

REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE SUPERFICIES ÓPTICAS DE REVOLUCIÓN EN FORMA CANÓNICA CONOCIDOS LOS RADIOS DE CURVATURA

JUAN CAMILO VALENCIA*
ÁLVARO HERNÁN BEDOYA**

RESUMEN

Se presentan tres modelos matemáticos para la regresión y correlación de una nube de N puntos en \mathbb{R}^3 con coordenadas cartesianas x_j, y_j como abscisas, con su respectiva ordenada ρ_j como radio de curvatura de la sección axial o sagital, pero que no corresponde a la curvatura gaussiana, con un paraboloides, elipsoide e hiperboloides de revolución en forma canónica. Este modelo acepta que los datos están debidamente centrados, es decir, el vértice de las superficies de revolución está preestablecido en el origen, por lo cual es aplicable a la córnea humana.

PALABRAS CLAVE: córnea; correlación; elipsoide; hiperboloides; queratometría; paraboloides; regresión; topógrafo corneal.

REGRESSION AND CORRELATION OF OPTICAL SURFACES OF REVOLUTION IN CANONICAL FORM KNOWN THE RADII OF CURVATURE

ABSTRACT

Three mathematical models are presented for the regression and correlation of a cloud of N points in \mathbb{R}^3 with Cartesian coordinates x_j, y_j as abscissas, with his respective ordinate ρ_j as a radius of curvature of the axial or sagittal section, but not corresponding to the Gaussian curvature, with a paraboloid, ellipsoid, and hyperboloid of revolution in canonical form. This model assumes that data are properly centered, that is, the apex of the surfaces of revolution is preset at the origin; therefore, it is applied in human cornea.

* Ingeniero de Producción y Magíster en Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT. Profesor Asistente, Escuela de Ingeniería de Antioquia. Medellín, Colombia. jucava@eia.edu.co

** Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Antioquia. Magíster en Matemáticas Aplicadas, Universidad EAFIT. Profesor, Institución Educativa Manuel José Sierra. Girardota, Antioquia, Colombia. rigelbach@hotmail.com

KEY WORDS: cornea; correlation; ellipsoid; hyperboloid; keratometry; paraboloid; regression; corneal topographer.

REGRESSÃO E CORRELAÇÃO DE SUPERFÍCIES ÓPTICAS DE REVOLUÇÃO EM FORMA CANÔNICA CONHECIDOS OS RÁDIOS DE CURVATURA

RESUMO

Apresentam-se três modelos matemáticos para a regressão e correlação de uma nuvem de N pontos em \mathbb{R}^3 com coordenadas cartesianas x_i, y_i como abscissas, com sua respectiva ordenada ρ_i como rádio de curvatura da seção axial ou sagital, mas que não corresponde à curvatura gaussiana, com um parabolóide, elipsoide e hiperbolóide de revolução em forma canônica. Este modelo supõe que os dados estão devidamente centrados, isto é, o vértice das superfícies de revolução está preestabelecido na origem; pelo qual é aplicável à córnea humana.

PALAVRAS CÓDIGO: córnea; correlação; elipsoide; hiperbolóide; queratometria; parabolóide; regressão; topógrafo corneano.

1. INTRODUCCIÓN

El primer modelo que se desarrolla en el presente documento es útil en particular para el control de calidad de la geometría de una superficie especular con sección parabólica, como en espejos para telescopios, o para verificar superficies ópticas que resultan de los procesos de *spin-casting* para lentes de contacto (Wichterle y Wichterle, 1970) y espejos líquidos con fluidos en rotación libre (Angel *et al.* 2008). También este modelo puede usarse para hacer un análisis de regresión y correlación de la córnea humana con un parabolóide de revolución con la información suministrada por los queratómetros computarizados.

El segundo modelo es útil para el control de calidad de la geometría de una superficie especular con sección elíptica que se aplanan hacia la periferia, como en espejos para instrumentos, o para verificar superficies ópticas que resultan de los procesos de torneado de lentes CNC. También este modelo puede usarse para hacer un análisis de regresión y correlación de la córnea humana (Davis *et al.*, 2005) con un *oblate* elipsoide de revolución con la información suministrada por los queratómetros computarizados. Es importante mencionar que las superficies elípticas tienen reflexión perfecta de foco a foco y también presentan refracción perfecta en el foco más lejano al vértice, si los rayos son paraxiales, por lo tanto, son ideales para modelar córneas, si se supone visión lejana. Adicionalmente, también se incluye el modelo de regresión y correlación de un *prolate* elipsoide de revolución en forma canónica, útil para verificar la superficie corneal post-*keratomileusis in situ* (Huang, Shekhar y Tang, 2003), a pesar de que no presente refracción perfecta.

Y el tercer modelo es útil para el control de calidad de la geometría de una superficie especular con sección hiperbólica como en espejos para instrumentos, o para verificar superficies ópticas que resultan de los procesos de torneado de lentes CNC. También este modelo



puede emplearse para hacer un análisis de regresión y correlación de la córnea humana con un hiperboloide de revolución con la información suministrada por los queratómetros computarizados. Conviene mencionar que las superficies hiperbólicas tienen reflexión perfecta de foco real a foco virtual y también presentan refracción perfecta paraxial para los rayos que provienen de un foco cercano, por lo cual son aplicables para modelar córneas si se supone visión cercana, en especial en casos de alta miopía corneal comunes a todos los queratoconos.

Los métodos de regresión y correlación de sistemas no lineales se resuelven usualmente mediante dos técnicas:

La primera técnica usa un algoritmo (Bates y Watts, 1988) que permite iterativamente aproximar los valores de los parámetros desconocidos, obteniendo un estimado lineal para sus cambios (Valencia y Bedoya, 2009).

La segunda técnica usa un algoritmo directo que permite resolver sistemas de ecuaciones no lineales en varias variables de forma iterativa mediante el uso de herramientas de cómputo. Esta técnica es la que se recomienda para el uso práctico de este trabajo (Ortega y Rheinboldt, 2000), lo cual no es objeto de este estudio.

2. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE UN PARABOLOIDE DE REVOLUCIÓN

Para la verificación de la calidad de una superficie óptica correspondiente a un paraboloides de revolución se usan instrumentos modernos como topógrafos computarizados, microscopios y nanoscopios, queratómetros computarizados que permiten generar una imagen bidimensional con zonas de nivel o tridimensional con superficies de nivel que caracterizan la superficie. Algunos de estos instrumentos generan las elevaciones métricas en un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) ; existen muchos instrumentos que suministran la información de la superficie con un sistema de coordenadas experto que incluye la curvatura (r, θ, k) o, en su lugar, radios de curvatura (x, y, ρ) en coordenadas cartesianas. A continuación se muestra un sistema equivalente que permite unificar los tres sistemas de medición usando como modelo (x, y, ρ) . La figura 1 muestra la imagen que resulta de la medición de la superficie anterior de la córnea humana de un paciente en particular.

