Revista EIA, ISSN 1794-1237 Número 18, p. 61-76. Diciembre 2012
Escuela de Ingeniería de Antioquia, Medellín (Colombia)

# MODELOS DE SISTEMAS MRP CERRADOS INTEGRANDO INCERTIDUMBRE

Martín Dario Arango*
Jose Alejandro Cano**
Karla Cristina Álvarez***

## RESUMEN

En este artículo se muestran cuatro modelos de los sistemas MRP cerrados con incertidumbre en los componentes de producción, como son: la capacidad necesaria de fabricación de cada producto, el tiempo de entrega y la disponibilidad del inventario. Dichos parámetros se tratan mediante la lógica difusa modelizando un sistema MRP cerrado determinista. Por tanto, se presentan inicialmente tres modelos de sistema MRP cerrado, donde cada uno considera de forma independiente la incertidumbre en capacidad, tiempo de entrega y disponibilidad de inventario. Igualmente, se presenta un cuarto modelo de sistema MRP cerrado que de forma conjunta analiza la incertidumbre en los tres parámetros mencionados. Cada uno de estos modelos es validado con información de una empresa del sector eléctrico colombiano, evaluando el costo total del plan de producción, nivel de inventarios, nivel de servicio y complejidad computacional.

PALABRAS CLAVE: MRP; MRP cerrado; lógica difusa; programación matemática difusa; planeación de la producción; incertidumbre.

* Ingeniero Industrial, Universidad Autónoma Latinoamericana. Doctor Ingeniero Industrial, Universidad Politécnica de Valencia, España. Profesor Titular y Director del Grupo de I+D+i en Logística Industrial-Organizacional "GICO", Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia. mdarango@unal.edu.co

** Ingeniero Industrial. Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Ingeniería: Ingeniería Administrativa. Investigador en la línea de logística, Grupo de I+D+i en Logística Industrial-Organizacional "GICO". Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.joseale84@hotmail.com

*** Ingeniera Industrial. Universidad Nacional de Colombia. Magíster (c) en Ingeniería: Ingeniería Administrativa. Investigadora en la línea de logística, Grupo de I+D+i en Logística Industrial-Organizacional "GICO". Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia. kcalvare@unal.edu.co

Artículo recibido 26-X-2011. Aprobado 8-VIII-2012
Discusión abierta hasta junio de 2013

## CLOSED MODELS OF MRP SYSTEMS CONSIDERING UNCERTAINTIES


### ABSTRACT

In this paper, we present four models of uncertainty in the MRP closed systems in the production components, such as: manufacturing capacity of each product, delivery time and inventory availability. These parameters are processed by the fuzzy logic by modeling an MRP closed system deterministic. Therefore, three models are initially MRP closed system, where each independently consider uncertainty in capacity, delivery time and inventory availability. Also, we present a fourth model of MRP closed system jointly analyzes the uncertainty in the three parameters mentioned above. Each of these models is corroborated with information from a company in the Colombian electricity area, evaluating the total cost of the production plan, inventory levels, service level and computational complexity.


KEY WORDS: MRP; closed MRP; fuzzy logic; diffuse mathematical programming; production plan; uncertainty.

## MODELOS DE SISTEMAS MRP FECHADOS INTEGRANDO INCERTEZA


### RESUMO

Neste artigo mostram-se quatro modelos dos sistemas MRP fechados com incerteza nos componentes de produção, como são: a capacidade necessária de fabricação da cada produto, o tempo de entrega e a disponibilidade do inventario. Ditos parâmetros tratam-se mediante a lógica difusa modelando um sistema MRP fechado determinista. Por tanto, apresentam-se inicialmente três modelos de sistema MRP fechado, onde a cada um considera de forma independente a incerteza em capacidade, tempo de entrega e disponibilidade de inventario. Igualmente, apresenta-se um quarto modelo de sistema MRP fechado que de forma conjunta analisa a incerteza nos três parâmetros mencionados. A cada um destes modelos é validado com informação de uma empresa do setor elétrico colombiano, avaliando o custo total do plano de produção, nível de estoques, nível de serviço e complexidade computacional.


PALAVRAS-CÓDIGO: MRP; MRP fechado; lógica difusa; programação matemática difusa; planejamento da produção; incerteza.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen sistemas importantes para la planeación de la producción, tales como los sistemas de planeación de requerimientos de materiales MRP (material requeriments planning) que permiten traducir las necesidades de producción de productos terminados en necesidades netas de producción o compra de cada uno de los componentes de dichos productos, permitiendo programar el uso de recursos dentro de la empresa. Sin embargo, para asignar recursos se requiere realizar una toma de decisiones soportada en información que sea lo menos imprecisa posible, esto implica introducir el manejo de incertidumbre en los planes de producción. En este artículo se proponen modelos de programación matemática difusa para sistemas MRP, que consideran incertidumbre en parámetros como la disponibilidad necesaria de capacidad de fabricación, disponibilidad de inventario y tiempos de entrega, en un ambiente cerrado o restringido por capacidades de los recursos, validando la funcionalidad de dichos modelos en una industria del sector eléctrico colombiano.

Se presenta una contextualización de los sistemas de planeación de la producción, que consideran aspectos relevantes en los sistemas MRP determinista. Se estudia el manejo de la incertidumbre en los sistemas de planeación y MRP, focalizándose en la programación matemática difusa. Finalmente, se presentan conclusiones y recomendaciones sobre la importancia de gestionar la incertidumbre en parámetros como la disponibilidad necesaria de capacidad de fabricación, disponibilidad de inventarios y tiempos de entrega.

## 2. SISTEMAS DE PLANEACIÓN DE LA PRODUCCIÓN

La planeación de la producción incluye decisiones estratégicas, tácticas y operativas. Las decisiones estratégicas hacen frente a cuestiones de largo plazo, tales como distribución de las instalaciones y capacidad de planificación de recursos (Torabi, Ebadian y Tanha, 2010). La planeación agregada de la producción APP (aggregate production planning) es un proceso de planificación de capacidad a mediano plazo que trata de determinar la producción óptima, fuerza de trabajo y niveles de inventario para cada periodo del horizonte de planificación (Jamalnia y Soukhakian, 2009). De la APP dependen de manera jerárquica el programa maestro de producción MPS (master production schedule) y el plan de requerimientos de materiales (MRP). EL MPS se caracteriza por su habilidad para determinar de forma precisa la factibilidad de un programa basado en unas restricciones de capacidad agregada por medio de una comunicación directa con el cálculo de necesidades de materiales MRP (Nahmias, 2007; Chase, Jacobs y Aquilano, 2009; Heizer y Render, 2009). El planteamiento tradicional del MRP comienza con el MPS que brinda las órdenes para los productos finales en términos de cantidad y fecha de entrega (Orlicky, 1975; Du y Wolfe, 2000; Wong y Kleiner, 2001). El MPS se convierte en fechas específicas de inicio y de entrega para todos los subensambles y componentes, basándose en la estructura del producto, y luego esto se transforma en un problema detallado de programación de piso que busca cumplir con las fechas de entrega pactadas (Chen y Ji, 2007). El MRP ha sufrido cambios importantes, como son la construcción del sistema MRP cerrado y MRP II (Wong y Kleiner, 2001). Un sistema MRP cerrado busca mejorar un sistema MRP al incorporar la planificación de necesidades de capacidad CRP (capacity requirements planning), que permite proporcionar realimentación de información de capacidades y dar la facultad de hacer ajustes y regeneraciones al sistema MRP cerrado (Pai, 2003; Pai *et al.*, 2004; Mohebbi y Choobineh, 2005; Grubbstrom y Huynh, 2006; Huynh, 2006; Jacobs y Weston, 2007; Mula, Poler y García, 2007).

El sistema de planeación de los recursos de manufactura (MRP II-manufacturing resource planning) es una consecuencia y extensión directa del MRP de ciclo cerrado, que busca la efectiva planeación de todos los recursos de la compañía e integra una variedad de procesos (Reynoso *et al.*, 2002; Geneste, Grabot y Reynoso, 2005; Grabot *et al.*, 2005; APICS, 2008; Niu y Dartnall, 2008.

