

EL TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN CANALES

FRANCISCO JAIME MEJÍA*

RESUMEN

Este artículo tiene por objeto aplicar el transporte de cantidad de movimiento al flujo en canales como una metodología independiente de otros principios físicos. Así se subsana una carencia de la literatura técnica cuando aborda la interpretación adicional de fenómenos hidráulicos que habitualmente se tratan desde la conservación de la energía. Concluye acerca del comportamiento de la profundidad de flujo en un canal ante diversas condiciones de flujo o variaciones de la profundidad o en presencia de controles hidráulicos.

Con la ayuda de la ecuación de transporte de cantidad de movimiento a lo largo de un canal se interpreta el comportamiento del tirante hidráulico en flujo uniforme, en flujo no uniforme con variación gradual y en algunos fenómenos locales de flujo rápidamente variado como ocurre en las transiciones y en el resalto hidráulico. Se obtienen las ecuaciones del resalto hidráulico para calcular la profundidad inicial y seciente, conocida una de las dos, en diversas secciones transversales del canal.

PALABRAS CLAVE: cantidad de movimiento, momentum, estado de flujo, fenómenos locales, fuerza específica, número de Froude, resalto hidráulico, transición hidráulica.

ABSTRACT

The objective of this article is to apply the momentum principle in open channels flow as an independent methodology from other physical principles. It remedies a fault of the technical literature by the additional interpretation of hydraulics phenomena that normally are studied with the energy conservation principle. It concludes about the flow depth faced with several flow conditions or flow variations or hydraulics controls.

This paper shows the momentum equation applied to the interpretation of the flow depth in several open-channel flow situations: uniform, gradually varied, and some local phenomena as transitions and hydraulic jump. Hydraulic jump equations are obtained for several cross sections in terms of the initial and sequent depth of flow.

KEY WORDS: momentum, local phenomena, specific force, Froude number, hydraulic jump, hydraulic transition.

* Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Profesor de Hidráulica, Escuela de Ingeniería de Antioquia. Grupo de Investigación Gabis –Gestión del Ambiente para el Bienestar Social–, EIA. pffmejia@eia.edu.co

Levantamiento de textos: Lina María Álvarez Santamaría. Alumna IC, EIA. Grupo de Investigación Gabis. Ilustraciones: Pedro Nel Orozco Tobón. Centro de Servicios y Apoyo Informático, EIA

Artículo recibido 12-XI-2003. Aprobado con revisión 13-VII-2004.
Discusión abierta hasta enero 2005.

Introducción

Aquí se muestra la gran variedad de situaciones de flujo en canales que se explican y pueden predecir con la utilización de la ecuación de transporte de cantidad de movimiento lineal o momentum, de manera independiente de los resultados que en estos casos se obtienen con consideraciones de energía específica, excepto el caso del resalto hidráulico, donde esta última ecuación se utiliza para determinar las pérdidas de energía y en esa situación se complementan entre sí de manera muy conveniente los principios de energía y cantidad de movimiento.

Para el estudio de los problemas descritos aquí se recurre a la combinación de la ecuación de transporte de Reynolds con la ecuación de continuidad.

Aplicar las leyes de la termodinámica al flujo libre conduce a la ecuación de la energía; mientras que aplicar el conjunto de las leyes de movimiento a este flujo conduce a la ecuación que describe el delicado equilibrio del flujo uniforme en canales. De igual manera, puede decirse que aplicar el teorema del transporte de Reynolds al caso del flujo libre conduce a las expresiones de transporte de la masa, de la cantidad de movimiento lineal y de la cantidad de movimiento angular. A su vez, el conjunto de esas expresiones es la base para explicar y predecir el reposo y el movimiento de los fluidos en general y de los líquidos en particular.

Algunos fenómenos hidráulicos se explican o predicen con la aplicación de la ecuación de la energía, otros con la aplicación del principio del transporte de la cantidad de movimiento. En muchas situaciones ambos enfoques se complementan.

La ecuación de transporte de cantidad de movimiento

La ecuación que permite estudiar el transporte de la cantidad de movimiento en un volumen de control (figuras 1 y 2) puede escribirse como¹:

$$M_i - M_f = \frac{F_e}{\gamma} - V \text{sen} \theta \quad (1)$$

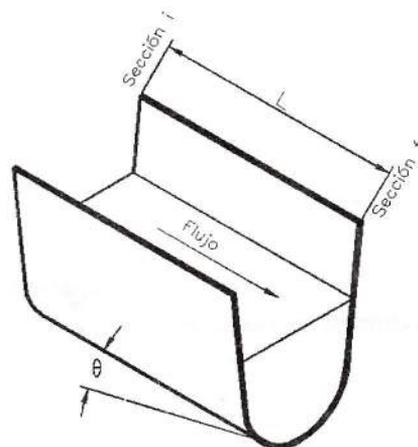


Figura 1. Volumen de control para el análisis de la cantidad de movimiento.

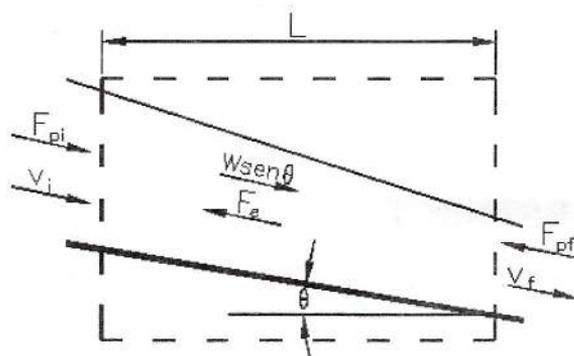


Figura 2. Sección longitudinal para el análisis de la cantidad de movimiento.

Los sumandos de la izquierda en (1) se calculan en cada sección de flujo con la función²:

$$M = \frac{F_p}{\gamma} + \beta \frac{Q^2}{gA} \quad (2)$$

1 La nomenclatura utilizada se define en la lista de símbolos al final del artículo.

2 La discusión de esta función y sus consecuencias (Mejía, 2004) aparece en la Revista EIA 1, febrero de 2004.



Esta expresión reúne el empuje específico estático que ejerce el resto del flujo sobre el volumen de control y el empuje específico dinámico en la sección, que es el flujo de cantidad de movimiento a través de la superficie de control que la delimita.

La fuerza total en la sección debida a la presión es:

$$F_p = \int p dA \quad (3)$$

Ahora, si se puede ignorar la curvatura de las líneas de corriente (Naudascher, 2001) y se acepta la distribución uniforme de la velocidad, la fuerza estática sobre la sección se puede obtener con:

$$F_p = \bar{p}A \quad (4)$$

donde la presión en el centro de área es:

$$\bar{p} = \gamma h \cos \theta \quad (5)$$

Además, se tiene que la profundidad del centro de área es una fracción particular de la altura del flujo en la sección, que depende de la forma y tamaño de la sección transversal:

$$\bar{h} = kh \quad (6)$$

de manera que:
$$\frac{F_p}{\gamma} = khA \cos \theta \quad (7)$$

y con (2) se obtiene la función fuerza específica o ímpetu (Newton, 1687) en la sección, descrita con detalle por Mejía (2004):

$$M = khA \cos \theta + \beta \frac{Q^2}{gA} \quad (8)$$

Así mismo debe señalarse que la fuerza específica gravitacional $\forall \text{sen} \theta$ en (1), depende del tamaño del volumen de control y de la inclinación del canal.