Se observa en la figura 1 la queratometría que muestra las zonas isocurvatura con curvas de nivel en colores o con puntos que tienen la misma curvatura. Por norma internacional, se acepta que la información presentada por estos instrumentos permite calcular los radios de curvatura ρ como función de la curvatura k , en milímetros, equivalentes para cada pixel a

$$\rho_j = \frac{337,5}{k_j} \quad (1)$$

donde 1,3375 es equivalente al índice de refracción del sistema simplificado córnea-humor acuoso de Le Grand. Algunos fabricantes de estos instrumentos adoptan como índice de refracción 1,3376.

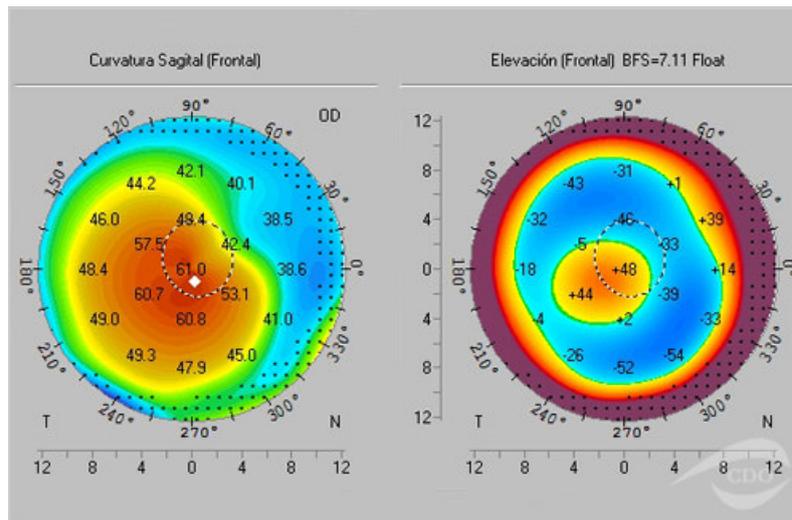


Figura 1. Topografía corneal computarizada generada por sistema Pentacam de OCULUS (izquierda), que se usa para la *keratomileusis in situ*¹, el cálculo de lentes intraoculares y lentes de contacto

Los métodos de regresión han sido ampliamente usados como algoritmos de análisis numérico y estadístico para determinar la geometría que mejor se adapta a los datos correspondientes a una nube puntos en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3 con una función matemática preestablecida, que en este caso particular corresponde a un paraboloide de revolución en coordenadas cilíndricas

$$z_a = \frac{r^2}{4f_a} \tag{2}$$

para determinar la distancia focal f_a que mejor se ajusta a los datos suministrados por el instrumento de medición.

2.1 Método de los mínimos cuadrados con las ordenadas

Para hacer la regresión de la imagen topográfica de una nube con N puntos de la forma (x_j, y_j, ρ_j) con eje centrado, se reduce el problema a \mathbb{R}^2 con

$$r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2} \tag{3}$$

así, la nube de N puntos toma la forma (r_j, ρ_j) para efectuar la regresión por el método de los mínimos cuadrados en \mathbb{R}^2 con un error total de la forma

1 Cirugía refractiva corneal mediante la ablación de tejido estromal esculpiendo la córnea con la evaporación de tejido usando láseres pulsados Excimer.



$$E_t = \sum_{j=1}^N \left(z_j - \frac{r_j^2}{4f_a} \right)^2 \quad (4)$$

Explícitamente la geometría de la superficie que corresponde al paraboloide de revolución puede ser expresada con

$$r = \pm \sqrt{4f_a z_a} \quad (5)$$

Así, también los radios de curvatura principales del paraboloide de revolución se calculan con

$$\rho(z_a) = \left(1 + \left(\frac{dr}{dz_a} \right)^2 \right)^{3/2} \left| \frac{d^2 r}{dz^2} \right|^{-1} = 2 \sqrt{\frac{(f_a + z_a)^3}{|f_a|}} \quad (6)$$

Para cada punto de la topografía (r_j, ρ_j) , se determina la ordenada correspondiente z_j mediante las soluciones reales de

$$\rho_j = 2 \sqrt{\frac{(f_a + z_j)^3}{|f_a|}} \quad (7)$$

la cual es

$$z_j = \text{Sgn}(f_a) \left(-|f_a| + \sqrt[3]{\frac{|f_a| \rho_j^2}{4}} \right) \quad (8)$$

donde $\text{Sgn}(f_a)$ corresponde al signo de la distancia focal para indicar el sentido del paraboloide con relación al eje z . Si se supone el signo positivo por simplicidad, los valores obtenidos para z_j serán siempre positivos, ya que el mínimo radio de curvatura en el vértice es el doble de la distancia focal.

Sustituyendo (8) con el signo positivo en (4) se obtiene

$$E_t = \sum_{j=1}^N \left(-f_a + \sqrt[3]{\frac{f_a \rho_j^2}{4}} - \frac{r_j^2}{4f_a} \right)^2 \quad (9)$$

Para minimizar el error total E_t se deriva (9) con relación a la variable desconocida f_a :

$$\frac{dE_t}{df_a} = \frac{f_a^3}{24} \sum_{j=1}^N (12f_a^2 - 2^{4/3} f_a \sqrt[3]{f_a \rho_j^2} - 3r_j^2)(4f_a^2 - 2^{4/3} f_a \sqrt[3]{f_a \rho_j^2} + r_j^2) = 0 \quad (10)$$

Simplificando y expandiendo (10) se obtiene

$$48N f_a^4 - A f_a^{10/3} + B f_a^{8/3} + C f_a^{4/3} - D = 0 \tag{11}$$

con $A = 2^{16/3} \sum_{j=1}^N \rho_j^{2/3}$, $B = 2^{8/3} \sum_{j=1}^N \rho_j^{4/3}$, $C = 2^{7/3} \sum_{j=1}^N \rho_j^{2/3} r_j^2$ y $D = 3 \sum_{j=1}^N r_j^4$; donde la solución real y más positiva para la ecuación (11) puede ser obtenida por métodos numéricos, usando modelos matemáticos estándares (Kincard y Cheney, 1994).

2.2 Método de los mínimos cuadrados con las curvaturas de la córnea humana

Este método alternativo permite minimizar el error total como función de las curvaturas,

$$E_t = \sum_{j=1}^N (k_j - k(r))^2 \tag{12}$$

donde $k(r_j) = \frac{337,5}{\rho(r_j)} = \frac{1350 f_a^2}{\sqrt{(4 f_a^2 + r_j^2)^3}}$.

Minimizando el error total

$$\frac{dE_t}{df_a} = 0 \Rightarrow 1350 f_a^2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{r_j^2 - 2 f_a^2}{(r_j^2 + 4 f_a^2)^4} \right) - \sum_{j=1}^N \left(k_j \frac{r_j^2 - 2 f_a^2}{\sqrt{(r_j^2 + 4 f_a^2)^5}} \right) = 0 \tag{13}$$

Así, la solución para f_a puede obtenerse con métodos numéricos.