## 3. PLANTEAMIENTO DE UN MODELO MRP DETERMINISTA

### 3.1 Modelos matemáticos deterministas para MRP

En la literatura existe una variedad de modelos matemáticos deterministas para sistemas MRP que buscan maximizar o minimizar una función objetivo por medio de diferentes técnicas de optimización, garantizando el cumplimiento de unas restricciones planteadas que permiten que los resultados del modelo sean una solución factible. Los modelos más relevantes tenidos en cuenta son los de Shapiro (1989), Graves (1999), Tang, Wang y Fung (2000), Pochet (2001), Mula, Poler y García (2007), Arango, Serna y Álvarez (2009), Almeder (2010), Arango, Serna y Pérez (2010) y Arango, Vergara y Gaviria (2010). Se encuentra que estos modelos enfocados para la planeación de la producción y la planeación de materiales, en su mayoría, son problemas multiproducto, multinivel, multiperiodo, con capacidad limitada, cuya función objetivo persigue la reducción de los costos de producción, de inventarios y de capacidad de forma general. Igualmente estos modelos suelen presentar restricciones de balance de inventarios y requisitos de materiales, restricciones de capacidad, de indicadores de producción, de no negatividad y complementarias que ayudan a personalizar cada uno de los modelos. Dentro de las variables de decisión básicamente se encuentran en común la cantidad de pedido del producto *i* en el periodo *t*, el tiempo extra del recurso *k* en el periodo *t*, la variable binaria de producción para el producto *i* en el periodo *t* y el inventario del artículo *i* al final del periodo *t*.

Con base en lo anterior, se prepara una propuesta de modelo determinista para la planeación de necesidades de materiales denominado DETERMOPTIMO.

La tabla 1 presenta los parámetros del modelo planteado. Luego se muestra el planteamiento del modelo.

**Tabla 1.** Definición de variables para el modelo MRP

| Índices | *Definición* |
|---|---|
| *P* | Número de componentes (i=1,…,P) |
| *T* | Horizonte de planeación (t=1,…,T) |
| *K* | Número de recursos (k=1…K) |

| *Parámetros y coeficientes* | *Definición* |
|---|---|
| *R(i,j)* | Número de componentes i necesarios para realizar componentes j |
| *D(i,j)* | Demanda externa del componente i en el periodo t |
| *LS(i)* | Tamaño de lote mínimo para el componente i |
| *LT(i)* | Tiempo de suministro para producir/comprar un lote del producto i |
| *I(i,0)* | Inventario inicial del componente i |
| $E_i$ | Exactitud de inventario del producto i |
| *S(i,k)* | Fracción necesaria para cambiar o preparar al artículo i en el recurso k |
| *U(i,k)* | Fracción del recurso k necesario para una unidad del producto i |
| *F(k,t)* | Máxima fracción del recurso k que puede adicionarse en el periodo t |
| *H(i)* | Costo de almacenamiento por unidad por periodo del producto i |
| *C(i)* | Costo total de realizar y preparar un pedido del producto i (SetupCost) |
| *CO(k,t)* | Costo por fracción de capacidad adicionada al recurso k en el periodo t |

| *Variable* | *Definición* |
|---|---|
| $x_{i,t}$ | Cantidad de pedido para producir del producto i en el periodo t |
| $O_{k,t}$ | Fracción adicionada del recurso k en el periodo t |
| $\delta_{i,t}$ | Indicador binario de producción para el producto i en el periodo t |
| *I(i,t)* | Inventario del producto i al final del periodo t |

Modelo DETERMOPTIMO

$$Min\ Z = \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{P}\left(H(i)\times E_i \times I_{i,t} + C(i)\times\delta_{i,t}\right) + \sum_{k=1}^{K} CO(k,t)\times O_{k,t}\right] \quad i = 1, ..., P \quad t = 1, ..., T \quad k = 1, ..., K \tag{1}$$

Sujeto a:

$$E_i \times I_{i,t-1} + x_{i,t-LT(i)} = D(i,t) + \sum_{j=1}^{P} R(i,j)\times x_{j,t} + E_i \times I_{i,t} \quad i = 1, ..., P \quad t = 1, ..., T \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{P}\left(U(i,k)x_{i,t} + S(i,k)\delta_{i,t}\right) \le 1 + O_{k,t} \quad k = 1, ..., K \quad t = 1, ..., T \tag{3}$$

$$O_{lt} \le F_{kl} \quad k = 1, ..., K \quad t = 1, ..., T \tag{4}$$

$$\delta_{i,\,t}\, LS\,(i) \le x_{i,\,t} \quad i = 1, ..., I \quad t = 1, ..., n \tag{5}$$

$$\delta_{i,t} \in \{0,1\} \tag{6}$$

$$x_{i,t} \geq 0, I_{i,t} \geq 0\ O_{k,t} \geq 0 \qquad \forall_{i,k,t} \tag{7}$$

La función objetivo del modelo, dada por la ecuación 1, busca minimizar los costos de mantenimiento de inventarios, puesto que estos pueden cambiar como resultado de las decisiones tomadas sobre las cantidades para producir o comprar de determinado componente o producto (Arango, Serna y Álvarez, 2009). Se minimizan las preparaciones de pedidos de compra y órdenes de producción para maximizar la eficiencia en la planta de producción y en el departamento de compras. Se minimiza el costo de capacidad extra de los recursos para garantizar que se aproveche al máximo el tiempo regular disponible y obtener mayor utilización y aprovechamiento de la inversión ejecutada en dichos recursos.

La ecuación 2 representa las restricciones de balance de inventario; garantiza que la cantidad de materiales pedidos más las existencias iniciales en inventario sean iguales a la demanda dependiente (interna) e independiente (externa) más el inventario final para el producto *i* en el periodo *t*. El factor de exactitud de inventarios de cada componente *E(i)* permite garantizar mayor exactitud respecto a la cantidad disponible en inventarios para cada producto *i*.

$$E(i) = \frac{Unidades\ Físicas(i)}{Unidades\ Teóricas(i)} \tag{8}$$

Las restricciones de capacidad de los recursos, representadas por la ecuación 3, implican que los requisitos de capacidad deben ser menores o iguales que la capacidad disponible (Arango, Serna y Álvarez, 2009). Estas restricciones garantizan que el plan sea factible en relación con la capacidad de producción, y que los recursos requeridos para producir la cantidad necesaria del ítem *i* en el periodo *t* más el tiempo de preparación no excedan la capacidad disponible. Las restricciones de capacidad extra máxima, representadas en la ecuación 4, hacen que el recurso *k* en el periodo *t* tenga un límite superior, causado ya sea por la capacidad máxima de producción, por las limitaciones legales que puedan existir y las políticas empresariales respecto al uso de capacidad extra de producción.

Las restricciones de lote mínimo de producción, representadas por la ecuación 5, garantizan que cada componente o producto se fabrique o compre en unas cantidades mínimas, que pueden deberse a la configuración de los procesos productivos, volúmenes mínimos de ventas, entre otras. La ecuación 6 significa que la variable de decisión llamada indicador de producción solo puede tomar valores de 0 o 1 para el producto *i* en el periodo *t*. Este indicador se utiliza en las ecuaciones 1, 3 y 5. La ecuación 7 representa las restricciones de no negatividad para las variables de decisión del modelo. El modelo DETERMOPTIMO sirve para comparar los resultados arrojados por los modelos MRP difusos que se proponen en este artículo.

## 3.2 Incertidumbre en los sistemas de planeación MRP

La incertidumbre puede estar presente como aleatoriedad, imprecisión, falta de conocimiento o incertidumbre epistémica (Mula, Poler y García, 2007). La consideración de la incertidumbre en los sistemas de la fabricación significa un gran avance, en términos de describir la realidad, pero esto puede presentar problemas para resolver un modelo. De los modelos para la planificación de la producción que no reconocen la incertidumbre se puede esperar que generen decisiones de planificación inferiores en comparación con los modelos que toman explícitamente la incertidumbre (Mula, Poler y García, 2008).