Ahora, la fuerza externa F_e , paralela al sentido del flujo en (1), se ejerce sobre éste debido a la combinación de dos acciones de superficie: la fuerza de fricción desarrollada conjuntamente por las paredes del canal sobre la masa líquida (F_f) y, en menor medida, por el aire sobre la superficie libre; más el empuje

normal del lecho (F_n) debido a las variaciones de sección o a los obstáculos interpuestos al flujo:

$$F_e = F_f + F_n \quad (9)$$

La fuerza debida a la fricción puede calcularse por diversos métodos (García, 2000), pero en general (Newton, 1687; Chow, 1959) puede expresarse como:

$$F_f = \tau A_\tau \quad (10)$$

donde $\tau = \gamma R S_f$ y $A_\tau = PL$

El empuje normal al flujo ejercido por el lecho o por obstáculos usualmente es una variable que debe determinarse a partir del principio de cantidad de movimiento.

Transporte de la cantidad de movimiento en flujo uniforme

En un canal de sección constante, la fuerza externa es debida únicamente a la fricción contra el lecho o contra la atmósfera, no existe componente del empuje normal al lecho en la dirección paralela al flujo.

La ecuación (1) dice que, en un canal de sección constante, la fuerza específica es constante; es decir, $M_i = M_f$ cuando las fuerzas viscosa y motriz son iguales entre sí:

$$\frac{F_f}{\gamma} = \forall \text{sen} \theta \quad (11)$$

hecho que conduce a las ecuaciones de flujo uniforme en un canal con las formas propuestas por Chézy o por Darcy-Weisbach, con independencia del estado de flujo que se establezca: normal supercrítico, normal crítico o normal subcrítico, figura 3.

Si un canal de pendiente sostenida es suficientemente largo, todas las partículas fluidas pueden alcanzar su propia velocidad límite, se alcanza la velocidad media límite en la sección, se establece el flujo uniforme y la profundidad del flujo es la misma a lo largo de ese tramo de canal, bien sea en estado

supercrítico o subcrítico (figura 4). El trabajo desarrollado por la fuerza motriz, que propicia el flujo a lo largo del canal, es equilibrado por el trabajo desarrollado por la fuerza viscosa resistente en la misma longitud y en el mismo intervalo de tiempo, de manera que la fuerza específica en la sección inicial del tramo se conserva a lo largo de canal ($M_i = M_f = M_n$). Se está ante una situación de equilibrio en la cual la suma de fuerzas de toda naturaleza a lo largo del canal es nula.

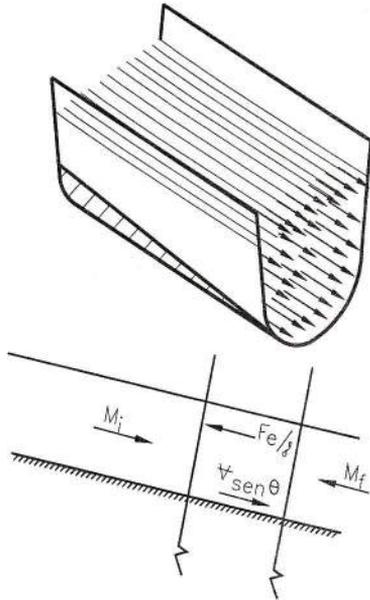


Figura 3. Flujo uniforme en un canal de sección constante: $M_i = M_f = M_n$

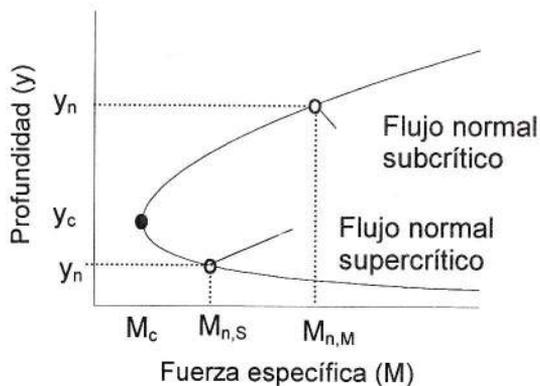


Figura 4. Fuerza específica en flujo normal

Transporte de cantidad de movimiento bajo una compuerta

Si una compuerta regula los niveles de flujo en un canal de pendiente sostenida (figura 5), obliga a la ocurrencia de profundidad subcrítica detrás de ella y supercrítica delante. Un obstáculo en la corriente, como una compuerta, produce un incremento fuerte en F_e/γ , por consiguiente, $F_e/\gamma - v \text{ sen } \theta$ es positivo y $M_i - M_f$ también lo es. La diferencia $M_i - M_f$ es positiva al igual que la diferencia $F_e/\gamma - v \text{ sen } \theta$ (figuras 5 y 6). El valor de esta diferencia es aún mayor en canales con baja pendiente para los que $\text{sen } \theta$ tiende a cero, valor que se alcanza en el caso del canal horizontal (Vischer y Hager, 1998).

Obsérvese que en las secciones que delimitan el volumen de control deben cumplirse las hipótesis establecidas para la obtención de la ecuación de fuerza específica: flujo permanente, incompresible, distribución uniforme de velocidades en la sección, distribución hidrostática de presiones en la sección, fuerzas de cuerpo debidas únicamente a la aceleración gravitacional. Por este motivo, la sección inicial debe corresponder a aquella donde se inicia la subducción de la línea de corriente superior y la sección final, según las mediciones de Ohtsu y Yasuda (1994), debe corresponder a la sección de la vena contracta.

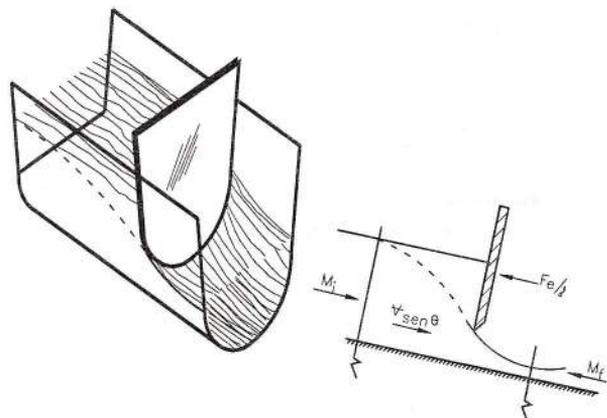


Figura 5. Flujo bajo una compuerta, $M_i > M_f$

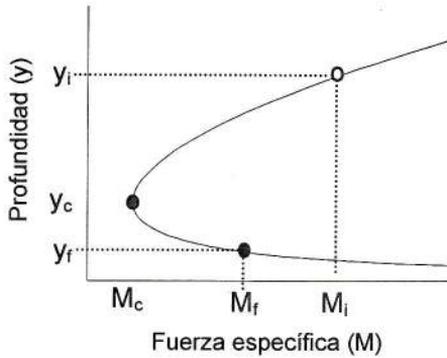


Figura 6. Flujo de fuerza específica bajo una compuerta, $M_i > M_f$

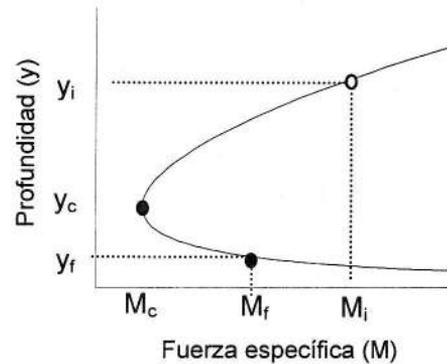


Figura 8. Flujo de fuerza específica sobre un azud, $M_i > M_f$

Transporte de cantidad de movimiento sobre un azud

Si un azud regula el nivel de aguas arriba de un canal de pendiente sostenida (figura 7), se forma flujo subcrítico en el canal y flujo supercrítico a la salida del vertedero. Un obstáculo en la corriente, como un azud, produce un incremento fuerte en F_e/γ , por consiguiente, $F_e/\gamma - \forall \text{sen}\theta$ es positivo (figura 7) y $M_i - M_f$ también lo es (figura 8), y su valor se incrementa a medida que la inclinación del canal disminuye. La sección inicial corresponde a aquella donde la línea de corriente inferior inicia su ascenso desde el fondo del canal, y la sección final coincide con aquella donde las líneas de corriente no tienen curvatura y son paralelas al fondo del canal a la salida del vertedero.