Es importante considerar que este método hace énfasis en la zona central de la córnea, ya que es más curva en el centro y se aplanan hacia la periferia, por lo tanto, puede dar mejores resultados prácticos y clínicos para f_a que los obtenidos con (11).

Es más conveniente usar para la regresión y correlación corneal el método de los mínimos cuadrados con las curvaturas que con los radios de curvatura, ya que en la periferia los radios de curvatura son muy grandes y el modelo haría énfasis en la zona periférica, que por lo general no tiene mucho interés óptico, debido a que la mayoría de la luz que ingresa al ojo es central.

2.3 Índice de correlación

Como es usual para las regresiones con líneas curvas, se define el índice de correlación c_c como un número adimensional entre cero y uno, para indicar la bondad del ajuste. Así,



$$c_c = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N (z_j - z_a(r_j))^2}{\sum_{j=1}^N z_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N z_j \right)^2}} \quad (14)$$

reemplazando (8) definida positiva en (14) y la función del paraboloides

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N \left(-f_a + \sqrt{\frac{f_a \rho_j^2}{4} - \frac{r_j^2}{4f_a}} \right)^2}{\sum_{j=1}^N \left(-f_a + \sqrt{\frac{f_a \rho_j^2}{4}} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(-f_a + \sqrt{\frac{f_a \rho_j^2}{4}} \right) \right)^2}} \quad (15)$$

con la distancia focal f_a obtenida en la regresión.

3. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE UN ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN

En este caso, la geometría de la regresión corresponde a un elipsoide de revolución en coordenadas cilíndricas con vértice en el origen definido por

$$z_a = \pm \left(A_a - A_a \sqrt{1 - \frac{r^2}{B_a^2}} \right) \text{ con semiejes } A_a \text{ y } B_a \text{ positivos} \quad (16)$$

o

$$z_a = \pm \frac{n_a}{n_a + 1} \left(f_a - \sqrt{f_a^2 - \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r^2} \right) \text{ con } f_a > 0 \quad (17)$$

donde n_a es el índice de refracción de una lente o de la córnea humana con un valor de 1,376 a 555 nm, si se considera refracción perfecta en la segunda superficie corneal, pero si se adopta el modelo simplificado $n_a = 1,3375$, para determinar los semiejes o la distancia focal f_a que mejor se ajusta a los datos suministrados por el instrumento de medición. Para facilitar la comprensión del lector se supondrá el signo positivo en las ordenadas del elipsoide de ahora en adelante.

La figura 2 muestra otra imagen que resulta de la medición de la superficie anterior de la córnea humana de un paciente en particular usando otro instrumento.

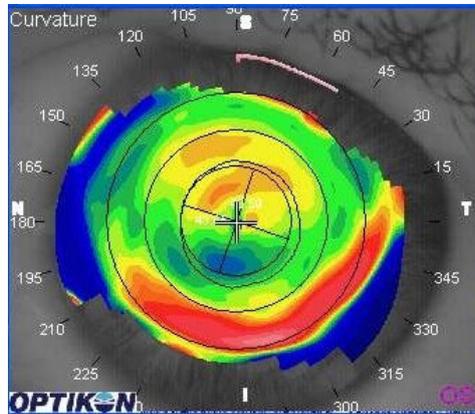


Figura 2. Topografía corneal computarizada generada por sistema Keratron de OPTIKON

3.1 Regresión de un oblate elipsoide

La nube de N puntos toma la forma (r_j, ρ_j) , para efectuar la regresión por el método de los mínimos cuadrados en \mathbb{R}^2 con un error total de la forma

$$E_t = \sum_{j=1}^N \left(z_j - A_a + A_a \sqrt{1 - \frac{r_j^2}{B_a^2}} \right)^2 \quad \text{con } A_a > B_a \quad (18)$$

o

$$E_t = \sum_{j=1}^N \left(z_j - \frac{n_a}{n_a + 1} \left(f_a - \sqrt{f_a^2 - \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r_j^2} \right) \right)^2 \quad (19)$$

para las funciones (16) y (17) respectivamente. Se observa claramente que la regresión debe calcular los dos semiejes usando (18), o si se desea, se supone la superficie con refracción perfecta para calcular sólo la distancia focal f_a usando (19).

Explícitamente la geometría de la superficie que corresponde al elipsoide de revolución puede expresarse con

$$r = \pm \frac{B_a}{A_a} \sqrt{(2A_a - z_a)z_a} \quad (20)$$

o respectivamente

$$r = \pm \frac{1}{n_a} \sqrt{(n_a - 1) z_a (2 n_a f_a - z_a (n_a + 1))} \quad (21)$$



Así, también los radios de curvatura principales del elipsoide de revolución se calculan con

$$\rho(z_a) = \left(1 + \left(\frac{dr}{dz_a} \right)^2 \right)^{3/2} \left| \frac{d^2 r}{dz_a^2} \right|^{-1} = \frac{1}{A_a B_a} \left(\frac{B_a^2 (A_a - z_a)^2}{A_a^2} + (2A_a - z_a) z \right)^{3/2} \text{ con } 0 < z_a < 2A_a \quad (22)$$

o respectivamente

$$\rho(z_a) = \frac{((n_a - 1)(f_a n_a - z_a)(z_a + n_a (f_a (n_a - 1) + z_a)))^{3/2}}{f_a^2 (n_a - 1)^2 n_a^4} \text{ con } 0 < z_a < \frac{2f_a n_a}{n_a + 1} \quad (23)$$

para calcular $A_a = \frac{f_a n_a}{n_a + 1}$ y $B_a = f_a \sqrt{\frac{n_a - 1}{n_a + 1}}$, y si $z_a = 0$, $\rho(0) = \frac{B_a^2}{A_a} = \frac{(n_a - 1)}{n_a} f_a$.

Para cada punto de la topografía (r_j , ρ_j), se determina la ordenada correspondiente z_j mediante la solución real de

$$\rho_j = \frac{1}{A_a B_a} \left(\frac{B_a^2 (A_a - z_j)^2}{A_a^2} + (2A_a - z_j) z_j \right)^{3/2} \quad (24)$$

con la solución

$$z_j = A_a - A_a \sqrt{\frac{A_a^2 - (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 - B_a^2}} \quad (25)$$

o respectivamente si se supone refracción perfecta

$$\rho_j = \frac{((n_a - 1)(f_a n_a - z_j)(z_j + n_a (f_a (n_a - 1) + z_j)))^{3/2}}{f_a^2 (n_a - 1)^2 n_a^4} \quad (26)$$

que corresponde a

$$z_j = \frac{f_a n_a - \sqrt{f_a n_a^2 (f_a n_a^2 - (n_a + 1)(f_a (n_a - 1) n_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}}{n_a + 1} \quad (27)$$

