Revista EIA, ISSN 1794-1237 / Año XIII / Volumen 13 / Edición N.25 / Enero-Junio 2016 / pp. 29-44
Publicación semestral de carácter técnico-científico / Universidad EIA, Envigado (Colombia)

LA INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^m$

Gabriel Poveda Ramos[1]

RESUMEN

En este artículo se deduce de manera original una fórmula de interpolación en el espacio real de m dimensiones ($\mathbb{R}^m$), inspirada en la conocida fórmula de Lagrange para funciones reales ($F(x)$) de una variable, es decir en la recta real $\mathbb{R}$. Los resultados que aquí se obtienen no parecen ser muy conocidos, al menos, en los medios universitarios de Colombia. El autor los ha buscado durante mucho tiempo, sin hallarlos. Finalmente tuvo que deducirlos por sí solo.

PALABRAS CLAVE: análisis numérico; integracion numérica; Geometría Analítica del Espacio; Cuerpos convexos.

THE INTERPOLATION OF LAGRANGE IN SPACE $\mathbb{R}^m$

ABSTRACT

In this article, a formula is deduced in an original manner for interpolation in the real space of m dimensions ($\mathbb{R}^m$), inspired by the well-known Lagrange formula for real functions ($F(x)$) of a variable on the real line $\mathbb{R}$. The results that are shown here do not seem well known, at least not in Colombian university journals. These results have been searched by the author for some time, and he has not found them. In the end, he had to deduce them himself.

KEYWORDS: Numerical Analysis; Numerical Integration; Analytic Geometry in Space; Convex polyhedra.

A INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE NO ESPAÇO $\mathbb{R}^m$

RESUMO

Este artigo se deduz de uma forma original uma fórmula de interpolação no espaço real de m dimensões reais ($\mathbb{R}^m$), inspirada pela conhecida fórmula de Lagrange para funções reais ($F(x)$) de uma variável, ou seja, na reta real $\mathbb{R}$. Os resultados aqui obtidos não parecem ser bem conhecidos, pelo menos na academia da Colômbia. O autor os tem procurado por um longo tempo, sem encontrá-los. Finalmente teve que deduzi-los sozinho.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Numérica; Integração Numérica; Geometria Analítica no Espaço; Poliedros convexos.

[1] Ingeniero Químico, Ingeniero Electricista, Matemático. Doctor en Ingeniería

Autor de correspondencia: Poveda Ramos, G. (Gabriel). Correo electrónico: gapora@une.net.co.

Historia del artículo:
Artículo recibido: 01-VIII-2015 / Aprobado: 11-VII-2016
Disponible online: 30 de octubre de 2016
Discusión abierta hasta octubre de 2017

DOI: http:/dx.doi.org/10.14508/reia.2016.13.25.29-44

1. INTRODUCCIÓN

En todos los libros, elementales y avanzados de Análisis Numéricos se presenta la fórmula de interpolación de Lagrange para funciones reales de una sola variable, y algunos de los más adelantados la emplean para deducir de ella otros resultados que son muy importantes para el Análisis Numérico y muy útiles en sus aplicaciones a la Ingeniería, la Actuaría, la Economía y otras ciencias de la realidad. Pueden verse, por ejemplo, los libros ya clásicos de Hammign, Ralston, Scheid, Willers, Mineur, Pearson y otros que se citan en la bibliografía.

Pero, lamentablemente, ninguno de estos libros ya famosos dice cómo se puede extender esa fórmula a funciones continuas de dos variables, es decir, de la forma $F(x, y)$, definidas en un dominio continuo del plano OXY. Ni siquiera sugieren a sus lectores las posibilidades de hacerlo. Por supuesto, menos aun se ocupan del caso de las funciones continuas $F(x, y, z)$ de tres variables en el espacio tridimensional $OXYZ$ (o bien, en el espacio $\mathbb{R}^3$, como lo llaman los libros modernos). Este autor ha buscado hace varios años, en libros y en revistas, avanzados y elementales, de distintos campos del álgebra, el análisis y la geometría analítica, si alguno de ellos presenta la fórmula de Lagrange en dos o más variables, o si siquiera sugiere que es posible construirla. Pero nada ha encontrado. Y por eso ha procedido a hacer este trabajo y a deducir las fórmulas de Lagrange para interpolar funciones de dos, de tres y de n dimensiones ($n \geq 2$) que presenta en este artículo.