En la tabla 2, Mula, Poler y García (2006) presentan una clasificación de acuerdo con el área de planeación de producción y logística, y en cada área diferenciando el enfoque que se da en el modelamiento. Se adicionan a esta tabla los autores de algunos trabajos recientes en los modelos existentes para cada área de la planeación de la producción.

**Tabla 2.** Esquema de clasificación para modelos de planeación de la producción bajo incertidumbre

| Tema de investigación | Modelos propuestos | Autores |
|---|---|---|
| Planeación agregada | De inteligencia artificial | Pedrycz y Camargo, 2003; Jamalnia y Soukhakian, 2009; Lan, Liu y Sun, 2009; Colvin y Maravelias, 2010 |
| | Analíticos | Tang, Wang y Fung, 2000; Tang y Grubbstrom, 2002; Arango, Serna y Pérez (2010); Baykasoglu y Gocken, 2010 |
| | De simulación | Xie, Zha y Lee, 2003 |
| Planeación jerárquica de la producción | Analíticos | Cristobal, Escudero y Monge, 2009; Torabi y Hassini, 2009 |
| | De simulación | Selcuk, Fransoo y De Kok, 2006 |
| Planeación de requisitos de materiales (MRP) | Conceptuales | Koh *et al.,* 2000; Tavakoli-Moghaddam *et al.,* 2007 |
| | Analíticos | Mula, 2004; Mula, Poler y García, 2006, 2007; Noori *et al.,* 2008; Arango, Serna y Álvarez (2009); Barba y Adenso, 2009; Arango, Vergara y Gaviria (2010); Feili, Moghaddam y Zahmatkesh, 2010 |
| | De inteligencia artificial | Du y Wolfe, 2000; Louly, Dolgui y Hnaien*,* 2008; *Li et al.,* 2009; Almeder, 2010 |
| | De simulación | Choobineh y Mohebbi, 2004; Daria y Cruz-Machado, 2006; Wazed, Ahmed y Nukman, 2010 |
| Planeación de la capacidad | Modelos analíticos | Pai, 2003; Pai *et al.,* 2004; Grubbstrom y Huynh, 2006; Huynh, 2006; Mula, Poler y García, 2007 |
| | De simulación | Mohebbi y Choobineh, 2005 |
| Planeación de recursos de manufactura (MRP II) | Analíticos | Reynoso *et al.,* 2002; Geneste, Grabot y Reynoso, 2005; Grabot *et al.,* 2005 |
| | De inteligencia artificial | Niu y Dartnall, 2008 |
| Gestión de inventarios | Analíticos | Ouyang y Chang, 2001; Samanta y Al-Araimi, 2001; Fu y Pan, 2008; Chauhan, Dolgui y Proth, 2009; Inderfurth, 2009; Nagoorgani y Maragatham, 2009 |
| | De inteligencia artificial | Pedrycz y Camargo, 2003; Bjork y Carlsson, 2007; Maiti y Maiti, 2007; Hnaien, Delorme y Dolgui, 2010 |
| Planeación de la cadena de suministro | Analíticos | Chang, Wang y Wang, 2006; Demirli y Yimer, 2008; Sodhi y Tang, 2009; Mula, Peidro y Poler, 2010; Paksoy, Pehlivan y Ozceylan, 2010; Peidro *et al.,* 2010; Sudiarso y Putranto, 2010 |
| | De inteligencia artificial | Aliev *et al.,* 2007; Petrovic *et al.,* 2008 |
| | Conceptuales | Kaipia, Korhonen y Hartiala, 2006; (Bayrak, Celebi y Taskin, 2007 |

Adaptado de Mula *et al.* (2006)

## 3.3 Programación lineal difusa

Cuando se realiza la modelación matemática en el sector industrial por medio de optimización, debido a la cantidad de parámetros y restricciones, en muchos casos no es posible encontrar una solución factible. Debido a esto, es pertinente la propuesta de un método de optimización flexible u optimización con restricciones difusas que permita dar solución a dichos problemas (López y Restrepo, 2008). La teoría de conjuntos difusos representa una herramienta atractiva para apoyar la investigación de planificación de la producción cuando la dinámica del entorno de fabricación limita la especificación de los objetivos del modelo, las restricciones y los parámetros (Mula, Poler y García, 2008).

López y Restrepo (2008) comentan que los problemas de programación lineal difusa se trabajan con modelos matemáticos que buscan convertir el problema original en un modelo de optimización paramétrica equivalente que puede resolverse con técnicas y métodos tradicionales de la programación matemática según el caso (programación lineal, programación entera mixta, programación no lineal, entre otros). Para la validación y aceptación de los resultados que arrojan los modelos de problemas de programación lineal difusa, Jamalnia y Soukhakian (2009) proponen que dichos modelos se deben resolver primero de forma determinista y luego comparar los valores de la solución con los valores del modelo difuso equivalente.

De acuerdo con Mula, Poler y García (2007), autores como Kacprzyk y Orlovsky (1987), Delgado *et al*. (1994), Rommelfanger (1996) y Zimmermann (2000) muestran algunas posibilidades de cómo la teoría de conjuntos difusos se puede acomodar dentro de la programación lineal. Igualmente otros autores como Nakamura (1984), Delgado, Verdegay y Vila (1989), Lodwick (1990), Wang y Qiao (1993), Fang y Li (1999), Rommelfanger y Slowinski (1999), Kumar, Vrat y Shankar (2006) y Ebrahimnejad (2011) trabajan la teoría de conjuntos difusos dentro de la programación lineal, formulan propuestas de mejoramiento y adaptaciones según condiciones en donde se presenten valores difusos en el problema de programación, tales como restricciones, coeficientes tecnológicos y metas. Respecto de los modelos de lógica difusa aplicados a la manufactura autores como Lee, Kramer y Hwang (1991), Gen, Tsujimura e Ida (1992), Mula, Poler y García (2004), Chang y Liao (2006), Kahraman, Ertay y Büyüközkan (2006), Arango, Serna y Pérez (2008, 2010), Petrovic *et al*. (2008), Hasuike e Ishii (2009), y Arango, Vergara y Gaviria (2010) han adaptado, aplicado y creado modelos y enfoques para dar solución a problemas de cadena de abastecimiento, distribución de recursos, planeación agregada, sistemas MRP y planeación de producción.

## 4. DESARROLLO DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA DIFUSA PARA MRP

Se desarrollan cuatro modelos de programación matemática difusa y sus modelos equivalentes para ser solucionados por metodologías de programación matemática. Para modelos de programación matemática difusa se tienen en cuenta incertidumbres en la disponibilidad de capacidad de fabricación, en la disponibilidad de inventarios y en los tiempos de entrega. Tres de los modelos estudian de forma individual cada parámetro de incertidumbre mencionados y un cuarto modelo que integra dichos parámetros.

**Modelo CAPFUZZY.** Para este modelo se plantea el problema de programación matemática para MRP teniendo en cuenta incertidumbre en la capacidad de fabricación. Se tomará a $\tilde{U}(i,k)$ como un coeficiente tecnológico difuso, el cual representa la fracción del recurso k necesaria para fabricar una unidad del producto *i*. Para este caso se supone que los coeficientes $U(i,k)$ tienen valores definidos en los intervalos $[U(i,k)\ U(i,k)+d_{i,k}]$, donde $d_{i,k}$ es el valor máximo permitido con el que se puede desfasar la fracción del recurso *k* necesario para fabricar una unidad del producto *i*. Este modelo se puede solucionar de forma no simétrica en donde el tomador de decisiones decide qué nivel de satisfacción $\lambda$ requiere para poder solucionar el modelo. Por lo tanto, el modelo MRP con coeficientes difusos de requisito de capacidad de producción se transforma en el siguiente modelo denominado CAPFUZZY.

$$Min\ Z = \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{P}\left(H(i)\times E_i \times I_{i,t} + C(i)\times \delta_{i,t}\right) + \sum_{k=1}^{K} CO(k,t)\times O_{k,t}\right]$$