Substituyendo (25) o (27) en (18) o (19) respectivamente y simplificando para calcular

$$E_t = A_a^2 \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{1 - \frac{r_j^2}{B_a^2}} - \sqrt{\frac{A_a^2 - (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 - B_a^2}} \right)^2 \quad (28)$$

y desarrollando

$$E_t = A_a^2 \left(\frac{2A_a^2 - B_a^2}{A_a^2 - B_a^2} N - \frac{\sqrt[3]{(A_a^2 B_a^2)}}{A_a^2 - B_a^2} \sum_{j=1}^N (\rho_j^{2/3}) - \frac{1}{B_a^2} \sum_{j=1}^N (r_j^2) - \frac{2}{B_a \sqrt{A_a^2 - B_a^2}} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{(A_a^2 - \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2} \rho_j^2})(B_a^2 - r_j^2) \right) \right) \quad (29)$$

o si se supone refracción perfecta

$$E_t = \frac{n_a^2}{(n_a + 1)^2} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a^2 - \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r_j^2} - \sqrt{f_a (f_a n_a^2 - (n_a + 1)(f_a (n_a - 1) n_a^2 \rho_j^2)^{1/3})} \right)^2 \quad (30)$$

y desarrollando

$$E_t = \frac{n_a^2}{(n_a^2 + 1)(n_a + 1)} \left(f_a^2 (n_a^2 + 1)(n_a - 1) N - f_a (n_a^2 - 1) \sqrt[3]{f_a (n_a - 1) n_a^2} \sum_{j=1}^N (\rho_j^{2/3}) - (n_a + 1) \sum_{j=1}^N (r_j^2) - 2 \sqrt{n_a - 1} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a n_a^2 - (n_a + 1)(f_a (n_a - 1) n_a^2 \rho_j^2)^{1/3}} (f_a^2 (n_a - 1) - (n_a + 1) r_j^2) \right) \right) \quad (31)$$

Para minimizar el error total E_t se derivan (28) y (30) con relación a las variables desconocidas A_a , B_a o f_a , según el criterio de diseño sin refracción perfecta central o con ella. Como los sumandos no son funciones lineales de las variables desconocidas, se hace necesario el uso de un método numérico con la linealización de los *kernels* o sin ella, usando series de Taylor alrededor del origen, pero recordando que los desarrollos generan errores considerables cuando se alejan del origen, por eso es importante considerar el mayor número de términos que sea posible.

$$\frac{dE_t}{dA_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left((2A_a^2 + B_a^2) \rho_j^{2/3} - 3 \sqrt[3]{A_a^4 B_a^4} \right) \left(B_a - \sqrt{\frac{(A_a^2 - B_a^2)(B_a^2 - r_j^2)}{A_a^2 - \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2} \rho_j^2}} \right) = 0 \quad (32)$$

$$\frac{dE_t}{dB_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left(\sqrt[3]{A_a^4 B_a^4} - \frac{A_a^2 + 2B_a^2}{3} \frac{\sqrt[3]{\rho_j^2}}{\sqrt{B_a^2 - r_j^2}} - \frac{(A_a^2 - B_a^2)^2}{\sqrt[3]{A_a^2 B_a^4}} r_j^2 \sqrt{\frac{A_a^2 - \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2} \rho_j^2}{(A_a^2 - B_a^2)(B_a^2 - r_j^2)}} \right) \left(B - \sqrt{\frac{(A^2 - B^2)(B^2 - r_j^2)}{A^2 - \sqrt[3]{A^2 B^2} \rho_j^2}} \right) = 0 \quad (33)$$

para construir un sistema de dos ecuaciones con incógnitas A_a y B_a .

Y si se supone refracción perfecta

$$\frac{dE_t}{df_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left(2n_a^2 (n_a^2 - 1) \sqrt[3]{\rho_j^2} - 3 \sqrt[3]{n_a^4 (n_a - 1)^2} f_a^2 \left(n_a^2 - \frac{1}{c_j} \right) \right) (1 - c_j) = 0 \quad (34)$$

$$\text{con } c_j = \left(1 - \frac{n_a + 1}{n_a - 1} \frac{r_j^2}{f_a^2} \right)^{1/2} \left(n_a^2 - (n_a + 1) \sqrt[3]{(n_a - 1) n_a^2 \frac{\rho_j^2}{f_a^2}} \right)^{-1/2} \text{ cuyo desarrollo se reduce a}$$



$$(n_a^2 + 1)N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{c_j} - n_a^2 \left(\sum_{j=1}^N c_j + \frac{2(n_a^2 - 1)}{3 \sqrt[3]{n_a^4 (n_a - 1)^2 f_a^2}} \left(\sum_{j=1}^N \sqrt[3]{\rho_j^2} - \sum_{j=1}^N c_j \sqrt[3]{\rho_j^2} \right) \right) = 0 \quad (35)$$

para determinar con métodos numéricos la distancia focal f_a .

Aceptando que la córnea humana se ajusta para visión lejana, con el modelo simplificado córnea-humor acuoso $n_a = 1,3375$, la expresión anterior se reduce a

$$2,7889N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{c_j} - 1,7889 \left(\sum_{j=1}^N c_j + \frac{0,7363}{\sqrt[3]{f_a^2}} \left(\sum_{j=1}^N \sqrt[3]{\rho_j^2} - \sum_{j=1}^N c_j \sqrt[3]{\rho_j^2} \right) \right) = 0 \quad (36)$$

$$\text{con } c_j = \left(1 - 6,9259 \frac{r_j^2}{f_a^2} \right)^{1/2} \left(1,7889 - 1,9756 \sqrt[3]{\frac{\rho_j^2}{f_a^2}} \right)^{-1/2}$$

Y si se acepta refracción perfecta en la interfase córnea-humor acuoso $n_a = 1,376$:

$$2,8934N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{c_j} - 1,8934 \left(\sum_{j=1}^N c_j + \frac{0,7470}{\sqrt[3]{f_a^2}} \left(\sum_{j=1}^N \sqrt[3]{\rho_j^2} - \sum_{j=1}^N c_j \sqrt[3]{\rho_j^2} \right) \right) = 0 \quad (37)$$

$$\text{con } c_j = \left(1 - 6,3191 \frac{r_j^2}{f_a^2} \right)^{1/2} \left(1,8934 - 2,1216 \sqrt[3]{\frac{\rho_j^2}{f_a^2}} \right)^{-1/2}$$

3.2 Regresión de un prolata elipsoide

En este caso no se aplica la refracción perfecta central. Usando el mismo procedimiento utilizado para la regresión de un *oblate* elipsoide de revolución con coordenadas cilíndricas, en forma canónica $z_a = \pm (B_a - B_a \sqrt{1 - r^2 / A_a^2})$ con $A_a > B_a$, la solución final es equivalente a (32) y (33) pero con el intercambio de semiejes A_a y B_a , así:

$$\frac{dE_t}{dA_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left(\sqrt[3]{A_a^4 B_a^4} - \frac{B_a^2 + 2A_a^2}{3} \frac{\sqrt[3]{\rho_j^2}}{\sqrt{A_a^2 - r_j^2}} - \frac{(B_a^2 - A_a^2)^2}{\sqrt[3]{B_a^2 A_a^5}} r_j^2 \sqrt{\frac{B_a^2 - \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2 \rho_j^2}}{(B_a^2 - A_a^2)(A_a^2 - r_j^2)}} \right) \left(A_a - \sqrt{\frac{(B_a^2 - A_a^2)(A_a^2 - r_j^2)}{B_a^2 - \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2 \rho_j^2}}} \right) = 0 \quad (38)$$

$$\frac{dE_t}{dB_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left((2B_a^2 + A_a^2) \rho_j^{2/3} - 3 \sqrt[3]{A_a^4 B_a^4} \right) \left(A_a - \sqrt{\frac{(B_a^2 - A_a^2)(A_a^2 - r_j^2)}{B_a^2 - \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2 \rho_j^2}}} \right) = 0 \quad (39)$$

para construir un sistema de dos ecuaciones con incógnitas A_a y B_a .