2. LA FÓRMULA DE LAGRANGE EN UNA DIMENSIÓN

1. Recordemos qué es la fórmula de Lagrange en una dimensión: se tienen sobre la línea recta N puntos ($n \geq 2$) con abscisas $x_1, x_2, \dots, x_N$ que, si quiere, se pueden considerar como números reales bien conocidos en su valor numérico, es decir, que se pueden alimentar a un computador con la precisión y con el número de dígitos exactos que sea del caso. Además, para facilitar la nomenclatura, supondremos, sin pérdida de generalidad, que $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_N$, siendo, desde luego, x_1, el menor de todos, y x_N el mayor de ellos. Se tienen, además, N valores numéricos $u_1, u_2, \dots, u_N$ correspondientes a una variable dependiente en los puntos x_i (siendo $i = 1,2, \dots, N$) mencionados más arriba. Estos últimos valores numéricos, si se quiere, pueden considerarse como datos conocidos, sin errores de medición, que se pueden también digitar en un computador con tantos dígitos exactos como se requiera. En algunas situaciones, los valores u_i pueden ser los que le correspondan a una función conocida $F(x)$ definida en un intervalo abierto I de la recta real, el cual contenga en su interior al intervalo abierto que va desde x_1 hasta x_N. En otras situaciones, los números u_i son simplemente valores medidos u observados de una variable de carácter físico, económico u otro, de la cual se sabe que puede variar con x de manera continua, pero sin que conozca cuál es la función explícita $F(x)$ que da el valor de

$$u = F(x)$$

mediante operaciones de cómputo a partir del valor de x. El problema de que se trata consiste en estimar cuál es el valor que le corresponde a u en un punto x cualquiera que esté contenido en I, y que no sea ninguno de los x_i ya mencionados. Se trata, en otras palabras, de interpolar la variable entre los valores $u_1, u_2, \dots, u_N$.

Este problema apareció desde los días de Newton, y a él le dedicaron trabajos extensos y profundos el mismo Newton, Cotes, Vandermonde, Gauss, Lagrange, Hermite, Tchebicheff y otros grandes del Análisis Matemático, desde el siglo XVII hasta el siglo XX.

Fue Newton quien estableció la primera gran estrategia para resolverlo, que consiste en apelar a la clase de los polinomios enteros en la variable x, de grado N-1 y buscar en ellos aquel polinomio (único), que pasa por los puntos (x_1, u_1), (x_2, u_2), … (x_N, u_N) del plano cartesiano OXU. El mismo Newton había mostrado que ese polinomio existe y que es único, solo bajo el requisito (casi evidente) de que

$x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$. Lo designamos como $p(x)$ y se le denomina "el polinomio de colocación" de los datos x_i con los valores u_i. Los libros de Análisis Numérico presentan distintas maneras de escribir ese polinomio. Una vez conocido el polinomio $p_n(x)$, se le usaría (siguiendo a Newton) para estimar el valor de u en un punto arbitrario *x.* Es obvio que, dada la definición de $p(x)$, las abscisas x_i y sus valores correspondientes u_i cumplen las *N* identidades

$$\left.\begin{aligned} p(x_1) &= u_1 \\ p(x_2) &= u_2 \\ &\vdots \\ p(x_N) &= u_N \end{aligned}\right\} \qquad (1.01)$$

Vandermonde le dio al polinomio de colocación la forma muy general y muy elegante que se expresa con el determinante que lleva su nombre

$$\begin{vmatrix} p(x) & 1 & x & \ldots & x^{N-1} \\ y_1 & 1 & x_1 & \ldots & x_1^{N-1} \\ y_2 & 1 & x_2 & \ldots & x_2^{N-1} \\ \vdots & & & & \\ y_N & 1 & x_N & \ldots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.02)$$

Pero este determinante es engorroso de manejar en cálculos aritméticos y algebraicos. Así que Lagrange encontró una fórmula equivalente, muy general, que lleva su nombre) para el polinomio de colocación, y que se expresa en la forma

$$p(x)=\sum_{i=1}^{i=N} \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\,(x-x_{i+1})\ldots(x-x_N)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\,(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_N)}\; u_i \qquad (1.03)$$

Esta es la famosa fórmula de interpolación de Lagrange, que es más adaptable al cómputo numérico, y que se puede programar sin dificultad para un computador personal. Es muy fácil comprobar que el lado derecho de esta fórmula (1.03) es un polinomio de grado *N-1* y que satisface las *N* condiciones (1.01) escritas más arriba. Por lo tanto, es el polinomio de colocación de los valores u_i con los valores x_i, polinomio que, como se sabe, es único aunque puede presentarse en varias formas.

Se suele abreviar el lado derecho de la fórmula (1.03), conviniendo en adoptar la notación

$$\begin{aligned} &\pi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{N-1}) \\ &(x - x_N) \prod_{i=1} \equiv (x - x_i) \end{aligned} \qquad (1.04)$$

y además

$$l_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_i)\ \ldots\ (x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_N)}{(x_i-x_1)\ (x_i-x_2)\ \ldots\ (x_i-x_{i-1})\ (x_i-x_{i+1})\ldots\ (x_i-x_N)} \qquad (1.05)$$

Resulta obvio que el denominador de $l_i(x)$ es

$$\begin{aligned} &(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \\ &\ldots (x_i - x_n) = \pi'(x_i) \end{aligned} \qquad (1.06)$$

$$= d\pi(x)/dx, \text{ valorado en } x = x_i \qquad (1.07)$$

Y por lo tanto $l_i(x)$ es el polinomio de grado *N-1* dado por

$$l_i(x) \qquad \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\,\pi'(x_i)} \qquad (1.08)$$

De esta manera, la fórmula llamada "de Lagrange" para el polinomio interpolador y de colocación para los puntos (x_1, u_1), (x_2, u_2), ... (x_N, u_N) se puede escribir

$$p(x)=\sum_{i=1}^{N} u_i \cdot l_i(x) \qquad (1.09)$$

que es la forma resumida de la **Ecuación 1.03**.