Sujeto a:

$$E_i \times I_{i,t-1} + x_{i,t-LT(i)} = D(i,t) + \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} + E_i \times I_{i,t}$$

$$\sum_{i=1}^{P} \left[ \left( U(i,k) + d_{i,k} - \lambda d_{i,k} \right) + x_{i,t} + S(i,k)\delta_{i,t} \right] \leq 1 + O_{k,t}$$

$$O_{kt} \leq F_{kt}$$

$$\delta_{i,t}\, LS(i) \leq x_{i,t}$$

$$\delta_{i,t} \in \{0,1\}\; x_{i,t} \geq 0,\, I_{i,t} \geq 0\; O_{k,t} \geq 0\; \forall_{i,k,t}$$

**Modelo INVENFUZZY.** Este modelo plantea el problema de programación matemática para MRP, teniendo en cuenta incertidumbre en la disponibilidad de inventarios. Se tomará a *E(i)* como un coeficiente difuso que representa la exactitud de inventario del producto *i*. Se incluirán ecuaciones de inventario definitivo, $INVDEF_{i,t}$, las cuales expresan cuál es el nivel de inventario real o corregido para la función objetivo para un producto *i* al final de un periodo *t*, esto se hace con el fin de no tener parámetros difusos en la función objetivo. El inventario definitivo está dado por la ecuación:

$$\tilde{E}_i \times I_{i,t} = INVDEF_{i,t} \tag{9}$$

La falta de conocimiento de la exactitud de inventario del producto *i* se puede definir con un número difuso triangular simétrico $\tilde{E}_i = (E_i - a_i, E_i, E_i + a_i)$. Con base en esto, las ecuaciones de balance de inventario y las ecuaciones de inventario definitivo para el modelo matemático difuso se pueden expresar de la siguiente forma (Mula, Poler y García, 2007):

$$\left(E_i + a_i(1-\lambda)\right) \times \left(I_{i,t-1} - I_{i,t}\right) + x_{i,t-LT(i)} - \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} \leq D(i,t) \tag{10}$$

$$\left(E_i - a_i(1-\lambda)\right) \times \left(I_{i,t-1} - I_{i,t}\right) + x_{i,t-LT(i)} - \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} \geq D(i,t) \tag{11}$$

$$\left(E_i + a_i(1-\lambda)\right) \times I_{i,t} \leq INVDEF_{i,t} \left(E_i - a_i(1-\lambda)\right) \times I_{i,t} \geq INVDEF_{i,t} \tag{12}$$

Con la nueva definición de las ecuaciones de balance de inventario y de inventario definitivo, el modelo matemático equivalente al modelo difuso para MRP con incertidumbre en la disponibilidad de inventario, Modelo INVENFUZZY, se expresa como:

$$Min\ Z = \sum_{t=1}^{T} \left[ \sum_{i=1}^{P} \left( H(i) \times INVDEF_{i,t} + C(i) \times \delta_{i,t} \right) + \sum_{k=1}^{K} CO(k,t) \times O_{k,t} \right]$$

Sujeto a:

$$\left(E_i + a_i(1-\lambda)\right) \times \left(I_{i,t-1} - I_{i,t}\right) + x_{i,t-LT(i)} - \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} \leq D(i,t)$$

$$\left(E_i - a_i(1-\lambda)\right) \times \left(I_{i,t-1} - I_{i,t}\right) + x_{i,t-LT(i)} - \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} \geq D(i,t)$$

$$\left(E_i + a_i(1-\lambda)\right) \times I_{i,t} \leq INVDEF_{i,t}$$

$$\left(E_i - a_i(1-\lambda)\right) \times I_{i,t} \geq INVDEF_{i,t}$$

$$\sum_{i=1}^{P} \left( U(i,k) x_{i,t} + S(i,k)\delta_{i,t} \right) \leq 1 + O_{k,t}$$

$$O_{kt} \leq F_{kt}$$

$$\delta_{i,t}\, LS(i) \leq x_{i,t}$$

$$\delta_{i,t} \in \{0,1\}\; x_{i,t} \geq 0,\, I_{i,t} \geq 0\; O_{k,t} \geq 0\; \forall_{i,k,t}$$

**Modelo LEADFUZZY.** Este modelo plantea el problema de programación matemática para MRP y considera la incertidumbre en los tiempos de entrega de los productos $LT(i)$. Se tomará a $\widetilde{LT}(i)$ como un parámetro difuso, y se considera a *DES(i)* como el desfase máximo para el tiempo de suministro mínimo para producir/comprar un lote del producto *i*. Dado este concepto, cabe decir que el tiempo de suministro de un producto *i* puede encontrarse dentro del intervalo $\left[LT(i), LT(i) + DES(i)\right]\ \ i = 1,\ldots,P$. De esta forma se permite tener mayor flexibilidad a la hora de programar la recepción de materiales, debido a que los proveedores no siempre entregan sus productos en un mismo horizonte de tiempo debido a cuestiones logísticas, de programación, averías, entre otras razones que hacen que el tiempo de entrega se amplíe un poco más de lo estipulado. Finalmente se puede expresar de forma difusa el problema de programación lineal por medio del modelo LEADFUZZY, como:

$$Min\ Z = \sum_{t=1}^{T} \left[ \sum_{i=1}^{P} \left( H(i) \times E_i \times I_{i,t} + C(i) \times \delta_{i,t} \right) + \sum_{k=1}^{K} CO(k,t) \times O_{k,t} \right]$$

Sujeto a:

$$E_i \times I_{i,t-1} + x_{i,t-(LT(i)+(1-\lambda)*DES(i))} = D(i,t) + \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} + E_i \times I_{i,t}$$

$$\sum_{i=1}^{P} \left( U(i,k) x_{i,t} + S(i,k) \delta_{i,t} \right) \le 1 + O_{k,t}$$

$$O_{kt} \le F_{kt}$$

$$\delta_{i,t} \, LS(i) \le x_{i,t}$$

$$O \le \lambda \le 1 \; \delta_{i,t} \in \{0,1\} \; x_{i,t} \ge 0, I_{i,t} \ge 0 \; O_{k,t} \ge 0 \; \forall_{i,k,t}$$

**Modelo MRPFUZZY.** En este modelo se plantea el problema de programación matemática para MRP. Tiene en cuenta incertidumbres en la capacidad de fabricación $U(i, k)$, en la disponibilidad de inventarios expresada como la exactitud de inventarios $E(i)$ y en los tiempos de entrega de los productos $LT(i)$. Teniendo en cuenta las consideraciones tomadas en los modelos CAPFUZZY, INVENFUZZY y LEADFUZZY, puede plantearse el siguiente modelo matemático llamado MRPFUZZY como:

$$Min\ Z = \sum_{t=1}^{T} \left[ \sum_{i=1}^{P} \left( H(i) \times INVDEF_{i,t} + C(i) \times \delta_{i,t} \right) + \sum_{k=1}^{K} CO(k,t) \times O_{k,t} \right]$$

Sujeto a:

$$(E_i + a_i(1-\lambda)) \times (I_{i,t-1} - I_{i,t}) + x_{i,t-(LT(i)+(1-\lambda)*DES(i))} - \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} \le D(i,t)$$

$$(E_i - a_i(1-\lambda)) \times (I_{i,t-1} - I_{i,t}) + x_{i,t-(LT(i)+(1-\lambda)*DES(i))} - \sum_{j=1}^{P} R(i,j) \times x_{j,t} \ge D(i,t)$$

$$(E_i + a_i(1-\lambda)) \times I_{i,t} \le INVDEF_{i,t}$$

$$(E_i - a_i(1-\lambda)) \times I_{i,t} \ge INVDEF_{i,t}$$

$$\sum_{i=1}^{P} \left[ \left( U(i,k) + d_{i,k} - \lambda d_{i,k} \right) + x_{i,t} + S(i,k) \delta_{i,t} \right] \le 1 + O_{k,t}$$

$$O_{kt} \le F_{kt}$$

$$\delta_{i,t} \, LS(i) \le x_{i,t}$$

$$\delta_{i,t} \in \{0,1\} \; x_{i,t} \ge 0, I_{i,t} \ge 0 \; O_{k,t} \ge 0 \; \forall_{i,k,t}$$

## 5. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Para determinar la validez de los modelos propuestos de MRP en la sección 4, se emplearán los datos del plan de producción de una empresa dedicada a la fabricación de transformadores eléctricos ubicada en el valle de Aburrá, departamento de Antioquia, Colombia. La información de entrada para los modelos consta de la estructura básica del producto, demandas del producto final por periodo, costos de mantenimiento de inventario, costos de preparación de pedidos, costos de capacidad extra, utilización de centros de trabajo, entre otros. El producto seleccionado tiene 73 componentes, incluyendo al producto terminado. Cada componente se ha nombrado como SKU#, donde # representa el número del componente el cual varía de 1 a 73, siendo SKU1 el producto terminado. El producto seleccionado debe pasar en total por 6 centros de trabajo, y el horizonte de planeación que se usa es de 30 días. El tamaño de la cubeta de tiempo será de un día, debido a que se acomoda a las necesidades de producción y a los tiempos que se manejan en la empresa de producción de bienes conexos del sector eléctrico.