3.3 Regresión de una esfera

Como caso especial, si los semiejes de la elipse son iguales, el sistema degenera en el caso esférico donde el radio A_a de la esfera que mejor se ajusta a la nube de puntos satisface

$$2A_a N - \sum_{j=1}^N (\rho_j) - A_a \sum_{j=1}^N \left(\frac{A_a - \rho_j + \sqrt{\rho_j^2 - r_j^2}}{\sqrt{A_a^2 - r_j^2}} \right) - \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{A_a^2 - r_j^2} \right) + \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{\rho_j^2 - r_j^2} \right) = 0 \quad (41)$$

donde la solución real no negativa para A_a puede obtenerse con métodos numéricos.

3.4 Regresión de un oblate elipsoide usando el método de los mínimos cuadrados con las curvaturas de la córnea humana

Este método alternativo permite minimizar el error total como función de las curvaturas,

$$E_t = \sum_{j=1}^N (k_j - k(r))^2 \quad \text{donde} \quad k(r_j) = \frac{337,5}{\rho(r_j)} = 337,5 A_a B_a \left(B_a^2 + \left(\frac{A_a^2}{B_a^2} - 1 \right) r_j^2 \right)^{-3/2} \quad (41)$$

Minimizando el error total

$$\frac{dE_t}{dA_a} = 0 \Rightarrow 337,5 A_a B_a^4 \sum_{j=1}^N \frac{(2A_a^2 + B_a^2)r_j^2 - B_a^4}{((A_a^2 - B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{((2A_a^2 + B_a^2)r_j^2 - B_a^4)k_j}{((A_a^2 - B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^{5/2}} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{dE_t}{dB_a} = 0 \Rightarrow 337,5 A_a B_a^4 \sum_{j=1}^N \frac{(4A_a^2 - B_a^2)r_j^2 - 2B_a^4}{((A_a^2 - B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{((4A_a^2 - B_a^2)r_j^2 - 2B_a^4)k_j}{((A_a^2 - B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^{5/2}} = 0 \quad (43)$$

Que pueden ser sumadas para obtener una expresión más simple

$$337,5 A_a B_a^4 \sum_{j=1}^N \frac{2A_a^2 r_j^2 - B_a^4}{((A_a^2 - B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^4} + \sum_{j=1}^N \frac{(2A_a^2 r_j^2 - B_a^4)k_j}{((A_a^2 - B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^{5/2}} = 0 \quad (44)$$

Así, las soluciones para A_a y B_a pueden obtenerse con métodos numéricos.

Si se supone refracción perfecta

$$337,5 n_a (n_a - 1)^2 f_a^2 \sum_{j=1}^N \frac{2r_j^2 - (n_a - 1)^2 f_a^2}{(r_j^2 + (n_a - 1)^2 f_a^2)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{(2r_j^2 - (n_a - 1)^2 f_a^2)k_j}{(r_j^2 + (n_a - 1)^2 f_a^2)^{5/2}} = 0 \quad (45)$$

y si $n_a = 1,3375$

$$51,4180 f_a^2 \sum_{j=1}^N \frac{2r_j^2 - 0,1139 f_a^2}{(r_j^2 + 0,1139 f_a^2)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{(2r_j^2 - 0,1139 f_a^2)k_j}{(r_j^2 + 0,1139 f_a^2)^{5/2}} = 0 \quad (46)$$



y si $n_a = 1,376$

$$65,6550 f_a^2 \sum_{j=1}^N \frac{2r_j^2 - 0,1413 f_a^2}{(r_j^2 + 0,1413 f_a^2)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{(2r_j^2 - 0,1413 f_a^2)k_j}{(r_j^2 + 0,1413 f_a^2)^{5/2}} = 0 \quad (47)$$

con f_a y r_j en milímetros.

Es importante considerar que este método hace énfasis en la zona central de la córnea, puesto que es más curva en el centro y se aplana hacia la periferia, por consiguiente, puede dar mejores resultados prácticos y clínicos para A_a y B_a , o f_a que los obtenidos con (32) y (33), o (34), a pesar de que el índice de correlación sea más bajo.

3.5 Índice de correlación

Reemplazando (25) en (14) y la función del elipsoide

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{\frac{A_a^2 - (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 - B_a^2}} - \sqrt{1 - \frac{r_j^2}{B_a^2}} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^N \left(1 - \sqrt{\frac{A_a^2 - (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 - B_a^2}} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(1 - \sqrt{\frac{A_a^2 - (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 - B_a^2}} \right) \right)^2 \right)^2}} \quad (48)$$

con las constantes A_a y B_a obtenidas en la regresión.

Suponiendo refracción perfecta, el índice de correlación c_c se obtiene al reemplazar (27) en (14) y la función elipsoide con refracción perfecta, así:

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a(n_a^2 f_a - (n_a + 1)(n_a^2(n_a - 1)f_a \rho_j^2)^{1/3}} - \sqrt{f_a^2 - \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r_j^2} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^N \left(f_a - \sqrt{f_a(n_a^2 f_a - (n_a + 1)(n_a^2(n_a - 1)f_a \rho_j^2)^{1/3}} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(f_a - \sqrt{f_a(n_a^2 f_a - (n_a + 1)(n_a^2(n_a - 1)f_a \rho_j^2)^{1/3}} \right) \right)^2 \right)^2}} \quad (49)$$

con la distancia focal f_a obtenida en la regresión.

El índice de correlación para el sistema simplificado córnea-humor acuoso de Le Grand con $n_a = 1,3375$ es:

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a(1,7889 f_a - 1,9756 (f_a \rho_j^2)^{1/3}} - \sqrt{f_a^2 - 6,9259 r_j^2} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^N \left(f_a - \sqrt{f_a(1,7889 f_a - 1,9756 (f_a \rho_j^2)^{1/3}} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(f_a - \sqrt{f_a(1,7889 f_a - 1,9756 (f_a \rho_j^2)^{1/3}} \right) \right)^2 \right)^2}} \quad (50)$$

El índice de correlación para la interfase aire-córnea para uso en un modelo con refracción perfecta en la superficie posterior con $n_a = 1,376$ es:

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a(1,8934f_a - 2,1216 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} - \sqrt{f_a^2 - 6,3191r_j^2} \right)^2}{\sum_{j=1}^N \left(f_a - \sqrt{f_a(1,8934f_a - 2,1216 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(f_a - \sqrt{f_a(1,8934f_a - 2,1216 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} \right) \right)^2}} \quad (51)$$

con la distancia focal f_a obtenida en la regresión.