2. Si se conociera de antemano que hay una función explícita, analíticamente bien determinada, que ligue a *u* y a *x* en la forma

$$u = F(x) \qquad (2.01)$$

que sea numéricamente computable, resultaría obvio que se cumplen las identidades.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= F(x_1) \\ u_2 &= F(x_2) \\ &\vdots \\ u_n &= F(x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (2.02)$$

y que, en los N puntos $x_i (i = 1,2, \dots , N)$, ocurriría que los valores de la función $F(x)$ coinciden con los del polinomio de colocación $p(x_i)$:

$$\left.\begin{aligned} F(x_1) &= p(x_1) \\ F(x_2) &= p(x_2) \\ &\vdots \\ F(x_n) &= p(x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (2.03)$$

Pero, en general, en otros puntos x de la recta real, distintos a los de la red $x_1, x_2, \dots x_N$ prescrita desde el comienzo, la función $F(x)$ y el polinomio $p(x)$ no tienen por qué coincidir. Sin embargo, usando el teorema de Rolle y la serie de Taylor, en todos los libros de Análisis Numérico se demuestra que, para cualquier x del dominio de $F(x)$, valdría la igualdad

$$F(x) = p(x) + \frac{1}{N!}\pi(x)F^{(N)}_{(z)} \qquad (2.04)$$

en donde z es un punto al que no puede determinarse cuánto vale, pero que ciertamente existe y pertenece al intervalo abierto $I = (x_1 \dots x_N)$. Puede verse cualquiera de los libros mencionados en la bibliografía. De este modo se logra, por lo menos, saber cuánto es el tope máximo del error absoluto de $\varepsilon(x)$ que se comete cuando se usa a $p(x)$ para estimar el valor de u en un punto x que no sea de los puntos $x_1, x_2, \dots x_N$. En efecto:

$$\max|\varepsilon(x)| = \frac{1}{N!} \max_{x\in I} \left|\pi(x)F^{(N)}_{(z)}\right. \qquad (2.05)$$

como lo muestra una breve reflexión. De tal manera que, si conocemos a $F(x)$ y sus derivadas hasta $F^{(N)}_{(x)}$, la fórmula de Lagrange se puede escribir:

$$u(x)=F(x)=\sum \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_N)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_N)} u_i+\varepsilon(x) \qquad (2.06)$$

y que el "error" está acotado por la fórmula (2.05).

Pero si no se conoce a $F(x)$ ni a sus derivadas, lo más que puede escribirse es que

$$u(x) = p(x) + \varepsilon(x) \qquad (2.07)$$

en donde $\varepsilon(x_1) = 0 = \varepsilon(x_2) = \cdots \varepsilon(x_N) = 0$. Y quienes usan la Matemática para fines mundanos escriben

$$u(x) =\simeq p(x) \text{ en } x \in I \qquad (2.08)$$

con la venia de la ortodoxia formalista.

3. EN PLANO EN $\mathbb{R}^3$ QUE PASA POR TRES PUNTOS

3. Para generalizar la fórmula de Lagrange a varias variables recordaremos el siguiente resultado de la Geometría Analítica en el espacio de tres dimensiones.

Se tienen en $\mathbb{R}^3$ los tres puntos distintos $Q_1(x_1, y_1, z_1)$, $Q_2(x_2, y_2, z_2)$, $Q_3(x_3, y_3, z_3)$, y se necesita establecer el valor de los coeficientes del plano

$$ax + by + cz + 1 = 0 \qquad (3.01)$$

que pasa por los tres puntos mencionados. Es obvio entonces que tales coeficientes son los números que cumplan la condición

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.02)$$

que enseña la Geometría Analítica. A las proyecciones de Q_1, Q_2, Q_3 sobre el plano OXY se las llama $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$.

Desarrollando el determinante (3.02) mediante la regla de Laplace, se encuentra que

$$z = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} z_1 - \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} z_2 + \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} z_3 \qquad (3.03)$$

y en esta expresión el símbolo Δ es el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (3.04)$$

Ejecutando operaciones algebraicas y simplificando términos, resulta que el plano buscado, que pasa por Q_1, Q_2 y Q_3, es el plano

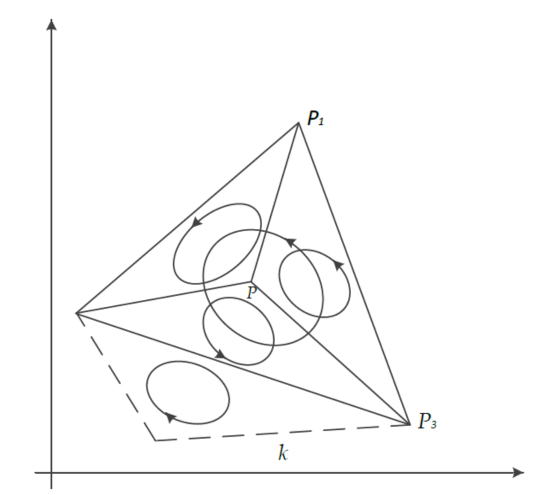
$$z(x,y)= \frac{(x-x_2)(y-y_3)-(x-x_3)(y-y_2)}{(x_1-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_1-y_2)}\, z_1 \;+$$

$$+\;\frac{(x-x_3)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_3)}{(x_2-x_3)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_2-y_3)}\, z_2 \;+ \qquad (3.05)$$

$$+\;\frac{(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_1)}{(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)}\, z_3 = L(x,y)$$

Ahora se puede notar que tanto los numeradores como los denominadores de las fracciones que están al lado derecho de (2.05) tienen un claro significado geométrico, que se muestra en la figura anexa.