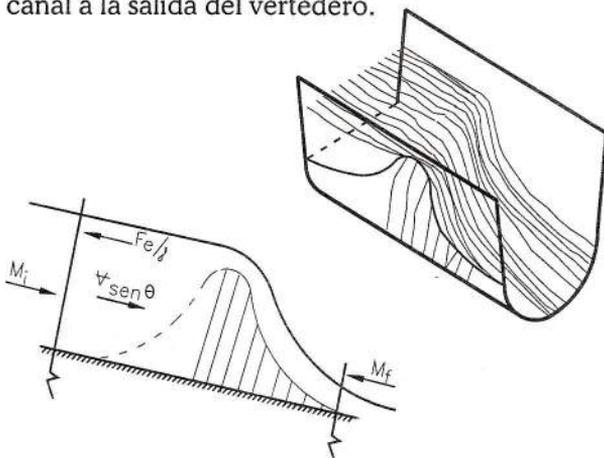


Figura 7. Flujo sobre un azud, $M_i > M_f$

Transporte de cantidad de movimiento sobre una constricción gradual

Si en un canal ocurre una elevación gradual del fondo sobre un umbral o un estrechamiento gradual, o ambas situaciones, el empuje del canal en contra de la corriente se manifiesta como una disminución de la fuerza específica en la sección al pasar de M_i a M_f , lo cual origina una modificación de la altura de flujo, pero se conserva el estado de acceso.

Si el acceso del flujo ocurre en estado subcrítico (figura 9), el empuje del canal en contra de la corriente se manifiesta como una disminución de la fuerza específica en la sección al pasar de M_i a M_f , lo cual origina una disminución de la altura de flujo, al pasar de y_i a y_f , pero conservándose el estado subcrítico (figura 10). Esto ocurre mientras la fuerza específica que actúa en oposición al flujo, $F_e/\gamma - \forall \text{sen}\theta$, no alcance la diferencia $M_i - M_c$, situación en la cual el flujo alcanza la altura crítica, desarrollándose una caída hidráulica.

Si la constricción es tal que la diferencia $F_e/\gamma - \forall \text{sen}\theta$ supera el valor de la diferencia $M_i - M_c$, el flujo antes de la transición se remansa y aumenta su altura, de manera que la nueva fuerza específica inicial origina una nueva diferencia $M_i - M_c$ que equilibra la nueva diferencia $F_e/\gamma - \forall \text{sen}\theta$ y el estado de flujo en la sección final se sitúa en la condición crítica.

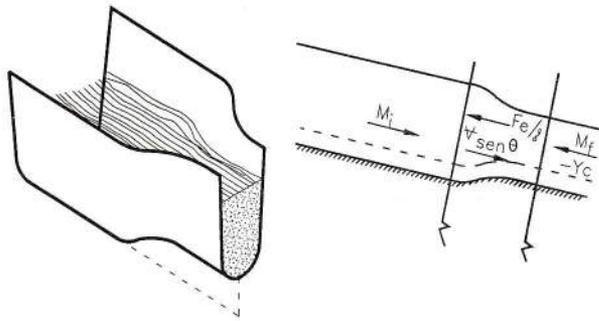


Figura 9. Constricción en un canal, $M_i > M_f$

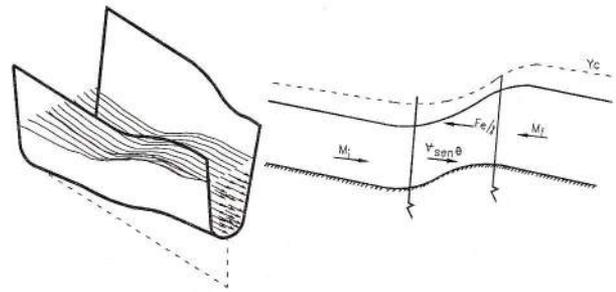


Figura 11. Constricción en un canal con acceso supercrítico, $M_i > M_f$

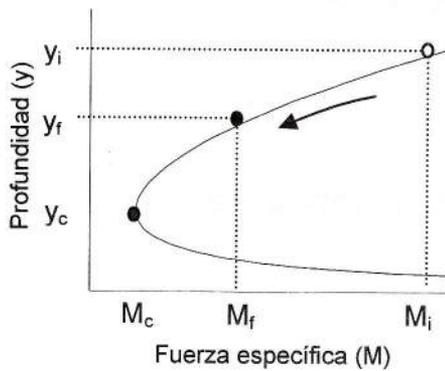


Figura 10. Fuerza específica en una constricción con acceso subcrítico, $M_i > M_f$

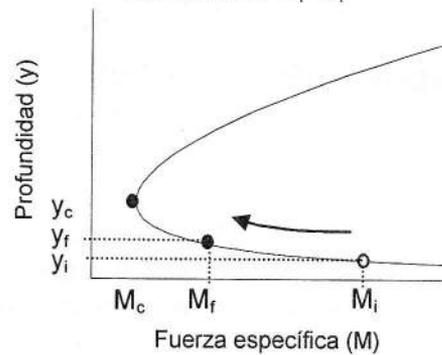


Figura 12. Flujo de fuerza específica en una constricción con acceso supercrítico, $M_i > M_f$

Si el acceso del flujo ocurre en estado supercrítico (figura 11), el empuje del canal en contra de la corriente se manifiesta como una disminución de la fuerza específica en la sección al pasar de M_i a M_f , lo cual origina un aumento de la altura de flujo, al pasar de y_i a y_f , pero conservándose el estado supercrítico, (figura 12). Esto ocurre mientras la fuerza específica que actúa en oposición al flujo $F_e/\gamma - \psi \sin \theta$ no llegue a la diferencia $M_i - M_c$, situación en la cual el flujo alcanza la altura crítica, desarrollándose un resalto hidráulico que remonta el flujo hasta una nueva posición de equilibrio, el flujo cambia de estado y se está ante la situación de constricción con acceso subcrítico.

Las secciones inicial y final del volumen de control corresponden a los puntos de tangencia del umbral con el fondo, o del estrechamiento con las paredes del canal, la que defina un mayor volumen.

Se observa que cuando el flujo ocurre sobre una constricción la fuerza específica tiende hacia la fuerza específica mínima, independientemente del estado de acceso, que se conserva.

Transporte de cantidad de movimiento sobre una expansión gradual

Si en un canal ocurre un descenso gradual del fondo sobre un escalón o una ampliación gradual, o ambas modificaciones, la fuerza externa, al menos en su componente normal de superficie, actúa en el sentido del flujo, lo cual conduce a un aumento de la fuerza específica desde M_i hasta M_f . El fondo y las paredes del canal, aun con una actitud pasiva, contribuyen al aumento de la fuerza específica en la dirección del flujo.



Las secciones inicial y final del volumen de control corresponden a los puntos de tangencia del escalón con el fondo o de la ampliación con las paredes del canal, la que defina un mayor volumen.

Si el acceso es subcrítico (figura 13) se conserva ese estado y aumenta la altura del flujo desde y_i hasta y_f (figura 14).