### 5.1 Método para el análisis y evaluación de los modelos

Para analizar y evaluar los modelos propuestos se usaron costos totales, nivel de inventario, nivel de servicio y eficiencia computacional, expuestos y analizados en los estudios de sistemas MRP difusos de Mula (2004), Arango, Serna y Álvarez (2009) y Serna (2009).

Los costos totales se miden con el valor de la función objetivo que arroja cada modelo, el nivel de inventario se determina como la suma de inventario mantenido en el horizonte de planeación para el producto terminado; el nivel de servicio se mide para el producto final y puede tomar valores entre 0 y 1, medido como: *NS = 1 – (Faltantes por Demanda / Demanda)*, y la complejidad computacional mide el tiempo que tarda en iniciar la ejecución del modelo, el número de iteraciones necesarias y el tiempo total requerido para encontrar la solución final al modelo. Para validar los datos de entrada en los modelos propuestos (DETERMOPTIMO, CAPFUZZY, INVENFUZZY, LEADFUZZY y MRPFUZZY) se empleó un programa de cómputo experto en programación matemática GAMS, donde se aplica el solver CPLEX.

Los modelos CAPFUZZY, INVENFUZZY, LEADFUZZY y MRPFUZZY toman valores diferentes en las medidas de desempeño según el grado de satisfacción $\lambda$ que desee tener el tomador de decisiones, se hace una comparación de los resultados obtenidos en cada modelo empleando un grado de satisfacción de 0,3 (bajo) y 0,7 (alto). De esta forma se compararán en total estos 9 modelos: DETERMOPTIMO, CAPFUZZY3, CAPFUZZY7, INVENFUZZY3, INVENFUZZY7, LEADFUZZY3, LEADFUZZY7, MRPFUZZY3 y MRPFUZZY7. Para cada modelo en cada medida de desempeño se asigna una calificación, 1 para el modelo que presenta un mejor desempeño, 2 para el segundo modelo que presente mejor desempeño y así sucesivamente.

## 5.2 Análisis de resultados de los modelos

Los resultados obtenidos para cada modelo en costos totales, nivel de inventario, nivel de servicio y eficiencia computacional se muestran a continuación. La calificación de los modelos basados en costos totales del plan de producción y nivel de inventarios se presentan en la tabla 3 y figura 1. El nivel de servicio y eficiencia computacional se presentan en la tabla 4 y figura 2 respectivamente.

**Tabla 3.** Resultados de costo total y nivel de inventario para modelos propuestos

| Medidas de desempeño | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Puesto** | **Modelo** | **Costo total, COP** | **Modelo** | **Suma de inventario** |
| 1 | MRPFUZZY3 | 70.341.062 | MRPFUZZY3 | 3.553 |
| 2 | INVENFUZZY3 | 71.238.632 | MRPFUZZY7 | 3.703 |
| 3 | DETERMOPTIMO | 73.297.679 | INVENFUZZY7 | 4.002 |
| 4 | CAPFUZZY7 | 73.394.205 | INVENFUZZY3 | 4.013 |
| 5 | CAPFUZZY3 | 73.515.748 | DTE3 | 6.007 |
| 6 | DTE7 | 75.412.326 | DTE7 | 6.492 |
| 7 | DTE3 | 77.030.463 | CAPFUZZY3 | 7.047 |
| 8 | MRPFUZZY7 | 77.383.063 | CAPFUZZY7 | 7.071 |
| 9 | INVENFUZZY7 | 77.899.651 | DETERMOPTIMO | 7.089 |

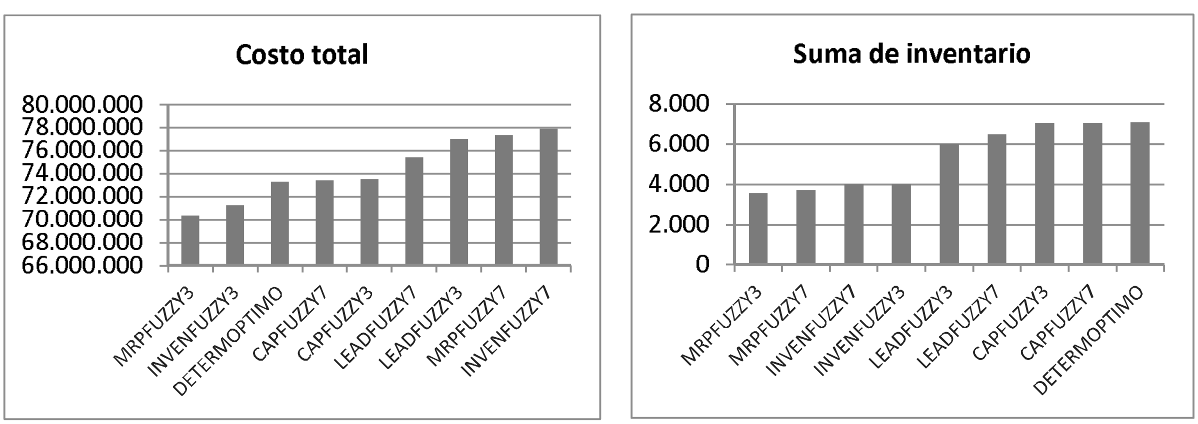


**Figura 1.** Resultados de costo total y nivel de inventario para modelos propuestos

**Tabla 4.** Resultados de nivel de servicio y eficiencia computacional para modelos propuestos

| Medidas de desempeño | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Puesto | Modelo | Nivel de servicio | Modelo | Eficiencia computacional |
| 1 | MRPFUZZY7 | 1 | INVENFUZZY3 | 5 |
| 1 | DETERMOPTIMO | 1 | MRPFUZZY3 | 10 |
| 1 | CAPFUZZY7 | 1 | DTE3 | 17 |
| 1 | CAPFUZZY3 | 1 | DTE7 | 19 |
| 1 | DTE7 | 1 | CAPFUZZY7 | 20 |
| 1 | DTE3 | 1 | MRPFUZZY7 | 23 |
| 1 | INVENFUZZY7 | 1 | CAPFUZZY3 | 23 |
| 2 | MRPFUZZY3 | 0,98 | INVENFUZZY7 | 23 |
| 3 | DDI3 | 0,98 | DETERMOPTIMO | 25 |