Figura 1



En esta figura se tienen el plano OXY y los tres puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$. El punto genérico $P_n(x, y)$ es la proyección en este plano de un punto genérico $Q(x, y, z)$, situada en el plano que se busca.

El área del triángulo $P_1P_2P_3$ es, como bien se sabe

$$A_{123} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3.06)$$

y es fácil demostrar que si P_1, P_2, P_3 están en orden levógiro, el determinante de (2.06) es un número positivo. Este determinante se puede desarrollar y se puede escribir de tres modos:

$$\begin{aligned} A_{123} &= (1/2)[(x_1-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_1-y_2)] \\ &= (1/2)\,[(x_2-x_3)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_2-y_3)] \qquad (3.07) \\ &= (1/2)\,[(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)] \end{aligned}$$

Por otra parte el área del triángulo $P\,P_2\,P_3$ es

$$A_{023} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3.06)$$

$$= (1/2)[(x-x_2)(y-y_3)-(x-x_3)(y-y_2)] \qquad (3.08\ A)$$

Se ve también que

$$(1/2)[(x-x_3)(y-y_1)-(x-x_1)$$

$$(y-y_3)] = (1/2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \qquad (3.09)$$

$$(1/2)\,A_{103} = (1/2)A_{103}$$

en donde

A_{103} = Área (orientada, o sea, dotada de signo) del triángulo $P_1P\,P_3$, recorrido en ese orden de sus vértices

Además

$$(1/2)[(x-x_1)(y-y_2)-(x-x_2)$$

$$(y-y_1)] = (1/2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \qquad (3.10)$$

$$(1/2)\,A_{120}$$

en donde

A_{120} = Área orientada (y dotada de signo) del triángulo $P_1P\,P_3$, recorrido en ese orden de sus vértices

Por lo tanto, la ecuación del plano que pasa por Q_1, Q_2, Q_3 se puede escribir, también, como

$$z(x,y)= \frac{A_{023}}{A_{123}}\, z_1 + \frac{A_{103}}{A_{123}}\, z_2 + \frac{A_{120}}{A_{123}}\, z_3 = L(x,y) \qquad (3.11)$$

Los signos de las áreas de los distintos triángulos a la vista quedan determinados por una regla muy conocida en la Geometría Analítica tridimensional, que es la siguiente.

Se numeran los puntos Q_1, Q_2, Q_3, de modo que sus proyecciones $P_1P_2P_3$, recorridas en este orden, determinen un triángulo levógiro cuya área A_{123} convenimos que es positiva.

En estas condiciones, las tres áreas A_{023}, A_{103}, A_{120} tienen signos positivos o negativos, según que sus respectivos triángulos $P\,P_2P_3$, P_1PP_3, P_1P_2P indiquen, con el orden de sus tres subíndices, un recorrido levógiro o un recorrido dextrógiro.

Acudiendo a los determinantes que definen a A_{023}, A_{103}, A_{120}, o acudiendo a un dibujo elemental, se encuentra que, cualesquiera que sean los signos que llevan esas tres áreas, se tiene que

$$A_{023} + A_{103} + A_{120} = A_{123} \qquad (3.12)$$

o bien que

$$A_{023}/A_{123} + A_{103}/A_{123} + A_{120}/A_{123} = 1 \qquad (3.12.A)$$

Los coeficientes A_{023}/A_{123}, A_{103}/A_{123}, A_{120}/A_{123} pueden ser:

a. Todos positivos, cuando P está en el interior de $P_1P_2P_3$.

b. Dos de ellos positivos, y uno negativo. Por ejemplo, en la **Figura 2** es

$$A_{023} > 0\ ;\ A_{103} > 0\ ;\ A_{120} < 0$$

c. Uno de ellos positivo y dos negativos. Por ejemplo en la **Figura 3** es:

$$A_{023} < 0\ ;\ A_{103} > 0\ ;\ A_{120} < 0$$

Figura 2

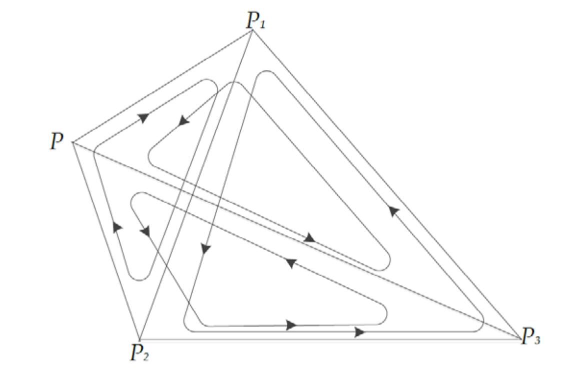
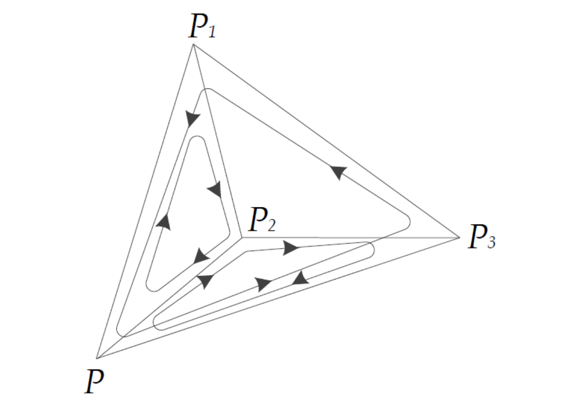


Figura 3



Los números A_{023}/A_{123}, A_{103}/A_{123} y A_{120}/A_{123} se llaman, en Geometría, las coordenadas trilineales del punto P referido al triángulo $P_1P_2P_3$.

También es muy fácil demostrar o comprobar que si en cualquiera de los tres números A_{023}, A_{103}, A_{120} se hace una permutación par de sus subíndices, dicho número no varía en valor absoluto ni en signo

$$\left.\begin{array}{c} A_{023} = A_{302} = A_{230} < 0 \quad ;\quad A_{103} = A_{310} = A_{031} > 0 \\ A_{120} = A_{012} = A_{201} < 0 \end{array}\right\} \qquad (3.13)$$

Pero si se hace una permutación impar, esos números cambian de signo:

$$\left.\begin{array}{c} A_{023} = -A_{203} = -A_{032} \quad ;\quad A_{103} = --A_{310} = A_{031} \\ A_{120} = -A_{012} = -A_{201} \end{array}\right\} \qquad (3.14)$$

Los signos de las áreas también pueden establecerse de acuerdo con las siguientes reglas:

a. El área A_{123} se tomará como positiva (aunque los vértices $P_1P_2P_3$ estén en sucesión dextrógira).

b. Cada área A_{oij} (donde *i,j* son una pareja sacada de la terna 1,2,3) tiene su signo así:

- Si $(P_oP_iP_j) \cap (P_1P_2P_3)$ no es vacía se pondrá: $sign\ A_{oij} = +1$
- Si $(P_oP_iP_j) \cap (P_1P_2P_3)$ sí es vacía se pondrá: $sign\ A_{oij} = -1$

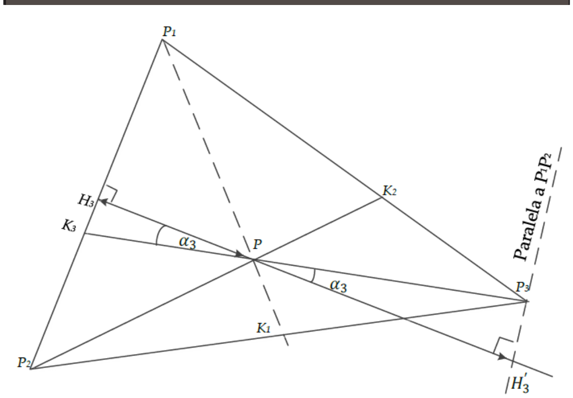
y esto sin importar el orden en que escribamos los tres subíndices.

Debe advertirse que cada área A_{ijk}

$$A_{ijk} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

conserva su valor algebraico y numérico, incluyendo el signo, cuando se hace una permutación par de los subíndices, y también cuando se hace una traslación paralela del sistema de coordenadas, y aun cuando este sistema de coordenadas gira en el plano. Estas propiedades se demuestran algebraicamente, y se comprueban por mera observación geométrica.

Figura 4



En la **Figura 4** puede advertirse de inmediato que, por la semejanza de los triángulos, se puede escribir que

$$\frac{A_{012}}{A_{312}} = \frac{0.5 \times P_1P_2 \times H_3P}{0.5 \times P_1P_2 \times H_3P_3} = \frac{\overline{H_3P}}{\overline{H_3P_3}} = \frac{\overline{k_3P}}{\overline{k_3P_3}}$$

y, de manera similar:

$A_{023}/A_{123} = \overline{k_1P} \,/\, \overline{k_1P_1} =$ coordenada trilineal de P en la dirección z_1

$A_{031}/A_{123} = \overline{k_2P} \,/\, \overline{k_2P_2} =$ coordenada trilineal de P en la dirección z_2

4. En resumen tenemos el siguiente Teorema: Por los tres puntos

$$Q_1(x_1, y_1, z_1)\ ,\ Q(x_2, y_2, z_2)\ ,\ Q(x_3, y_3, z_3)$$

dados en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, cuyas proyecciones en el plano OXY son

$$P_1(x_1,y_1) \quad , \quad P_2(x_2,y_2) \quad , \quad P_3(x_3,y_3)$$

y cuyas coordenadas no anulan el determinante (3.04)