La figura 3 muestra la imagen que resulta de la medición de la superficie anterior de la córnea humana de un paciente en particular.

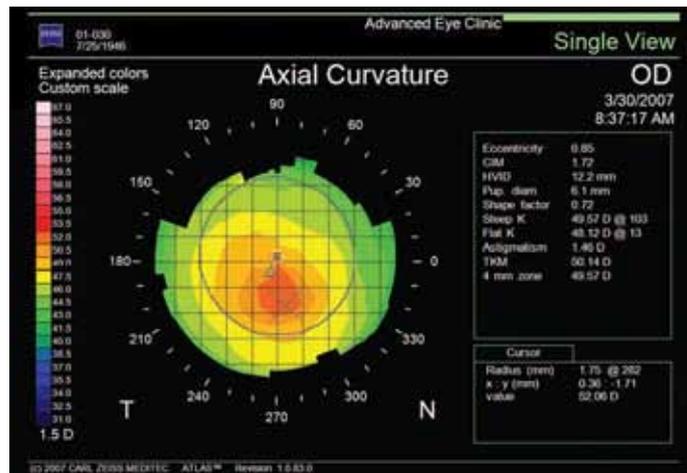


Figura 3. Topografía corneal computarizada del ojo derecho de un paciente con queratocono moderado generada por el sistema ATLAS 9000 de Carl Zeiss Meditec, Inc., probablemente con mejor ajuste hiperbólico

4. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE UN HIPERBOLOIDE DE REVOLUCIÓN

En este caso corresponde a un hiperboloide de revolución en coordenadas cilíndricas con vértice en el origen definido con

$$z_a = \pm \left(-A_a + A_a \sqrt{1 + \frac{r^2}{B_a^2}} \right) \text{ con semiejes } A_a \text{ y } B_a \text{ positivos.} \quad (52)$$

o

$$z_a = \pm \frac{1}{n_a + 1} \left(-f_a + \sqrt{f_a^2 + \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r^2} \right) \text{ con } f_a > 0 \quad (53)$$



donde n_a es el índice de refracción de una lente o de la córnea humana con un valor de 1,376 a 555 nm, si se considera refracción perfecta en la segunda superficie corneal, pero si se adopta el modelo simplificado $n_a = 1,3375$; y así, determinar los semiejes o la distancia focal f_a que mejor se ajusta a los datos suministrados por el instrumento de medición. Al igual que en el elipsoide, para facilitar la comprensión del lector, se supondrá el signo positivo en las ordenadas.

4.1 Regresión de un hiperboloide

En este caso el error total es

$$E_t = \sum_{j=1}^N \left(z_j + A_a - A_a \sqrt{1 + \frac{r_j^2}{B_a^2}} \right)^2 \quad (54)$$

o

$$E_t = \sum_{j=1}^N \left(z_j - \frac{1}{n_a + 1} \left(-f_a + \sqrt{f_a^2 + \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r_j^2} \right) \right)^2 \quad (55)$$

para las funciones (52) y (53) respectivamente. Se observa con claridad que la regresión debe calcular los dos semiejes usando (54), o si se desea, se supone la superficie con refracción perfecta para calcular sólo la distancia focal f_a usando (55).

Explícitamente la geometría de la superficie que corresponde al hiperboloide de revolución puede expresarse con

$$r = \pm \frac{B_a}{A_a} \sqrt{(2A_a + z_a)z_a} \quad (56)$$

o respectivamente

$$r = \pm \sqrt{(n_a - 1)z_a(2f_a + (n_a + 1)z_a)} \quad (57)$$

Así, también los radios de curvatura principales del hiperboloide de revolución se calculan con

$$\rho(z_a) = \left(1 + \left(\frac{dr}{dz_a} \right)^2 \right)^{3/2} \left| \frac{d^2r}{dz_a^2} \right|^{-1} = \frac{1}{A_a B_a} \left(\frac{B_a^2 (A_a + z_a)^2}{A_a^2} + (2A_a + z_a)z_a \right)^{3/2} \quad (58)$$

o respectivamente

$$\rho(z_a) = \frac{((n_a - 1)(f_a + n_a z_a)(f_a(n_a - 1) + n_a(n_a + 1)z_a))^{3/2}}{f_a^2(n_a - 1)^2} \quad (59)$$

para calcular $A_a = \frac{f_a}{n_a + 1}$ y $B_a = f_a \sqrt{\frac{n_a - 1}{n_a + 1}}$, y si $z_a = 0$, $\rho(0) = \frac{B_a^2}{A_a} = (n_a - 1)f_a$.

Para cada punto de la topografía (r_j, ρ_j) , se determina la ordenada correspondiente z_j mediante la solución real de

$$\rho_j = \frac{1}{A_a B_a} \left(\frac{B_a^2 (A_a + z_j)^2}{A_a^2} + (2A_a + z_j) z_j \right)^{3/2} \quad (60)$$

que corresponde a

$$z_j = -A_a + A_a \sqrt{\frac{A_a^2 + (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 + B_a^2}} \quad (61)$$

o respectivamente si se acepta refracción perfecta

$$\rho_j = \frac{((n_a - 1)(f_a + n_a z_j)(f_a(n_a - 1) + n_a(n_a + 1)z_j))^{3/2}}{f_a^2 (n_a - 1)^2} \quad (62)$$

que corresponde a

$$z_j = \frac{-f_a n_a + \sqrt{f_a(f_a + (n_a + 1)(f_a(n_a - 1)\rho_j^2)^{1/3})}}{n_a(n_a + 1)} \quad (63)$$

Sustituyendo (61) o (63) en (54) o (55) respectivamente y simplificando para calcular el error total como función de los radios de curvatura se tiene

$$E_t = A_a^2 \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{1 + \frac{r_j^2}{B_a^2}} - \sqrt{\frac{A_a^2 + (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 + B_a^2}} \right)^2 \quad (64)$$

y desarrollando

$$E_t = A_a^2 \left(\frac{2A_a^2 + B_a^2}{A_a^2 + B_a^2} N + \frac{\sqrt[3]{A_a^2 B_a^2}}{A_a^2 + B_a^2} \sum_{j=1}^N (\rho_j^{2/3}) + \frac{1}{B_a^2} \sum_{j=1}^N (r_j^2) - \frac{2}{B_a \sqrt{A_a^2 + B_a^2}} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{(A_a^2 + \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2 \rho_j^2})(B_a^2 + r_j^2)} \right) \right) \quad (65)$$

si se supone refracción perfecta

$$E_t = \frac{1}{(n_a + 1)^2} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a^2 + \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r_j^2} - \frac{1}{n_a} \sqrt{f_a(f_a + (n_a + 1)(f_a(n_a - 1)\rho_j^2)^{1/3})} \right)^2 \quad (66)$$



y desarrollando

$$E_t = \frac{n_a - 1}{n_a^2} \left((f_a^2 (n_a^2 + 1) (n_a - 1) N + f_a (n_a^2 - 1) \sqrt[3]{f_a (n_a - 1)} \sum_{j=1}^N (\rho_j^{2/3}) + n_a^2 (n_a + 1) \sum_{j=1}^N (r_j^2) - 2 n_a \sqrt{n_a - 1} \sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a + (n_a + 1) (f_a (n_a - 1) \rho_j^2)^{1/3}} (f_a^2 (n_a - 1) + (n_a + 1) r_j^2) \right) \right) \quad (67)$$