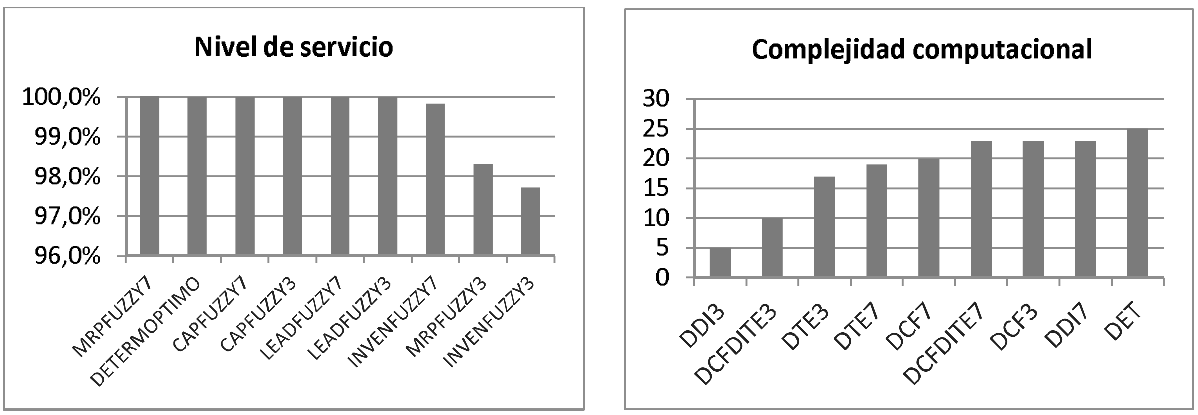


**Figura 2.** Nivel de servicio y eficiencia computacional para modelos propuestos

Puede observarse que el modelo que involucra incertidumbre en capacidad de fabricación, disponibilidad de inventario y tiempos de entrega con un grado de satisfacción bajo (MRPFUZZY3) para el tomador de decisiones es aquel que presenta menores niveles de inventario promedio y de inventario total a lo largo del horizonte de planeación de costos totales para el plan de producción. Comparado con el modelo determinista, presenta un ahorro en costos totales igual a COP 2.956.617 y alrededor de un 52 % de reducción de inventario promedio respecto al modelo determinista. Los modelos con menores costos totales (MRPFUZZY3 e INVENFUZZY3) son los únicos que presentan un nivel de servicio menor de 1 o 100 %, sin embargo, obtiene un nivel de servicio de 0, 98 o 98 %, lo cual es una cifra igualmente satisfactoria. La calificación de los modelos basados en complejidad computacional se efectuó dando una puntuación a cada modelo de 1 a 9, siendo 1 la mejor. Dicha calificación se hizo para el tiempo de ejecución, número de iteraciones, tiempo de terminación y uso de recursos, y luego estos valores se sumaron para cada modelo, con lo cual se obtuvo una calificación donde se considera como mejor modelo el de menor puntaje, es decir, el modelo INVENFUZZY3, seguido del modelo MRPFUZZY3.De esta forma se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 5.

Se puede notar que el modelo que involucra incertidumbre en capacidad de fabricación, disponibilidad de inventario y tiempos de entrega con un grado de satisfacción bajo (MRPFUZZY3) para el tomador de decisiones es el que presenta la mejor calificación conjunta para los indicadores de modelos MRP. Esto significa que al aceptar incertidumbre de forma simultánea en los tres parámetros elegidos del modelo se pueden obtener mejores resultados globales que al hacerlo de forma individual.

De forma contraria, el modelo determinista DETERMOPTIMO fue el que presentó la peor calificación conjunta, de lo cual se puede deducir que involucrar la incertidumbre en disponibilidad de inventarios o en capacidad de fabricación o en tiempos de entrega con un nivel de satisfacción del tomador de decisiones, ya sea alto o bajo, trae mejores resultados conjuntos para costos totales, nivel de inventario, nivel de servicio y complejidad computacional que en el caso determinista.

**Tabla 5.** Análisis de resultados globales para modelos propuestos

| Puesto | Modelo | Calificación | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Costo total | Nivel de inventario | Nivel de servicio | Complejidad computacional | Total |
| 1 | MRPFUZZY3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 6 |
| 2 | INVENFUZZY3 | 2 | 4 | 3 | 1 | 10 |
| 3 | LEADFUZZY3 | 7 | 5 | 1 | 3 | 16 |
| 4 | LEADFUZZY7 | 6 | 6 | 1 | 4 | 17 |
| 4 | MRPFUZZY7 | 8 | 2 | 1 | 6 | 17 |
| 5 | CAPFUZZY7 | 4 | 8 | 1 | 5 | 18 |
| 6 | CAPFUZZY3 | 5 | 7 | 1 | 6 | 19 |
| 6 | INVENFUZZY7 | 9 | 3 | 1 | 6 | 19 |
| 7 | DETERMOPTIMO | 3 | 9 | 1 | 7 | 20 |

## 6. CONCLUSIONES

El uso de la teoría de conjuntos difusos en modelos de programación matemática permite obtener mejores resultados conjuntos en medidas de desempeño para los sistemas MRP difusos diseñados, respecto al sistema MRP determinista planteado; en especial el sistema MRPFUZZY, con bajo grado de satisfacción (0,3), que involucra incertidumbre en la necesidad de capacidad de fabricación, disponibilidad de inventarios y tiempos de entrega.

Para el caso de la empresa del sector eléctrico colombiano, el parámetro difuso de disponibilidad de inventarios es el que más influye en los costos totales del plan de producción, debido a que es el parámetro que crea planes de producción con diferencias mayores en costos totales con relación al determinista; lo anterior hace que los resultados de los modelos MRPFUZZY3 y MRPFUZZY7 sean muy similares en valores y comportamientos a los resultados del modelo INVENFUZZY3 e INVENFUZZY7.

Evaluar los modelos difusos planteados, compararlos entre sí y compararlos con un modelo determinista ha permitido encontrar parámetros diferentes a la demanda externa de productos que deben tener igual importancia a la hora de ser trabajados bajo incertidumbre para sistemas MRP. Ello porque su tratamiento de incertidumbre con lógica difusa permite obtener mejores resultados en las medidas de desempeño seleccionadas (costos totales, nivel de inventario, nivel de servicio, complejidad computacional) comparándolas con los resultados que arrojan modelos con parámetros completamente deterministas.

Los modelos que incorporan incertidumbre, con niveles de alta (0.7) o baja (0.3) satisfacción, arrojan mejores resultados que el modelo determinista, lo cual permite inferir que es valioso involucrar incertidumbre por medio de lógica difusa en parámetros como la capacidad de fabricación, la disponibilidad de inventario y los tiempos de entrega en modelos de sistemas MRP.

## REFERENCIAS


Aliev, R. A.; Fazlollahi, B.; Guirimov, B. and Aliev, R. R. (2007). "Fuzzy-genetic approach to aggregate production-distribution planning in supply chain management". *Information Sciences*, vol. 177 (October), pp. 4241-4255.

Almeder, C. (2010). "A hybrid optimization approach for multi-level capacitated lot-sizing problems". *European Journal of Operational Research*, vol. 200, No. 2 (January), pp. 599-606.

APICS Dictionary, 12th edition, 2008.

Arango, M. D.; Serna, C. A. y Álvarez, K. C. *Modelos difusos aplicados a la planeación de la producción*. Vol 1. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 2009. 145 p.

Arango, M. D.; Serna, C. A. y Pérez, G. (2008). "Aplicación de lógica difusa a las cadenas de suministro". *Avances en Sistemas e Informática*, vol. 5, No. 3 (diciembre), pp. 117-128.

Arango, M. D.; Serna, C. A. and Pérez, G. (2010). "Fuzzy mathematical programming applied to the material requirements planning (MRP)". *Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería-Universidad de Zulia,* vol. 33 No. 1 (abril), pp. 77-86.

Arango, M. D.; Vergara, C. y Gaviria, H. (2010). "Modelización difusa para la planificación agregada de la producción en ambientes de incertidumbre". *Dyna*, año 77, No. 162 (junio), pp. 397-409.

Barba, Y. and Adenso, B. (2009). "Reverse MRP under uncertain and imprecise demand". *International Journal of Advanced Manufacture Technology*, vol. 40, No. 3-4 (April), pp. 413-424.

Baykasoglu, A. and Gocken, T. (2010). "Multi-objective aggregate production planning with fuzzy parameters". *Advances in Engineering Software*, vol. 41, No. 9 (September), pp. 1124-1131.

Bayrak, M. Y.; Celebi, N. and Taskin, H. (2007). "A fuzzy approach method for supplier selection". *Production Planning & Control,* vol. 18, No. 1 (January), pp. 54-63.

Bjork, K. and Carlsson, C. (2007). "The effect of flexible lead times on a paper producer". *International Journal of Production Economics,* vol. 107, No. 1 (May), pp. 139-150.

Chang, P. and Liao, T. (2006). "Combining SOM and fuzzy rule base for flow time prediction in semiconductor manufacturing factory". *Applied Soft Computing*, vol. 6, No. 2 (January), pp. 198-206.