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

por esos tres puntos Q_1, Q_2, Q_3 pasa un plano único de $\mathbb{R}^3$, cuya ecuación es de primer grado en x y de primer grado en y, y que se puede escribir en la forma (3.10)

$$z(x,y) = \frac{A_{023}}{A_{123}} z_1 + \frac{A_{103}}{A_{123}} z_2 + \frac{A_{120}}{A_{123}} z_3 \qquad (4.01)$$

en donde:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{123}: & \text{Área del triángulo referencial } P_1P_2P_3\text{, que consideramos positivo} \\ P(x,y): & \text{Punto genérico de } OXY \text{ que es proyección del punto genérico } Q(x,y,z)\text{, el que recorre el plano que describimos} \\ A_{102}: & \text{Área del triángulo } P_0P_1P_2\text{, con signo dado por (3.13) y (3.14)} \\ A_{103}: & \text{Área del triángulo } P_0P_1P_2\text{, con signo dado por (3.13) y (3.14)} \\ A_{120}: & \text{Área del triángulo } P_0P_1P_2\text{, con signo dado por (3.13) y (3.14)} \\ \multicolumn{2}{l}{A_{123} = A_{012} + A_{103} + A_{120}} \end{array}\right\} \quad (4.02)$$

Dicha ecuación puede escribirse también

$$z(x,y)=\frac{\overline{k_1P}}{\overline{k_1P_1}}\,z_1+\frac{\overline{k_2P}}{\overline{k_2P_2}}\,z_2+\frac{\overline{k_3P}}{\overline{k_3P_3}}\,z_3 \qquad (4.03)$$

donde los segmentos $\overline{k_1P}$, $\overline{k_2P}$, $\overline{k_3P}$ llevan signo "más" o signo "menos" según las convenciones (3.13) y (3.14).

Si en la ecuación

$$z(x,y)=\frac{A_{023}}{A_{123}}\,z_1+\frac{A_{103}}{A_{123}}\,z_2+\frac{A_{120}}{A_{123}}z_2 \qquad (4.01\text{ B})$$

se mueve el punto $P(x, y)$ para que coincida con $P_1(x, y)$, se puede ver que la **Figura 3** y la fórmula (3.03) dicen que cuando

$P(x, y) \rightarrow P_1(x_1, y_1)$ entonces $\quad A_{023} \rightarrow A_{123}$

$$A_{103} = A_{031} \rightarrow 0$$

$$A_{120} = A_{012} \rightarrow 0$$

y que, en consecuencia, cuando P llega a coincidir con $P_{1,}$ la **Ecuación 3.10.B** se reduce a la identidad

$$z(x, y) = z_1$$

tal como se requería desde el principio.

Por consideraciones análogas podemos llegar a verificar que

$$z(x_2, y_2) = z_2 \qquad \text{y que} \qquad z(x_3, y_3) = z_3$$

Es bien sabido que las tres medianas del triángulo $P_1P_2P_3$ se cortan en un mismo punto situado a los 2/3 de sus longitudes, medidas desde los vértices respectivos. Ese punto coincide con el centro de gravedad G del triángulo, y determina con los vértices tres triángulos que son

$$z(x_G, y_G) = (z_1 + z_2 + z_3)/3$$

como es apenas obvio.

4. LA FÓRMULA DE LAGRANGE PARA CUATRO PUNTOS DEL PLANO

5. Tratamos ahora del caso de 4 puntos distintos, arbitrarios, fijos en el plano $\mathbb{R}^2$, con coordenadas cartesianas conocidas:

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_2, y_3), P_4(x_4, y_4)$$

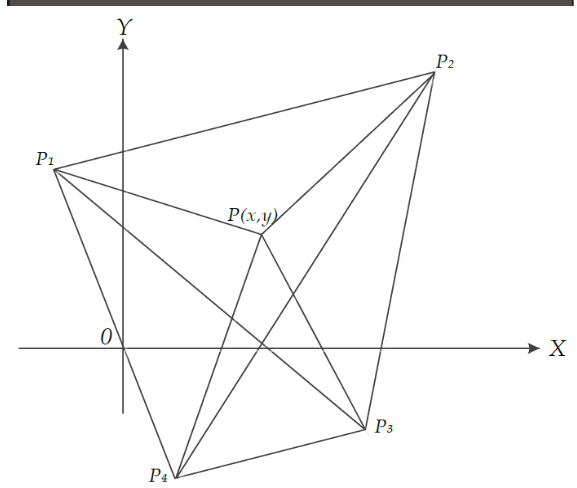
como los mostramos en la figura anexa. Así mismo, en esa región del plano hay una función continua y diferenciable $f(x, y)$, que en esos puntos adopta los cuatro valores

$$f(x_1, y_1) = z_1 \;\; ; \;\; f(x_2, y_2) = z_2 \;\; ; \;\; f(x_3, y_3)$$

$$= z_3 \;\; ; \;\; f(x_4, y_4)$$

Tenemos luego un punto variable, arbitrario en el mismo plano OXY, que llamaremos $P(x, y)$.

