.org/10.1080/00033798200200491>
47. Ochoa, F. (2013). De la subordinación a la hegemonía. Sobre la legitimación epistemológica de las matemáticas en la filosofía natural en el siglo XVII. *Revista Civilizar Ciencias Sociales Y Humanas*, 13(25), 125–176.
48. Pereira, B. (1591). *De communibus omnium rerum naturalium principiis & affectionibus*: Libri XV. Venice: Úndream Muschium.
49. Piccolomini, A. (1565). *Commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum in his Alexandri Piccolominei In mechanicas quaestiones Aristotelis, paraphrasis paulo quidem plenior. Eiusdem commentarium de certitudine mathematicarum disciplinarum: in quo, de resolutione, diffinitione & demonstratione: necnon de materia, & in fine logicae facultatis, quamplura continentur ad rem ipsam, tum mathematicam, tum logicam, maxime pertinentia*. Venice: Apud Traianum Curtium.
50. Remmert, T. (2005). Galileo, God and Mathematics. En *Mathematics and the Divine: A Historical Study*. Amsterdam: Elsevier.
51. Rodríguez, L. D., & Romero, Á. (2014). Desarrollos galileanos en el campo de la estática: una posible contribución a la enseñanza. *Revista Física Y Cultura*, 1(5). Recuperado de: <http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RFC/article/view/2602>
52. Romo, J. (1985). *La física de Galileo. La problemática en torno a la ley caída de los cuerpos*. Universidad de Barcelona, Barcelona.
53. Roux, S. (2010). Forms of Mathematization (14th-17th Centuries). *Early Science and Medicine*, (15), 319–337.
54. Salvia, S. (2014). Galileo's Machine: Late Notes on Free Fall, Projectile Motion, and the Force of Percussion (ca. 1638–1639). *Physics in Perspective*, 16(4), 440–460. <https://doi.org/10.1007/s00016-014-0149-1>

55. Schaffer, S. (1988). Wallifaction: Thomas Hobbes on school divinity and experimental pneumatics. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 19(3), 275–298. [https://doi.org/10.1016/0039-3681\(88\)90001-5](https://doi.org/10.1016/0039-3681(88)90001-5)
56. Schöttler, T. (2012). From Causes to Relations: The Emergence of a Non-Aristotelian Concept of Geometrical Proof out of the Quaestio de Certitudine Mathematicarum. *Societate si Politica*, 6(2), 29–47.
57. Shea, W. (1998). Galileo's Copernicanism: the science and the rethoric. En *The Cambridge Companion to Galileo* (pp. 211–243). Cambridge: Cambridge University Press.
58. Swerdlow, N. (1998). Galileo's discoveries with the telescope and their evidence for the Copernican theory. En *The Cambridge Companion to Galileo* (pp. 244–270). Cambridge: Cambridge University Press.
59. Van Dyck, M. (2006). *An archaeology of Galileo's science of motion*. Ghent University, Ghent, Belgium.
60. Velilla, H. (2015a). El debate sobre la certeza de las matemáticas en la filosofía natural de los siglos XVI y XVII (De quaestio de certitudine mathematicarum). *Saga - revista de Estudiantes de Filosofía*, 16(28), 12–25.
61. Velilla, H. (2015b). Las matemáticas de los siglos XVI y XVII en la historiografía científica contemporánea. *Revista Colombiana de Filosofía de La Ciencia*, 15(31), 83–104.
62. Wisan, W. (1974). The new science of motion: A study of Galileo's De motu locali. *Archive for History of Exact Sciences*, 13(2–3), 103–306. <https://doi.org/10.1007/BF00327483>
63. Wisan, W. (1977). Mathematics and Experiment in Galileo's Science of Motion. *Annali dell'Istituto E Museo Di Storia Della Scienza Di Firenze*, 2(2), 149–160. <https://doi.org/10.1163/221058777X01361>