Chang, S.-L.; Wang, R.-C. and Wang, S.-Y. (2006). "Applying fuzzy linguistic quantifier to select supply chain partners at different phases of product life cycle". *International Journal of Production Economics*, vol. 100, No. 2 (April), pp. 348-359.

Chase, R. B.; Jacobs, F. R. and Aquilano, N. J. *Administración de operaciones: Producción y cadena de suministros*. 12 ed. México D.F.: McGraw-Hill, 2009. 776 p.

Chauhan, S.; Dolgui, A. and Proth, J. (2009). "A continuous model for supply planning of assembly systems with stochastic component procurement times". *International Journal of Production Economics*, vol. 120, No. 2 (August), pp. 411-417.

Chen, K. and Ji, P. (2007). "A mixed integer programming model for advanced planning and scheduling (APS)". *European Journal of Operational Research*, vol. 181, No. 1 (August), pp. 515-522.

Choobineh, F. and Mohebbi, E. (2004). "Material planning for production kits under uncertainty". *Production Planning & Control*, vol. 15, No. 1 (January), pp. 63-70.

Colvin, M. and Maravelias, C. (2010). "Modeling methods and a branch and cut algorithm for pharmaceutical clinical trial planning using stochastic programming". *European Journal of Operational Research*, vol. 203, No. 1 (May), pp. 205-215.

Cristobal, M. P.; Escudero, L. F. and Monge, J. F. (2009). "On stochastic dynamic programming for solving large-scale planning problems under uncertainty". *Computers & Operations Research*, vol. 36, No. 8 (August), pp. 2418-2428.

Daria, G. and Cruz-Machado, V. (2006). *Using fuzzy logic to model MRP systems under uncertainty*. IIE Annual Conference, Orlando, USA (20-24 May).

Delgado, M.; Kacprzyk, J.; Verdegay, J. L. and Vila, M. A. *Fuzzy optimization: Recent advances*. Heidelberg: Physica, 1994.

Delgado, M.; Verdegay, J. L. and Vila, M. (1989). "A general model for fuzzy linear programming". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 29, No. 1 (January), pp. 21-29.

Demirli, K. and Yimer, A. (2008). "Fuzzy scheduling of a build-to-order supply chain". *International Journal* *of Production Research*, vol. 46, No. 14 (July), pp. 3931-3958.

Du, T. C.-T. and Wolfe, P. M. (2000). “Building an active material requirements planning system”. *International Journal of Production Research*, vol. 38, No. 2 (April), pp. 241-252.

Ebrahimnejad, A. (2011). “Sensitivity analysis in fuzzy number linear programming problems”. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 53, No. 10 (May), pp. 1878-1888.

Fang, S. and Li, G. (1999). “Solving fuzzy relation equations with a linear objective function”. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 103, No. 1 (April), pp. 107-113.

Feili, H.; Moghaddam, M. and Zahmatkesh, R. (2010). “Fuzzy material requirements planning”. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 1, No. 4 (December), pp. 333-338.

Fu, Y. and Pan, X. (2008). “Optimization of multi-part inventory control and production lot under fuzzy uncertainty”. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, vol. 42, No. 6 (September), pp. 1046-1050.

Gen, M.; Tsujimura, Y. and Ida, K. (1992). “Method for solving multiobjective aggregate production planning problem with fuzzy parameters”. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 23, No. 1-4 (November), pp. 117-120.

Geneste, L.; Grabot, B. and Reynoso, G. (2005). *Management of demand uncertainty within MRP II using possibility theory*. Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Czech Republic.

Grabot, B.; Geneste, L.; Reynoso, G. and Verot, S. (2005). “Integration of uncertain and imprecise orders in the MRP method”. *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 16, No. 2 (April) pp. 215-234.

Graves, S. *Manufacturing planning and control*. Massachusetts Institute of Technology, 1999.

Grubbstrom, R. and Huynh, T. (2006). “Multi-level, multi-stage capacity-constrained production-inventory systems in discrete time with non-zero lead times using MRP theory”. *International Journal of Production Research*, vol. 101, No. 1 (May), pp. 53-62.

Hasuike, T. and Ishii, H. (2009). “On flexible product-mix decision problems under randomness and fuzziness”. *Omega*, vol. 37, No. 4 (August), pp. 770-787.

Heizer, J. and Render B. Operations management. 9th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2009. 597 p.

Hnaien, F.; Delorme, X. and Dolgui, A. (2010). “Multi-objective optimization for inventory control in two-level assembly systems under uncertainty of lead times”. *Computers & Operations Research*, vol. 37, No. 11 (November), pp. 1835-1843.

Huynh, T. T. T. *Capacity constraints in multi-stage production-inventory systems, applying material requirements planning theory*. Doctoral thesis. Department of Production Economics, Linköping, Sweden, 2006.

Inderfurth, K. (2009). “How to protect against demand and yield risks in MRP systems”. *International Journal of Production Economics*, vol. 121, No. 2 (October), pp. 474-481.

Jacobs, F. and Weston, F. (2007). “Enterprise resource planning (ERP): A brief history”. *Journal of Operations Management*, vol. 25, No. 2 (March), pp. 357-363.

Jamalnia, A. and Soukhakian, M. (2009). “A hybrid fuzzy goal programming approach with different goal priorities to aggregate production planning”. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 56, No. 4 (May), pp. 1474-1486.

Kacprzyk, J. and Orlovsky S. A. *Fuzzy optimization and mathematical programming: A brief introduction and survey*. In: Kacprzyk J. and Orlovsky S.A. (eds.). Optimization models using fuzzy sets and possibility theory. Dodrecht: D. Reidel, 1987, pp. 50-72.

Kahraman, C.; Ertay, T. and Büyüközkan, G. (2006). “A fuzzy optimization model for QFD planning process using analytic network approach”. *European Journal of Operational Research*, vol. 171, No. 2 (June), pp. 390-411.

Kaipia, R.; Korhonen, H. and Hartiala, H. (2006). “Planning nervousness in a demand supply network: An empirical study”. *The International Journal of Logistics Management*, vol. 17, No. 1, pp. 95-113.

Koh, S. C.; Jones, M. H.; Saad, S. M.; Arunachalam, S. and Gunasekaran, A. (2000). “Measuring uncertainties in MRP environments”. *Logistics Information Management*, vol. 13, No. 3, pp. 177-183.

Kumar, M.; Vrat, P. and Shankar, R. (2006). “A fuzzy programming approach for vendor selection problem in a supply chain”. *International Journal of Production Economics*, vol. 101, No. 2 (June), pp. 273-285.

Lan, Y.; Liu, Y. and Sun, G. (2009). “Modeling fuzzy multi-period production planning and sourcing problem with credibility service levels”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 231, No. 1 (September), pp. 208-221.

Lee, Y. Y.; Kramer, B. A. and Hwang, C. L. (1991). "A comparative study of three lot-sizing methods for the case of fuzzy demand". *Journal of Operations & Production Management*, vol. 11, No. 7 (June), pp. 72-80.

Li, T.; Lin, P.; Sun, G.-J. and Liu, H.-H. *Application of fuzzy programming with recourse in material requirement planning problem*. International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. (2009).

Lodwick, W. A. (1990). "Analysis of structure in fuzzy linear programming". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 38, No. 1 (October), pp. 15-26.

López, H. y Restrepo, M. (2008). "Programación lineal flexible con restricciones difusas". *Revista Ingeniería e Investigación*, vol. 28, No. 1 (enero), pp. 162-168.

Louly, M.-A.; Dolgui, A. and Hnaien, F. (2008). "Supply planning for single-level assembly system with stochastic component delivery times and service-level constraint". *International Journal of Production Economics*, vol. 115, No. 1 (September), pp. 236-247.

Maiti, M. K. and Maiti, M. (2007). "Two-storage inventory model with lot-size dependent fuzzy lead-time under possibility constraints via genetic algorithm". *European Journal of Operational Research*, vol. 179, No. 2 (June), pp. 352-371.