Figura 5



Consideremos todos los triángulos que pueden formarse con los *4* puntos dados, y que tengan un vértice en P_1. El número de tales triángulos es el mismo de las combinaciones de los 4-1 puntos, distintos de P_1, tomados dos a dos (sin importar el orden), el cual es

$$\binom{4-1}{2} = 3$$

Construyamos los triángulos que se forman con vértice en P, en P_1 y en los distintos pares de los otros vértices P_2, P_3, P_4. Las áreas de estos triángulos las denominaremos, como ya lo hicimos arriba, como:

A_{132} = Área del triángulo $P_1P_2P_3$ (que tomamos con signo positivo)

A_{142} = Área del triángulo $P_1P_2P_4$ (que tomamos con signo positivo)

A_{1ij}= Área del triángulo $P_1P_iP_j$ (que tomamos con signo positivo)

A_{032} = Área del triángulo PP_3P_2 (que tiene signo positivo)

y, en general,

A_{oij} = Área del triángulo PP_iP_j (que es positiva) si el orden de sus vértices es levógiro, y será negativa si ese orden es dextrógiro.

Guiándonos por las ideas de Lagrange, construyamos la expresión:

$$\begin{aligned} p(x,y) \equiv\ & z_1 \frac{A_{023}}{A_{123}}\frac{A_{034}}{A_{134}}\frac{A_{024}}{A_{124}} \\ & + z_2 \frac{A_{034}}{A_{234}}\frac{A_{041}}{A_{241}}\frac{A_{031}}{A_{231}} \\ & + z_3 \frac{A_{041}}{A_{341}}\frac{A_{012}}{A_{312}}\frac{A_{024}}{A_{342}} \\ & + z_4 \frac{A_{012}}{A_{412}}\frac{A_{023}}{A_{423}}\frac{A_{013}}{A_{413}} \end{aligned} \tag{5.01}$$

la que también podemos escribir, de manera resumida, como

$$p(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{i=N} z_1 \prod_{(j,k)}^{3} \frac{A_{ojk}}{A_{ijk}} \tag{5.02}$$

en donde (i, j, k) es una de las tres ternas que puede extraerse de la cuaterna (1,2,3,4). Por esto último, y por definición, debe ser $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$. El número de factores que hay a la derecha de la productoria ($\prod$) es $\binom{4-1}{2}$ =3. La fórmula (5.01), que hemos resumido en la forma (5.02) la llamaremos la fórmula de interpolación de Lagrange para cuatro puntos en las dos dimensiones OX, OY.

Además, como ya lo habíamos dicho:

$$A_{ijk} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} ; \quad A_{ojk} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \tag{5.03}$$

Estas expresiones muestran que los números A_{ijk} son parámetros que quedan determinados por los cuatro puntos P_1, P_2, P_3, P_4. De estos parámetros hay

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

Ellos están escritos en los denominadores de la expresión (4.01).

Por otra parte, para cada valor fijo del índice i, el número de factores A_{ojk} es

$$\binom{4-1}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

y es así como, efectivamente, a cada z_i lo acompañan, multiplicándolo, tres factores A_{ojk}. Y algo más: las ecuaciones (5.03) muestran que cada factor A_{ojk} es un trinomio en x, y, bilineal y no homogéneo, es decir que tiene la forma

$$A_{ojk} = a_{jk}\,x + b_{jk}\,y + c_{jk}$$

Por lo tanto, el producto de tres de ellos es un polinomio de tercer grado en x, y, o sea, que es de la forma

$$\begin{aligned} p(x,y) =\ & \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 + \\ & + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{o2}y^2 + \alpha_{10}x + \alpha_{o1}y + \alpha_{oo} \end{aligned} \tag{5.04}$$

Por eso la expresión (5.01) es un polinomio de tercer grado en x y de tercer grado en y, que puede tener hasta 10 coeficientes numéricos.

Para calcular qué valores toma la expresión en los cuatro puntos referenciales dados (P_1, P_2, P_3, P_4), observemos que cuando P tiende a P_k, o a P_j el parámetro A_{ojk} tiende a cero, porque

$$A_{jjk} = 0 \qquad A_{kjk} \tag{5.05}$$

En consecuencia, cuando ponemos a $P(x, y)$ a coincidir con $P_1(x_1, y_1)$, el polinomio (5.01) adopta la forma

$$p(x_1, y_1) = z_1 \tag{5.06.1}$$

Las mismas consideraciones llevan a encontrar que

$$p(x_2, y_2) = z_2 \qquad (5.06.2)$$

$$p(x_3, y_3) = z_3 \qquad (5.06.3)$$

$$p(x_4, y_4) = z_4 \qquad (5.06.4)$$

Ello significa que el polinomio (5.04), que contiene hasta diez coeficientes, pasa por los cuatro puntos $Q_1(x_1, y_1, z_1)$, $Q_2(x_1, y_1, z_1)$, $Q_3(x_3, y_3, z_3)$, $Q_4(x_4, y_4, z_4)$, situados en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Las proyecciones de esos puntos son $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$.

Así pues, $p(x, y)$ satisface los 4 puntos dados. Pero ya no podemos decir que es el polinomio de tercer grado que pasa por tales puntos.