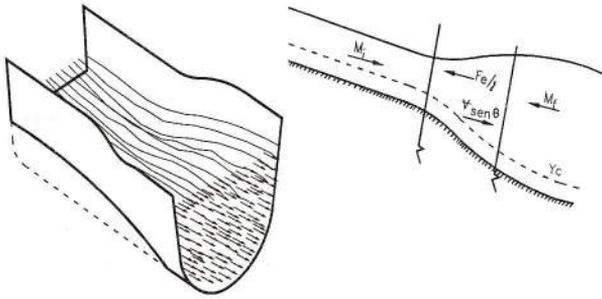


Figura 13. Expansión en un canal con acceso subcrítico, $M_f > M_i$

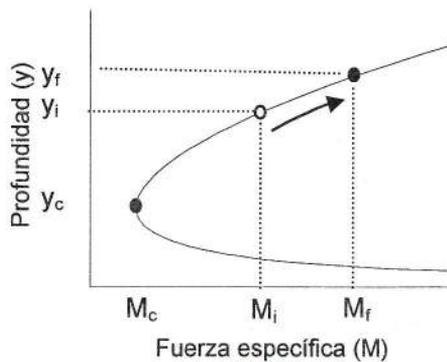


Figura 14. Fuerza específica en una expansión con acceso subcrítico, $M_f > M_i$.

Si el acceso es supercrítico (figura 15) se conserva ese estado y disminuye la altura del flujo desde y_i hasta y_f (figura 16).

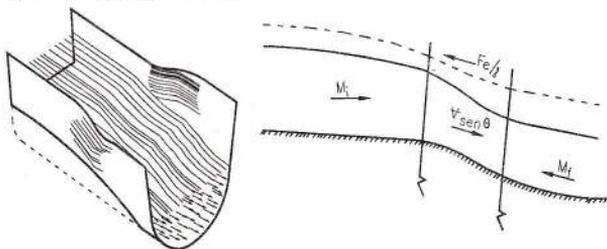


Figura 15. Expansión en un canal con acceso supercrítico, $M_f > M_i$

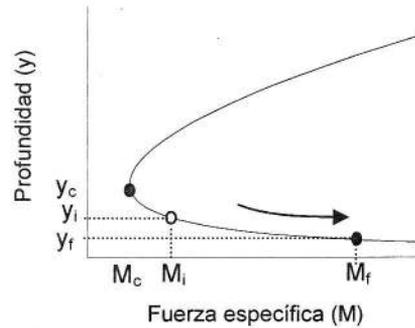


Figura 16. Fuerza específica en una expansión con acceso supercrítico, $M_f > M_i$

Se observa que cuando el flujo ocurre sobre una expansión la fuerza específica aumenta, independientemente del estado de acceso.

Transporte de cantidad de movimiento en flujo gradualmente variado acelerado

Cuando se tiene flujo permanente gradualmente variado con aceleración cinética³, la velocidad media del flujo se incrementa en la dirección del movimiento y la altura del flujo disminuye (figura 17). Este es el caso de los perfiles de flujo gradualmente variado A2, H2, M2 y S2.

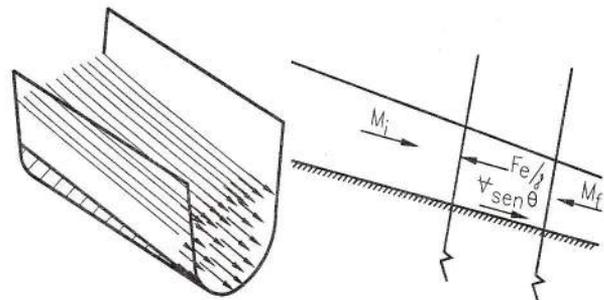


Figura 17. Flujo gradualmente variado con aceleración cinética

3 La aceleración se compone de aceleración local y aceleración convectiva (o de transporte) que a su vez está formada por aceleración vortical y aceleración cinética (Mejía, 2003):

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \nabla \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}$$

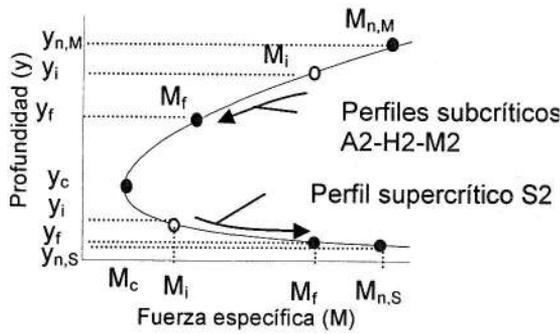


Figura 18. Fuerza específica en flujo gradualmente variado, con aceleración cinética

Si el flujo acelerado es subcrítico (A2, H2 y M2), la profundidad del flujo disminuye en el sentido del movimiento, la profundidad es menor que la profundidad normal y , por tanto, la velocidad del flujo es superior a la velocidad normal y se está ante un flujo supernormal, donde la pendiente de la línea de energía es mayor que la del fondo del canal. Además, la fuerza específica es menor que la del flujo uniforme y la diferencia entre las fuerzas específicas inicial y final ($M_i - M_f$) es positiva, ambos puntos están sobre la rama subcrítica y M_i está hacia el extremo superior (figura 18). Lo anterior significa que $F_e/\gamma - \nabla \text{sen} \theta$ es positivo y, por consiguiente, F_e/γ es mayor que $\nabla \text{sen} \theta$, hecho que indica que la fuerza viscosa supera la fuerza motriz, pero aun así no alcanza a contener el impulso del flujo, que es la misma cantidad de movimiento, de la sección inicial. Ambos puntos caen sobre la rama subcrítica, M_i está hacia la condición crítica y el control se ejerce desde aguas abajo.

Por otra parte, si el flujo acelerado es supercrítico (S2), la diferencia $M_i - M_f$ es negativa (figura 18), lo cual significa que $F_e/\gamma - \nabla \text{sen} \theta$ es negativo, hecho que a su vez indica que F_e/γ es menor que $\nabla \text{sen} \theta$; observándose que la fuerza motriz supera la fuerza viscosa y, conjuntamente con el ímpetu de la sección inicial, contribuye a la aceleración del flujo y, al mismo tiempo, se refleja en un aumento de la fuerza viscosa, la cual finalmente habrá logrado igualar a

la fuerza motriz, con la consecuencia adicional de igualar a M_f con M_n y establecer el flujo uniforme supercrítico, que es la condición natural para dar por completamente desarrollado el perfil S2, en forma asintótica a la profundidad normal, y_n .

Ambos puntos caen sobre la rama supercrítica, M_i está hacia la condición crítica; el control se ejerce desde aguas arriba.

En ambos casos M_i se encuentra hacia la rama superior de la curva y M_f se encuentra hacia la rama inferior. La condición de control siempre se encuentra hacia la condición crítica: cuando el flujo es subcrítico M_f está cerca de M_c , mientras que en el flujo supercrítico M_i se encuentra cerca de M_c . La curva M en el flujo acelerado se recorre desde el extremo superior hacia el extremo inferior y la fuerza específica normal es superior a la fuerza específica del flujo.

En este caso de flujo gradualmente variado mientras más pequeño sea ∇ , es decir, mientras más próximas estén las secciones inicial y final se exige mayor finura en el cálculo numérico de las características hidráulicas de una sección en términos de las variables hidráulicas de la sección conocida, especialmente si el flujo se encuentra próximo al estado crítico, donde la función fuerza específica tiene menor curvatura y mayor concavidad.

Transporte de cantidad de movimiento en flujo gradualmente variado desacelerado

Cuando se tiene flujo permanente gradualmente variado con aceleración cinética negativa, la velocidad media del flujo disminuye en la dirección del movimiento y la altura del flujo aumenta (figura 19). Este es el caso de los perfiles de flujo gradualmente variado A3, H3, M1, M3, C1, C3, S1 y S3.