Para minimizar el error total E_t se derivan (64) y (66) con relación a las variables desconocidas A_a , B_a o f_a , según el criterio de diseño sin refracción perfecta central o con ella.

$$\frac{dE_t}{dA_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left((2A_a^2 - B_a^2) \rho_j^{2/3} - 3 \sqrt[3]{A^4 B^4} \right) \left(B - \sqrt{\frac{(A_a^2 + B_a^2)(B_a^2 + r_j^2)}{A_a^2 + \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2 \rho_j^2}}} \right) = 0 \quad (68)$$

$$\frac{dE_t}{dB_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left(\sqrt[3]{A_a^4 B_a^4} - \frac{A_a^2 - 2B_a^2}{3} \frac{\sqrt[3]{\rho_j^2}}{\sqrt{B_a^2 + r_j^2}} - \frac{(A_a^2 + B_a^2)^2}{\sqrt[3]{A_a^2 B_a^5}} r_j^2 \sqrt{\frac{A_a^2 + \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2 \rho_j^2}}{(A_a^2 + B_a^2)(B_a^2 + r_j^2)}} \right) \left(B_a - \sqrt{\frac{(A_a^2 + B_a^2)(B_a^2 + r_j^2)}{A_a^2 + \sqrt[3]{A_a^2 B_a^2 \rho_j^2}}} \right) = 0 \quad (69)$$

para construir un sistema de dos ecuaciones con incógnitas A_a y B_a .

Y si se supone refracción perfecta

$$\frac{dE_t}{df_a} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left(2(n_a^2 - 1) \sqrt[3]{\rho_j^2} + 3 \sqrt[3]{(n_a - 1)^2 f_a^2} \left(1 + \frac{n_a}{c_j} \right) \right) (1 - n_a c_j) = 0 \quad (70)$$

con $c_j = \sqrt{\left(1 + \frac{n_a + 1}{n_a - 1} \frac{r_j^2}{f_a^2} \right) \left(1 + (n_a + 1) \sqrt[3]{(n_a - 1) \frac{\rho_j^2}{f_a^2}} \right)^{-1}}$ cuyo desarrollo se reduce a

$$(n_a^2 - 1) N - n_a \left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{c_j} - c_j \right) \right) - \frac{2 n_a (n_a^2 - 1)}{3 \sqrt[3]{(n_a - 1)^2 f_a^2}} \left(\frac{1}{n_a} \sum_{j=1}^N \sqrt[3]{\rho_j^2} - \sum_{j=1}^N c_j \sqrt[3]{\rho_j^2} \right) = 0 \quad (71)$$

para determinar con métodos numéricos la distancia focal f_a .

4.2 Regresión de un hiperboloide usando el método de los mínimos cuadrados con las curvaturas de la córnea humana

Este método alternativo permite minimizar el error total como función de las curvaturas,

$$E_t = \sum_{j=1}^N (k_j - k(r))^2 \quad (72)$$

$$\text{donde } k(r_j) = \frac{337,5}{\rho(r_j)} = 337,5 A_a B_a \left(B_a^2 + \left(\frac{A_a^2}{B_a^2} + 1 \right) r_j^2 \right)^{-3/2}$$

Minimizando el error total

$$\frac{dE_t}{dA_a} = 0 \Rightarrow 337,5 A_a B_a^4 \sum_{j=1}^N \frac{(B_a^2 - 2A_a^2)r_j^2 + B_a^4}{((A_a^2 + B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{((B_a^2 - 2A_a^2)r_j^2 + B_a^4)k_j}{((A_a^2 + B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^{5/2}} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{dE_t}{dB_a} = 0 \Rightarrow 337,5 A_a B_a^4 \sum_{j=1}^N \frac{(4A_a^2 + B_a^2)r_j^2 - 2B_a^4}{((A_a^2 + B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{((4A_a^2 + B_a^2)r_j^2 - 2B_a^4)k_j}{((A_a^2 + B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^{5/2}} = 0 \quad (74)$$

Que se pueden sumar para obtener una expresión más simple

$$337,5 A_a B_a^4 \sum_{j=1}^N \frac{2(A_a^2 + B_a^2)r_j^2 - B_a^4}{((A_a^2 + B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^4} + \sum_{j=1}^N \frac{(2(A_a^2 + B_a^2)r_j^2 - B_a^4)k_j}{((A_a^2 + B_a^2)r_j^2 + B_a^4)^{5/2}} = 0 \quad (75)$$

Así, las soluciones para A_a y B_a pueden obtenerse con métodos numéricos.

Si se supone refracción perfecta

$$337,5 (n_a - 1)^2 f_a^2 \sum_{j=1}^N \frac{2n_a^2 r_j^2 - (n_a - 1)^2 f_a^2}{(n_a^2 r_j^2 + (n_a - 1)^2 f_a^2)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{(2n_a^2 r_j^2 - (n_a - 1)^2 f_a^2)k_j}{(n_a^2 r_j^2 + (n_a - 1)^2 f_a^2)^{5/2}} = 0 \quad (76)$$

y si $n_a = 1,3375$ para el sistema simplificado córnea-humor acuoso de Le Grand

$$38,4434 f_a^2 \sum_{j=1}^N \frac{3,5778 r_j^2 - 0,1139 f_a^2}{(1,7889 r_j^2 + 0,1139 f_a^2)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{(3,5778 r_j^2 - 0,1139 f_a^2)k_j}{(1,7889 r_j^2 + 0,1139 f_a^2)^{5/2}} = 0 \quad (77)$$

y si $n_a = 1,376$ para la interfase aire-córnea para usarse en un modelo con refracción perfecta en la superficie posterior

$$47,7144 f_a^2 \sum_{j=1}^N \frac{3,7868 r_j^2 - 0,1414 f_a^2}{(1,8934 r_j^2 + 0,1414 f_a^2)^4} - \sum_{j=1}^N \frac{(3,7868 r_j^2 - 0,1414 f_a^2)k_j}{(1,8934 r_j^2 + 0,1414 f_a^2)^{5/2}} = 0 \quad (78)$$

con f_a y r_j en milímetros.