Mohebbi, E. and Choobineh, F. (2005). "The impact of component commonality in an assemble-to-order environment under supply and demand uncertainty". *Omega, The International Journal of Management Science*, vol. 33, No. 6 (December), pp. 472-482.

Mula, J. *Modelos para la planificación de la producción bajo incertidumbre. Aplicación en una empresa del sector del automóvil*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, 2004.

Mula, J.; Peidro, D. and Poler, R. (2010). "The effectiveness of a fuzzy mathematical programming approach for supply chain production planning with fuzzy demand". *International Journal of Production Economics*, vol. 128, No. 1 (November), pp. 136-143.

Mula, J.; Poler, R. and García, J. (2004). *Aplicaciones de la teoría de los conjuntos difusos en la planificación de la producción: Un estudio de la literatura*. Memorias VIII Congreso de Ingeniería de Organización. Leganés (septiembre), pp. 101-110.

Mula, J.; Poler, R. and García, J. (2006). "MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, No. 1 (January), pp. 74-97.

Mula, J.; Poler, R. and García, J. (2007). "Material requirement planning with fuzzy constraints and fuzzy coefficients". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, No. 7 (April), pp. 783-793.

Mula, J.; Poler, R. and García, J. (2008). "Capacity and material requirement planning modelling by comparing deterministic and fuzzy models". *International Journal of Production Research*, vol. 46, No. 20 (October), pp. 5589-5606.

Mula, J.; Poler, J.; García, J. and Lario, F. (2006). "Models for production planning under uncertainty: A review". *International Journal of Production Economics*, vol. 103, No. 1 (September), pp. 271-285.

Nagoorgani, A. and Maragatham, M. (2009). "(Q,r) inventory model with fuzzy lead time". *International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics*, vol. 2, No. 3 (August), pp. 85-92.

Nahmias, S. Análisis de la producción y las operaciones. 5ª ed. México D.F.: McGraw-Hill, 2007.

Nakamura, H. (1984). "Some extensions of fuzzy linear programming". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 14, No. 3 (December), pp. 211-229.

Niu, J. and Dartnall, J. (2008). *Application of fuzzy-MRP-II in fast moving consumer goods manufacturing industry*. Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference. Miami, FL (7-10 December), pp. 1939-1945.

Noori, S.; Feylizadeh, M. R.; Bagherpour, M.; Zorriassatine, F. and Parkin, R. M. (2008). Optimization of material requirement planning by fuzzy multi-objective linear programming. Proceedings of the IMechE, vol. 222 Part B: Journal of Engineering Manufacture, vol. 222, No. 7, pp. 887-900.

Orlicky, J. Material requirements planning: The new way of life in production and inventory management. New York, NY: McGraw-Hill, 1975. 292 p.

Ouyang, L.-Y. and Chang, H.-C. (2001). "The variable lead time stochastic inventory model with a fuzzy backorder rate". *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 44, No.1 (March), pp. 19-33.

Pai, P.-F. (2003). "Capacitated lot size problems with fuzzy capacity". *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 38, No. 5-6 (September), pp. 661-669.

Pai, P-F.; Chang, P.-T.; Wang, S.-S. and Lin, K.-P. (2004). "A fuzzy logic-based approach in capacity-planning problems". *The International Journal of Advanced Manufacture Technology*, vol. 23, No. 11-12 (June), pp. 806-811.

Paksoy, T.; Pehlivan, N. and Ozceylan, E. (2010). "Application of fuzzy mathematical programming approach to the aggregate production/distribution planning in a supply chain network problem". *Scientific Research and Essays*, vol. 5, No. 22 (December), pp. 3384-3397.

Pedrycz, W. and Camargo H. (2003). "Fuzzy timed Petri nets". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 140, No. 2 (December), pp. 301-330.

Peidro, D.; Mula, J.; Jiménez, M. and Botella, M. (2010). "A fuzzy linear programming based approach for tactical supply chain planning in an uncertainty environment". *European Journal of Operational Research*, vol. 205, No. 1 (August), pp. 65-80.

Petrovic, D.; Xie, Y.; Burnham, K. and Petrovic, R. (2008). "Coordinated control of distribution supply chains in the presence of fuzzy customer demand". *European Journal of Operational Research*, vol. 185, No. 1 (February), pp. 146-158.

Pochet, Y. *Mathematical programming models and formulations for deterministic production planning problems*. In: Computational combinatorial optimization. Berlin/Heidelberg: Springer, 2001, pp. 57-111.

Reynoso, G.; Grabot, B.; Geneste, L. and Vérot, S. (2002). *Integration of uncertain and imprecise orders in MRPII*. Proceedings of the 9th International Multi-Conference on Advanced Computer Systems. Miedzyzdroje, Poland (23-25 October).

Rommelfanger, H. (1996). "Fuzzy linear programming and applications". *European Journal Operations Research*, vol. 92, No. 3 (August), pp. 512-527.

Rommelfanger, H. and Slowinski, R. Fuzzy linear programming with single or multiple objective functions. In: Slowinski, R. (ed.). Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics. The Kluwer Handbook Series on Fuzzy Sets, vol. 1, II, 1999, pp. 179-213.

Samanta, B. and Al-Araimi, S. (2001). "An inventory control model using fuzzy logic". *International Journal of Production Economics*, vol. 73, No. 3 (October), pp. 217-226.

Selcuk, B.; Fransoo, J. and De Kok, A. (2006). "The effect of updating lead times on the performance of hierarchical planning systems". *International Journal of Production Economics*, vol. 104, No. 2 (December), pp. 427-440.

Serna, C. A. *Desarrollo de modelos de programación matemática fuzzy para la planificación de la producción en contextos de incertidumbre. Un caso aplicado a la industria automotriz*. Tesis de grado. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 2009.

Shapiro, J. *Mathematical programming models and methods for production planning and scheduling*. Operations Research Center, MIT, 1989. 112 p.

Sodhi, M. and Tang, C. (2009). "Modeling supply chain planning under demand uncertainty using stochastic programming: A survey motivated by asset-liability management". *International Journal of Production Economics*, vol. 121, No. 2 (October), pp. 728-738.

Sudiarso, A. and Putranto, R. (2010). *Lead time estimation of a production system using fuzzy logic approach for various batch sizes*. Proceedings of the World Congress on Engineering, vol. III, London , UK (30 June - 2 July).

Tang, O. and Grubbstrom, R. (2002). "Planning and replanning the master production schedule under demand uncertainty". *International Journal of Production Economics*, vol. 78, No. 3 (August), pp. 323-334.

Tang, J.; Wang, D. and Fung, R. (2000). "Fuzzy formulation for multi-product aggregate production planning". *Production Planning & Control*, vol. 11, No. 7 (October), pp. 670-676.

Tavakoli-Moghaddam, R.; Bagherpour, M.; Noora, A. and Sassani, F. (2007). *Application of fuzzy lead time to a material requirement planning system*. Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Fuzzy Systems. Vancouver (18-19 June), vol. 8, pp. 208-213.

Torabi, S. A.; Ebadian, M. and Tanha, R. (2010). "Fuzzy hierarchical production planning (with a case study)". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 161, No. 11 (June), pp. 1511-1529.

Torabi, S. A. and Hassini, E. (2009). "An interactive possibilistic programming approach for multiple objective supply chain master planning". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 159, No. 2 (January), pp. 193-214.

Wang, G.-Y. and Qiao, Z. (1993). "Linear programming with fuzzy random variable coefficients". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 57, No. 3 (August), pp. 295-311.

Wazed, M.; Ahmed, S. and Nukman, Y. (2010). "Component and process commonalities in production system under various uncertain factors". *Africa Journal of Business Management*, vol. 4, No. 17 (December), pp. 3697-3707.

Wong, C. and Kleiner, B. (2001). "Fundamentals of material requirements planning". *Management Research News*, vol. 24, No. 3-4 (April), pp. 9-12.

Xie, J.; Zha, X. and Lee, T. (2003). "Freezing the master production schedule under single resource constraint and demand uncertainty". *International Journal of Production Economics*, vol. 83, No. 1 (January), pp. 65-84.

Zimmermann, H.-J. *Fuzzy sets and operations research for decision support*. Beijing Normal University, 2000.