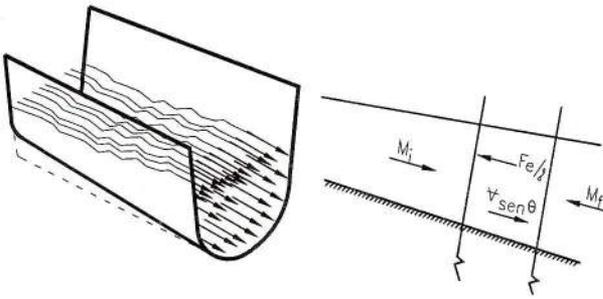


Figura 19. Flujo gradualmente variado con desaceleración cinética

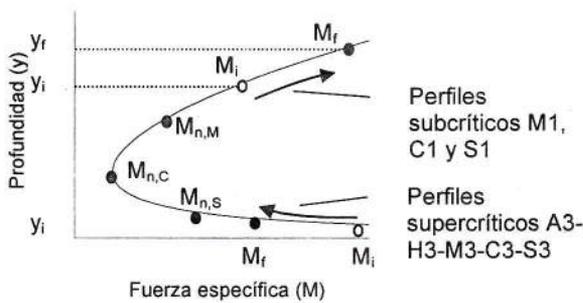


Figura 20. Fuerza específica en flujo gradualmente variado, con desaceleración cinética

Si el flujo desacelerado es subcrítico (M1, C1 y S1), la diferencia entre las fuerzas específicas inicial y final ($M_i - M_f$) es negativa, ambos puntos están sobre la rama subcrítica y M_i está hacia el extremo inferior (figura 20), más cerca de la condición crítica, desde donde se ejerce el control. Lo anterior significa que $F_e/\gamma - v \text{ sen } \theta$ es negativo y por consiguiente $v \text{ sen } \theta$ es mayor que F_e/γ ; hecho que indica que la fuerza motriz supera la fuerza viscosa, pero aun así la fuerza específica acumulada contiene el flujo que cada vez alcanza una mayor profundidad (figura 20).

Por otra parte, si el flujo desacelerado es supercrítico (A3, H3, M3, C3 y S3), la diferencia $M_i - M_f$ es positiva (figura 20), lo cual significa que $F_e/\gamma - v \text{ sen } \theta$ es positivo, hecho que a su vez indica que F_e/γ es mayor que $v \text{ sen } \theta$; observándose que la fuerza viscosa supera la fuerza motriz y contribuye a la desaceleración del flujo, que al mismo tiempo se refleja en la disminución de la fuerza viscosa, que se manifiesta como una disminución gradual de la

desaceleración a lo largo del recorrido del flujo: el flujo es desacelerado, pero cada vez en menor magnitud.

Los dos puntos caen sobre la rama supercrítica, M_f está hacia la condición crítica; el control se ejerce desde aguas arriba.

En ambos casos M_f se halla hacia la rama superior de la curva y M_i se encuentra hacia la rama inferior. La condición de control siempre se encuentra hacia la condición crítica: M_i está cerca de M_c en el flujo subcrítico, mientras que M_f se encuentra cerca de M_c en el flujo supercrítico. La curva M en el flujo desacelerado se recorre desde el extremo inferior hacia el extremo superior y la fuerza específica normal es inferior a la fuerza específica del flujo.

El flujo variado, el flujo normal y la fuerza específica

Las características de los perfiles de flujo gradualmente variado descritas desde el punto de vista del transporte de la cantidad de movimiento se resumen en la tabla 1, donde se observa que el flujo gradualmente variado tiene siempre alguna aceleración, con una pendiente de la línea de energía diferente de la pendiente longitudinal del canal y fuerza específica que evoluciona a lo largo del canal (Chow, 1959) así:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left(khA \cos \theta + \beta \frac{Q^2}{gA} \right) = (s_o - s_f)A \quad (12)$$

Para que la fuerza específica no cambie a lo largo del canal y para que las pendientes de energía y fricción sean iguales se requiere que el flujo sea uniforme, independientemente del estado de flujo, subcrítico o supercrítico.

Si la profundidad de flujo es menor que la profundidad normal, la velocidad del flujo es mayor que la velocidad normal; se está ante un flujo supernormal donde la pendiente de energía es mayor que la pendiente topográfica ($S_o - S_f < 0$) y la fuerza específica es menor que la fuerza específica normal ($M - M_n < 0$).

Tabla 1. Los perfiles de flujo variado y la cantidad de movimiento.

Perfil	Super-crítico	Sub-crítico	Super-normal	Sub-normal	Aceleración	$\frac{dM}{dx}$	$s_o - s_f$	$M_f - M_i$	$M - M_n$
A2		✓	✓		+	-	-	-	-
A3	✓		✓		-	-	-	-	-
H2		✓	✓		+	-	-	-	-
H3	✓		✓		-	-	-	-	-
M1		✓		✓	-	+	+	+	+
M2		✓	✓		+	-	-	-	-
M3	✓		✓		-	-	-	-	-
C1		✓		✓	-	+	+	+	+
C3	✓		✓		-	-	-	-	-
S1		✓		✓	-	+	+	+	+
S2	✓			✓	+	+	+	+	+
S3	✓		✓		-	-	-	-	-

Si la profundidad de flujo es mayor que la profundidad normal, la velocidad del flujo es menor que la velocidad normal; se está ante un flujo subnormal donde la pendiente de energía es menor que la pendiente topográfica ($S_o - S_f > 0$) y la fuerza específica es mayor que la fuerza específica normal ($M - M_n > 0$).

Transporte de cantidad de movimiento en un resalto hidráulico

En un tramo de canal puede aparecer el conflicto de estados de flujo si aguas arriba del tramo se impone un control supercrítico y aguas abajo se impone un control subcrítico. La naturaleza resuelve tal conflicto con un salto hidráulico en un tramo relativamente corto de canal, entre una sección inicial en el frente del resalto hidráulico y una sección final donde termina el flujo dividido a partir de la cual todas las partículas fluidas viajan en la dirección general del flujo, sin la ocurrencia de contraflujos ni la presencia de remolinos locales (figura 21).

El frente del resalto hidráulico se establece en una sección tal que se satisfaga la ecuación de transporte de la cantidad de movimiento (1), que es la ecuación que permite relacionar la profundidad al final de la turbulencia del resalto hidráulico con la profundidad al inicio del resalto hidráulico y expresar cualquiera de ellas en términos de la otra.

Con frecuencia se estudia el resalto hidráulico en un canal horizontal ($\text{sen}\theta=0$) y así se demuestra que la fuerza específica inicial es mayor que la fuerza específica final. Si se ignora la fuerza específica viscosa en las paredes de ese volumen de control, se obtiene la igualdad de las fuerzas específicas inicial y final (figura 22), en diferentes ramas de la curva M y en este caso las secciones y sus respectivas alturas de flujo se conocen como inicial y secuente; M_i corresponde al estado supercrítico y M_s corresponde al estado subcrítico:

$$M_i = M_s \tag{13}$$

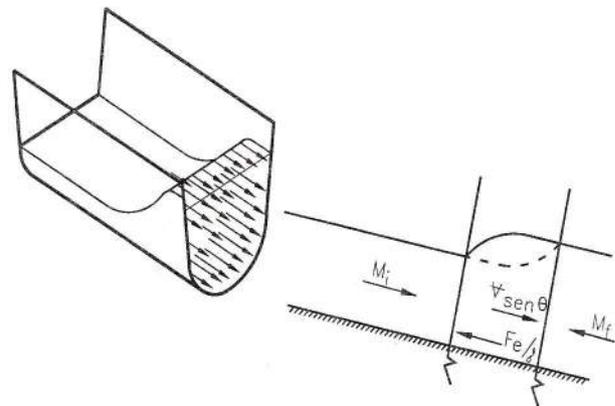


Figura 21. Resalto hidráulico, $M_i > M_f$

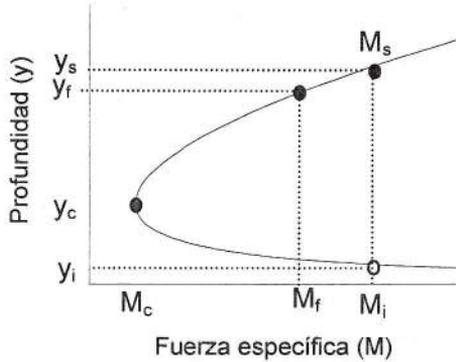


Figura 22. Fuerza específica en un resalto hidráulico

La solución de esta expresión permite encontrar una de las alturas de flujo en términos de la otra, lo cual se facilita si se define la relación adimensional:

$$\omega = \frac{y_s}{y_i} \quad (14)$$

que tiene la característica de ser siempre mayor que la unidad y poderse expresar para cada geometría de la sección transversal como una función de $F_{\beta,i}^2$ o como una función de $F_{\beta,s}^2$:

$$\omega = f(F_{\beta,i}^2) \quad (15)$$

$$\omega = f(F_{\beta,s}^2) \quad (16)$$

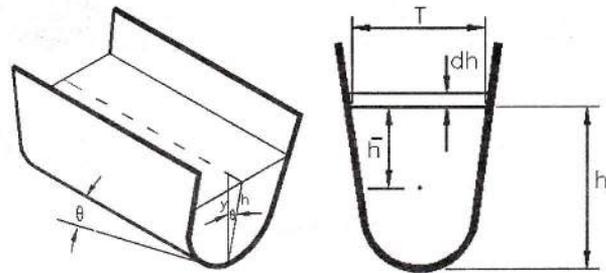
Características geométricas de la sección transversal

La figura 23 ilustra los principales elementos geométricos en una sección transversal perpendicular al fondo del canal, a partir de los que se establecen las relaciones geométricas de interés que se muestran en la tabla 2:

$$h = y \cos \theta \quad (17)$$

$$dA = T dh \quad (18)$$

$$D = A/T \quad (19)$$



Esquema longitudinal Sección transversal

Figura 23. Elementos geométricos del canal.

Tabla 2. Características geométricas de la sección transversal.

Sección	Cualquiera	Trapezoidal	Rectangular	Triangular	Parabólica
Área	A	$\frac{1}{2} \left(\frac{2b}{h} + z_i + z_d \right) h^2$	bh	$(z_i + z_d) h^2 / 2$	$aT^3 / 6$
Ancho superficial	T	$\left(\frac{b}{h} + z_i + z_d \right) h$	b	$(z_i + z_d) h$	$2\sqrt{h/a}$
Profundidad hidráulica	D	$\frac{1}{2} \frac{(2b/h + z_i + z_d)}{b/h + z_i + z_d} h$	h	h/2	2h/3
k	\bar{h}/h	$\frac{1}{3} \frac{3b/h + z_i + z_d}{2b/h + z_i + z_d}$	1/2	1/3	2/5

En la tabla 2 se aprecia que las características geométricas de las secciones rectangular ($z_1 = z_d = 0$) y triangular ($b = 0$) son casos particulares de la sección trapezoidal, que es aquella donde dos lados son paralelos entre sí, en este caso el fondo (b) y la superficie libre (T)⁴.

El número de Froude en canales

A su vez la tabla 3 muestra las expresiones para el número de Froude en diversas secciones transversales.

Tabla 3. El número de Froude en diversas secciones transversales.

Sección	Cualquiera	Trapezoidal	Rectangular	Triangular	Parabólica
F_β	$\frac{v}{\sqrt{\frac{g}{\beta} k(D+h) \cos \theta}}$	$\frac{v}{\sqrt{\frac{g}{\beta} \frac{1}{6} (3b/h+z_1+z_d)(4b/h+3(z_1+z_d))}{(2b/h+z_1+z_d)(b/h+z_1+z_d)} h \cos \theta}}$	$\frac{v}{\sqrt{\frac{g}{\beta} h \cos \theta}}$	$\frac{v}{\sqrt{\frac{g}{\beta} \frac{h}{2} \cos \theta}}$	$\frac{v}{\sqrt{\frac{g}{\beta} \frac{2}{3} h \cos \theta}}$
F_β^2	$\frac{\beta Q^2}{gk(D+h)A^2 \cos \theta}$	$\frac{24 \beta Q^2 (b/h+z_1+z_d)}{g(4b/h+3(z_1+z_d))(3b/h+z_1+z_d)(2b/h+z_1+z_d)h^5 \cos \theta}$	$\frac{\beta Q^2}{gb^3 h^3 \cos \theta}$	$\frac{8 \beta Q^2}{g(z_1+z_d)^2 h^5 \cos \theta}$	$\frac{27 \beta a Q^2}{32gh^4 \cos \theta}$

Efecto de las pequeñas pendientes longitudinales

La tabla 4 muestra algunos valores de interés asociados a pequeños ángulos de inclinación longitudinal.

Tabla 4. Ángulos y funciones de interés en hidráulica de canales.

Ángulo		$\cos \theta$	$\cos^2 \theta$	$\text{sen} \theta$	$\tan \theta$	So
grado	radián					
0	0.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0%
0.29	0.0050	1.0000	1.0000	0.0050	0.0050	0.5%
1	0.0175	0.9998	0.9997	0.0175	0.0175	1.7%
2	0.0349	0.9994	0.9988	0.0349	0.0349	3.5%
3	0.0524	0.9986	0.9973	0.0523	0.0524	5.2%
4	0.0698	0.9976	0.9951	0.0698	0.0699	7.0%
4.05	0.0708	0.9975	0.9950	0.0707	0.0709	7.1%
5	0.0873	0.9962	0.9924	0.0872	0.0875	8.7%
5.73	0.1000	0.9950	0.9900	0.0999	0.1004	10.0%
6	0.1047	0.9945	0.9891	0.1045	0.1051	10.5%
7	0.1222	0.9925	0.9851	0.1219	0.1228	12.3%

4 La sección trapezoidal es diferente de la sección trapezoidal que es aquella donde el fondo de la sección no es paralelo a la superficie libre.



Los valores consignados en la tabla 4 muestran que para canales con pendientes tan altas, desde el punto de vista hidráulico, como 10%, se obtienen correcciones de altura de flujo insignificantes, representada por $\cos\theta$. El efecto de la corrección simultánea de la presión y la altura de flujo por pendiente, representada por $\cos^2\theta$, indica que, con pendientes inferiores a 7,1%, se refleja en magnitudes inferiores a la centésima. Así mismo, para inclinaciones de los canales inferiores al 7%, se observa la igualdad entre el ángulo, el seno, la tangente y la pendiente. También se observa que para pendientes inferiores a 0,5%, el efecto del peso del volumen de líquido en el volumen de control, representado por $\sin\theta$, empieza a ser insignificante. Por supuesto que si en algunas circunstancias los efectos de la corrección para algunas pendientes son insignificantes, no impide que esos valores puedan calcularse si se requiere mayor pulcritud en los cálculos.