Se debe aclarar que, aunque histológicamente la córnea humana tiene diferentes tipos de células con diferentes índices de refracción, el estroma corneal es el tejido más abundante, que prácticamente configura el índice de refracción promedio $n_c = 1,376$; sin embargo, debe recordarse que las células epiteliales de la primera y delgada superficie tienen un índice de refracción de 1,401. Los modelos matemáticos que se desarrollen en el futuro posiblemente considerarán estos detalles. Algunos sistemas láser con pulsos de femtosegundos (10^{-12} s) usados para la *keratomileusis in situ* aprovechan las diferencias ópticas que existen entre las diversas capas de células corneales para iniciar la cirugía desepitelizando la córnea, creando un alerón de células epiteliales con la membrana de Bowman y así exponer el estroma a la ablación (remoción de tejido por evaporación), sin los riesgos comunes que implica el uso del microqueratomo² (Carriazo-Barraquer, 2001) con anillo de fijación.

4.3 Índice de correlación

Reemplazando (61) en (14) y la función del hiperboloide

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{\frac{A_a^2 + (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 + B_a^2}} - \sqrt{1 + \frac{r_j^2}{B_a^2}} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^N \left(1 - \sqrt{\frac{A_a^2 + (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 + B_a^2}} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(1 - \sqrt{\frac{A_a^2 + (A_a^2 B_a^2 \rho_j^2)^{1/3}}{A_a^2 + B_a^2}} \right) \right)^2 \right)^2}} \quad (79)$$

con las constantes A_a y B_a obtenidas en la regresión.

Si se supone refracción perfecta, el índice de correlación c_c se obtiene al reemplazar (63) en (14) y la función elipsoide con refracción perfecta, así:

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{n_a^2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{n_a} \sqrt{f_a (f_a - (n_a + 1) ((n_a - 1) f_a \rho_j^2)^{1/3}} - \sqrt{f_a^2 + \frac{n_a + 1}{n_a - 1} r_j^2} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a - (n_a + 1) ((n_a - 1) f_a \rho_j^2)^{1/3}} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a - (n_a + 1) ((n_a - 1) f_a \rho_j^2)^{1/3}} \right) \right)^2 \right)^2}} \quad (80)$$

con la distancia focal f_a obtenida en la regresión.

2 Herramienta de cirugía semejante a un cepillo de carpintero con cuchilla de zafiro y posicionamiento micrométrico. Los accidentes quirúrgicos son comunes con esta herramienta, generalmente debido a fallas del anillo de sujeción, por lo tanto, cada vez más está en desuso.

El índice de correlación para el sistema simplificado córnea-humor acuoso de Le Grand con $n_a = 1,3375$ es:

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{1,7889 \sum_{j=1}^N \left(0,7476 \sqrt{f_a (f_a - 1,6274 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} - \sqrt{f_a^2 + 6,9259 r_j^2} \right)^2}{\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a - 1,6274 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a - 1,6274 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} \right) \right)^2}} \quad (81)$$

El índice de correlación para la interfase aire-córnea para su utilización en un modelo con refracción perfecta en la superficie posterior con $n_c = 1,376$ es:

$$c_c = \sqrt{1 - \frac{1,8934 \sum_{j=1}^N \left(0,7267 \sqrt{f_a (f_a - 1,7149 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} - \sqrt{f_a^2 + 6,3191 r_j^2} \right)^2}{\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a - 1,7149 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{f_a (f_a - 1,7149 (f_a \rho_j^2)^{1/3})} \right) \right)^2}} \quad (82)$$

5. CONCLUSIONES

El modelo matemático-estadístico presentado permite modelar con precisión y exactitud, de forma automática, lentes para instrumentos, espejos, lentes de contacto, lentes intraoculares y cirugías refractivas, utilizando la información pixelada a color medida por los modernos queratómetros computarizados con el futuro desarrollo de software experto. El modelo también sirve para su uso en oftalmología en técnicas de "eye tracking" (localización automática del punto focal de visión) y para el desarrollo de lentes personalizados.

NOMENCLATURA

A	Variable recurrente
A_a	Semieje mayor anterior
B	Variable recurrente
B_a	Semieje menor anterior
C	Variable recurrente
c_c	Coefficiente o índice de correlación
c_j	Variable j-ésima recurrente
D	Variable recurrente
E_t	Error total
f_a	Distancia focal geométrica u óptica anterior
j	Punto j
K	Poder queratométrico corneal
k	Curvatura o queratometría
k_j	Queratometría j-ésima



N	Número de puntos
n_a	Índice de refracción relativo al aire
r	Radio polar
r_j	Radio polar j -ésimo
x	Abscisa cartesiana
x_j	Abscisa j -ésima cartesiana
y	Abscisa cartesiana
y_j	Abscisa j -ésima cartesiana
z	Ordenada cilíndrica
z_a	Ordenada cartesiana anterior
z_j	Ordenada j -ésima cartesiana
θ	Ángulo polar
ρ	Radio de curvatura
ρ_j	Radio de curvatura j -ésimo

REFERENCIAS

1. Angel, Roger; Worden, Simon P.; Borra, Ermanno F.; Eisenstein, Daniel J.; Foing, Bernard; Hickson, Paul; Josset Jean-Luc; Ma, Ki Bui; Seddiki, Omar; Sivanandam1, Suresh; Thibault, Simon and Van Susante, Paul. *A cryogenic liquid-mirror telescope on the moon to study the early universe*. 2008. ApJ680 1582-1594. The Astrophysical Journal. American Astronomical Society.
2. Bates, Douglas M. and Watts, Donald G. *Nonlinear regression and its applications*. New York: John Wiley, 1988.
3. Carriazo-Barraquer. *US Patent 6,302,896* octubre 16 de 2001.
4. Davis, William R.; Raasch, Thomas W.; Mitchell, G Lynn; Mutti, Donald O. and Zadnik, Karla. Corneal asphericity and apical curvature in children: a cross-sectional and longitudinal evaluation. College of Optometry, The Ohio State University, Columbus, Ohio. *Investigative Ophthalmology and Visual Science*. 2005; 46:1899-1906. DOI: 10.1167/iovs.04-0558.
5. Huang, David; Shekhar, Raj and Tang, Maolong. *Method and apparatus for controlling ablation in refractive surgery*. Patente WO/2003/075778, Aplicacion Internacional No.: PCT/US2003/006343 18.09.2003 Applcate: The Cleveland Clinic Foundation. Cleveland, OH.
6. Kincaid, David y Cheney, Ward. *Análisis numérico: las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
7. Ortega, James M. and Rheinboldt, Werner C. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Classics in Applied Mathematics. Philadelphia: SIAM, 2000. ISBN 0-89871-461-3.
8. Valencia, Juan Camilo y Bedoya, Álvaro Hernán. *Regresión y correlación de la superficie anterior de la córnea humana con toroide regular de revolución*, Revista Ingeniería y Ciencia, Universidad EAFIT, 2010, en proceso de publicación.
9. Wichterle, Kamil and Wichterle, Otto. *Surface shapes of fluids in rotating vessels*. Czech. Academy of Sciences. Prague, Czechoslovakia. Applied Scientific Research 22. April 1970.