La función resalto hidráulico en un canal horizontal de sección transversal trapecial, rectangular o triangular

Para un canal trapecial la combinación de (13) con las relaciones geométricas indicadas en la tabla 2 conduce a:

$$\frac{12\beta Q^2}{gy_1^3} \left(\frac{1}{(2b/y_1 + z_1 + z_d)y_1^2} - \frac{1}{(2b/y_s + z_1 + z_d)y_s^2} \right) = \left(3 \frac{b}{y_s} + z_1 + z_d \right) \omega^3 - \left(3 \frac{b}{y_1} + z_1 + z_d \right) \quad (20)$$

que con la expresión para $F_{\beta,i}^2$ presentada en la tabla 3 y con $y_s = y_1 \omega$ de (14), se convierte en:

$$\frac{2\omega^2 (2b/y_1 \omega + z_1 + z_d)(b/y_1 + z_1 + z_d)}{(4b/y_1 + 3(z_1 + z_d))((2b/y_1 \omega + z_1 + z_d)\omega^2 - (2b/y_1 + z_1 + z_d))} \left(\frac{3b/y_1 \omega + z_1 + z_d}{3b/y_1 + z_1 + z_d} \omega^3 - 1 \right) = F_{\beta,i}^2 \quad (21)$$

Esta es la función resalto hidráulico en un canal trapecial en términos de las condiciones iniciales del resalto hidráulico.

Con un procedimiento similar se obtiene la función resalto hidráulico en un canal trapecial en términos de las condiciones secuentes del resalto hidráulico.

$$\frac{2(2b\omega/y_s + z_1 + z_d)(b/y_s + z_1 + z_d)}{\omega^3 (4b/y_s + 3(z_1 + z_d))((2b/y_s + z_1 + z_d)\omega^2 - (2b\omega/y_s + z_1 + z_d))} \left(\omega^3 - \frac{3b\omega/y_s + z_1 + z_d}{3b/y_s + z_1 + z_d} - 1 \right) = F_{\beta,s}^2 \quad (22)$$

La solución aceptable para ω es aquella mayor que la unidad. Desde estas expresiones se pueden obtener rápidamente las funciones para el resalto hidráulico en un canal rectangular ($z_1 = 0$; $z_d = 0$) y en un canal triangular ($b = 0$).

Para el canal de sección transversal rectangular se obtiene la ecuación de Bélanger:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_{\beta,i}^2} - 1 \right) \quad (23)$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_{\beta,s}^2} - 1 \right) \quad (24)$$

Como en la sección inicial el número de Froude es mayor que la unidad y en la sección secuencia el número de Froude es menor que la unidad, ω será mayor que la unidad.

Para el canal de sección transversal triangular se obtiene:

$$\frac{\omega^2(\omega^3 - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{3}{2} F_{\beta,i}^2 \quad (25)$$

$$\frac{\omega^3 - 1}{\omega^3(\omega^2 - 1)} = \frac{3}{2} F_{\beta,s}^2 \quad (26)$$

Esta es la función del resalto hidráulico en el canal horizontal de sección transversal triangular, así los taludes laterales no sean iguales. Si bien esta expresión tiene cinco soluciones para ω , solamente es aceptable el único valor de ω mayor que la unidad.

La función resalto hidráulico en canal horizontal de sección transversal parabólica

Para la sección parabólica se establece (French, 1985):

$$\frac{y_s}{y_i} = \frac{T_s^2}{T_i^2} = \omega \tag{27}$$

y, por lo tanto:
$$\left(\frac{T_s}{T_i}\right)^3 = \omega^{3/2} \tag{28}$$

Para resalto hidráulico se satisface (13) y se obtiene:

$$\beta \frac{Q^2}{g} \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{A_s}\right) = ky_s A_s - ky_i A_i \tag{29}$$

Si se reemplazan $A=2Th/3=aT^3/6$ y la continuidad del flujo, esta ecuación se convierte en:

$$\beta \frac{v_i^2 \left(\frac{a}{6} T_i^3\right)^2}{g} \left(\frac{1}{\frac{a}{6} T_i^3} - \frac{1}{\frac{a}{6} T_s^3}\right) = \frac{2}{5} \left(y_s \frac{a}{6} T_s^3 - y_i \frac{a}{6} T_i^3\right) \tag{30}$$

Se cancelan los coeficientes a/6 y se dividen ambos términos entre y_i , para obtener:

$$\frac{5 \beta v_i^2}{2 g y_i} \left(\frac{T_i^3}{T_i^3} - \frac{T_i^3}{T_s^3}\right) = \frac{y_s}{y_i} \frac{T_s^3}{T_i^3} - \frac{y_i}{y_i} \frac{T_i^3}{T_i^3} \tag{31}$$

Como $F_{\beta}^2 = \beta v^2/gD$, la expresión se reduce a:

$$\frac{\omega^{3/2}(\omega^{5/2} - 1)}{\omega^{3/2} - 1} = \frac{5}{3} F_{\beta,i}^2 \tag{32}$$

Y en términos de las condiciones secuentes:

$$\frac{\omega^{5/2} - 1}{\omega^{5/2}(\omega^{3/2} - 1)} = \frac{5}{3} F_{\beta,s}^2 \tag{33}$$

Esta es la función resalto hidráulico en un canal horizontal de sección transversal parabólica, que tiene una única solución para ω mayor que la unidad.

El resumen de las funciones para el resalto hidráulico se muestra en la tabla 5:

Tabla 5. La función resalto hidráulico para algunas secciones transversales en canales horizontales

Sección	Cualquiera	Trapezoidal simétrica	Rectangular	Triangular simétrica	Parabólica
F_{β}	$\frac{v}{\sqrt{\beta} k(D+y)}$	$\frac{v}{\sqrt{\beta} \frac{1}{6} (3b/y + 2z)(2b/y + 3z) y}$	$\frac{v}{\sqrt{\beta} y}$	$\frac{v}{\sqrt{\beta} \frac{y}{2}}$	$\frac{v}{\sqrt{\frac{g}{\beta} \frac{2}{3} y}}$
F_{β}^2	$\frac{\beta Q^2}{gk(D+y)A^2}$	$\frac{6 \beta Q^2 (b/y + 2z)}{g(3b/y + 2z)(2b/y + 3z)(b/y + z) y^5}$	$\frac{\beta Q^2}{g b^2 y^3}$	$\frac{2 \beta Q^2}{g z^2 y^5}$	$\frac{27 \beta a Q^2}{32 g y^4}$
$y_{c,\beta}$	$\frac{(D_c + y_{c,\beta}) A_c^2}{\beta Q^2} = \frac{\beta Q^2}{gk}$	$\frac{(3b/y_{c,\beta} + 2z)(2b/y_{c,\beta} + 3z)(b/y_{c,\beta} + z) y_{c,\beta}^5}{b/y_{c,\beta} + 2z} = \frac{6 \beta Q^2}{g}$	$y_{c,\beta} = 3 \sqrt{\frac{\beta(Q/b)^2}{g}}$	$y_{c,\beta} = 5 \sqrt{\frac{2 \beta Q^2}{g z^2}}$	$y_{c,\beta} = \sqrt[4]{\frac{27 \beta a Q^2}{32 g}}$
ω	$\omega = f(F_{\beta,i}^2)$	$F_{\beta,i}^2 = \left(1 - \frac{3b/y_i \omega + 2z}{3b/y_i + 2z} \omega^3\right) \frac{\omega^2 (b/y_i \omega + z)(b/y_i + 2z)}{(2b/y_i + 3z)((b/y_i + z) - (b/y_i \omega + z) \omega^2)}$	$\omega = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 F_{\beta,i}^2} - 1)$	$\frac{\omega^2(\omega^3 - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{3}{2} F_{\beta,i}^2$ no requiere simetría transversal	$\frac{\omega^{3/2}(\omega^{5/2} - 1)}{\omega^{3/2} - 1} = \frac{5}{3} F_{\beta,i}^2$
ω	$\omega = f(F_{\beta,s}^2)$	$F_{\beta,s}^2 = \left(\omega^3 - \frac{3b\omega/y_s + 2z}{3b/y_s + 2z}\right) \frac{(b\omega/y_s + z)(b/y_s + 2z)}{\omega^3 (2b/y_s + 3z)((b/y_s + z) \omega^2 - (b\omega/y_s + z))}$	$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 F_{\beta,s}^2} - 1)$	$\frac{\omega^3 - 1}{\omega^3(\omega^2 - 1)} = \frac{3}{2} F_{\beta,s}^2$ no requiere simetría transversal	$\frac{\omega^{5/2} - 1}{\omega^{5/2}(\omega^{3/2} - 1)} = \frac{5}{3} F_{\beta,s}^2$



Conclusiones

El estudio del transporte de cantidad de movimiento en un canal (ecuación 1) y la función fuerza específica en canales (8) permite explicar:

- El comportamiento de la profundidad de flujo en un canal, ante diversas condiciones de flujo o variaciones de la profundidad o presencia de controles hidráulicos de manera independiente del principio de conservación de la energía.
- El comportamiento de la altura del flujo uniforme a lo largo de un canal.
- El comportamiento de la altura del flujo gradualmente variado a lo largo de un canal.
- El comportamiento de la altura del flujo rápidamente variado en un canal regulado por una compuerta o por un azud.
- El comportamiento de la altura del flujo rápidamente variado en una transición gradual.
- El comportamiento de la altura del flujo rápidamente variado en un resalto hidráulico, si se conocen las condiciones de flujo en la sección inicial (ecuación 15) o en la sección seciente (ecuación 16).
- El comportamiento de la altura del flujo rápidamente variado en un resalto hidráulico en canales y calcular la otra altura de flujo en resalto hidráulico que se desarrolla en canales de sección:
 - Trapecial para condiciones conocidas en la sección inicial (ecuación 21) o en la sección seciente (ecuación 22).
 - Rectangular para condiciones conocidas en la sección inicial (ecuación 23) o en la sección seciente (ecuación 24).
 - Triangular para condiciones conocidas en la sección inicial (ecuación 25) o en la sección seciente (ecuación 26).
 - Parabólica para condiciones conocidas en la sección inicial (ecuación 32) o en la sección seciente (ecuación 33).

Lista de símbolos

A	área mojada de la sección transversal del canal.
a	inverso del <i>latus rectum</i> de la sección transversal parabólica.
A_c	área mojada crítica de la sección transversal del canal.
A_f	área mojada de la sección transversal final.
A_i	área mojada de la sección inicial del volumen de control.
A_s	área mojada de la sección seciente parabólica.
A_t	área del lecho que soporta arrastre por esfuerzo cortante.
b	ancho del fondo en la sección transversal rectangular o trapecial.
D	profundidad hidráulica en la sección.
D_c	profundidad hidráulica crítica en la sección.
F_e	fuerza externa que actúa sobre el volumen de control.
$F_{\beta,i}$	número de Froude en la sección inicial.
$F_{\beta,s}$	número de Froude en la sección seciente.
F_n	componente paralela al eje del canal de la fuerza normal ejercida por el lecho y por las paredes del canal.
F_p	fuerza estática total sobre la sección transversal.
F_{pf}	fuerza debida a la presión en la sección final del volumen de control.
F_{pi}	fuerza debida a la presión en la sección inicial del volumen de control.
F_β	número de Froude para flujo de cantidad de movimiento (Boussinesq).
F_t	fuerza de fricción desarrollada por las paredes del canal sobre la masa líquida.

f	subíndice para la sección final del volumen de control.	P	perímetro sólido mojado de la sección transversal.
g	aceleración gravitacional local.	p	función distribución de presión en la sección.
\bar{h}	profundidad hasta el centro de área.	Q	caudal que circula a través de la sección.
h	profundidad de flujo en la sección, perpendicular al fondo del canal. Ordenada de la sección parabólica.	R	radio hidráulico en la sección transversal.
h_c	profundidad crítica del flujo en la sección, perpendicular al fondo del canal.	S_f	pendiente de la línea de energía debida a la fricción.
i	subíndice para la sección inicial del volumen de control.	S_o	pendiente del fondo del canal.
k	fracción de profundidad del centro de área en la sección respecto a la profundidad del flujo.	T	ancho de la superficie libre en la sección transversal.
L	longitud del volumen de control en la dirección del flujo.	T_c	ancho de la superficie libre crítico.
M	fuerza específica.	T_i	ancho de la superficie libre en la sección inicial parabólica.
M_c	fuerza específica mínima.	T_s	ancho de la superficie libre en la sección secuencia parabólica.
M_f	fuerza específica en la sección final del volumen de control.	∇	volumen del líquido dentro del volumen de control.
M_i	fuerza específica en la sección inicial del volumen de control o del resalto hidráulico.	v	velocidad media del flujo en la sección.
M_n	fuerza específica normal en la sección con flujo uniforme.	v_c	velocidad crítica en la sección.
$M_{n,C}$	fuerza específica normal en un canal crítico.	v_f	velocidad media en la sección final del volumen de control.
$M_{n,M}$	fuerza específica normal en un canal de pendiente moderada.	v_i	velocidad media en la sección inicial del volumen de control.
$M_{n,S}$	fuerza específica normal en un canal de pendiente escarpada.	x	abscisa a lo largo del canal, en el sentido del flujo. Abscisa de la sección parabólica en sentido perpendicular al flujo.
M_s	fuerza específica secuencia en el resalto hidráulico.	y	profundidad de flujo, paralela al eje vertical.
n-n	sección transversal perpendicular al fondo del canal.	y_c	profundidad crítica.
\bar{p}	presión en el centro de área.	$y_{c,\beta}$	profundidad crítica obtenida con el criterio de fuerza específica mínima.
		y_f	profundidad de flujo en la sección final del volumen de control.
		y_i	profundidad de flujo en la sección inicial del volumen de control o en el resalto hidráulico.



y_n	profundidad normal del flujo uniforme.
y_s	profundidad seciente de flujo en el resalto hidráulico.
z	componente horizontal del talud (1V:zH), cuando son iguales en ambas márgenes.
z_d	componente horizontal del talud (1V: z_d H) en la margen derecha del canal.
z_l	componente horizontal del talud (1V: z_l H) en la margen izquierda del canal.
W	peso del líquido contenido en el volumen de control.
β	coeficiente de corrección de cantidad de movimiento o de Boussinesq.
γ	peso específico del líquido.
θ	ángulo de inclinación del canal medido con la horizontal.
τ	esfuerzo cortante.
ω	función del resalto hidráulico: relación entre las profundidades seciente e inicial del resalto hidráulico.

Referencias

- Chow, Ven Te (1959). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill. New York, 667 p.
- French, Richard H. (1985). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill. México. 724 p.
- García, Celso y Batalla, Ramón J. (2000). Cálculo de la tensión de corte a partir de los perfiles de velocidad en un río de gravas. *Ingeniería del Agua*, vol. 7 Número 3, Valencia, España. Páginas 237-242.
- Mejía G., Francisco Jaime (2003), <http://fluidos.eia.edu.co>, Escuela de Ingeniería de Antioquia, Envigado, Colombia, 158 Mb.
- Mejía G., Francisco Jaime (2004), La función fuerza específica en canales, *Revista EIA*, Escuela de Ingeniería de Antioquia, Número 1.
- Naudascher, Eduard (2001). *Hidráulica de canales*. México: Limusa. 381 p.
- Newton, Isaac (1687). *Philosophiae Naturales Principia Mathematica*. Altaza, Barcelona, España. 621 p.
- Ohtsu, Iwao y Yasuda, Youichi (1994), Characteristics of supercritical flow below sluice gate. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 120(3)
- Vischer, D. L. and Hager, W. H. (1998) *Dam hydraulics*. Baffins Lane, Chichester, Great Britain. John Wiley & Sons. 316 p.