6. No sobra recordar que el polinomio en x, y, de los cuatro puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, que además es isotrópico en ambas variables, es

$$f_{11}(x, y) = \beta_{11}xy + \beta_{10}x + \beta_{01}y + \beta_{00} \qquad (6.01)$$

puesto que sus cuatro coeficientes β_{ij} están definidos unívocamente por las cuatro condiciones

$$\left.\begin{aligned} \beta_{11}x_1y_1 + \beta_{10}x_1 + \beta_{01}y_1 + \beta_{00} &= z_1 \\ \beta_{11}x_2y_2 + \beta_{10}x_2 + \beta_{01}y_2 + \beta_{00} &= z_2 \\ \beta_{11}x_3y_3 + \beta_{10}x_3 + \beta_{01}y_3 + \beta_{00} &= z_3 \\ \beta_{11}x_4y_4 + \beta_{10}x_4 + \beta_{01}y_4 + \beta_{00} &= z_4 \end{aligned}\right\} \qquad (6.02)$$

También es sabido que el polinomio (5.01) está definido, de manera implícita pero unívoca, por la ecuación

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x,y) & xy & x & y & 1 \\ z_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ z_2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ z_3 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ z_4 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.03)$$

cuyo determinante se suele llamar determinante de Vandermonde.

Existe también un único polinomio de colocación (con cuatro coeficientes) para los cuatro puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 que tenga la forma cuadrática en x y lineal en y.

$$f_{20}(x, y) = \gamma_{20}x^2 + \gamma_{10}x + \gamma_{01}\,y + \gamma_{00} \qquad (6.04)$$

pero que es anisotrópico.

Este queda determinado unívocamente por cuatro ecuaciones análogas a las ecuaciones (5.02) o por una ecuación de Vandermonde análoga a la **Ecuación 6.03**, salvo que la columna en $x\,y$ se cambia por una columna en x^2.

Existe otro polinomio

$$f_{02}(x, y) = \delta_{02}\,y^2 + \delta_{01}\,y + \delta_{10}x + \delta_{00} \qquad (6.05)$$

Lineal en x y cuadrático en y, anisotrópico, que está unívocamente determinado por otras cuatro condiciones de la forma de las ecuaciones (5.02), y dado implícita y unívocamente por otra ecuación de Vandermonde de forma semejante a la (5.03), pero donde la columna en xy se cambia por una columna en y^2.

7. Volviendo ahora a la función $f(x, y)$ que presentamos al comienzo del numeral 5, es ahora claro que podemos escribirla en la forma

$$f(x, y) = p(x, y) + \emptyset\,(x) \prod A_{ohk} \qquad (7.01)$$

en donde (h, k) es una de la seis parejas que pueden extraerse de la cuaterna (1,2,3,4). En la expresión anterior, estamos escribiendo el error de interpolación $\varepsilon(x, y)$ como

$$\varepsilon(x, y) = \emptyset(x) \cdot A_{023}(x, y) \cdot A_{034}(x, y) \cdot A_{024}(x, y) \cdot A_{041}(x, y) \cdot A_{031}(x, y) \cdot A_{012}(x, y)$$

debido a que esta última expresión cumple las condiciones exigidas de que

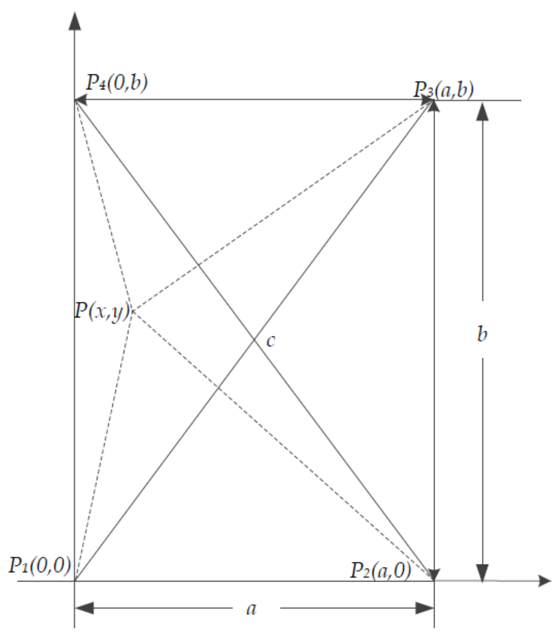
$$f(x_1, y_1) = p(x_1, y_1) = z_1 \;\; ; \;\; f(x_2, y_2) = p(x_2, y_2) = z_2$$
$$f(x_3, p_3 = p(x_3, y_3) = z_3 \;\; ; \;\; f(x_4, y_4) = p(x_4, y_4) = z_4$$

8. Un ejemplo. Consideremos, como ejemplo de lo anterior una función $f(x, y)$, definida en una región del plano que contiene los cuatro puntos

$$P_1(0{,}0) \;\; , \;\; P_2(a{,}0) \;\; , \;\; P_3(a, b) \;\; , \;\; P_4(0{,}b)$$

que se muestra en la figura anexa.

Figura 6



Consideremos también un punto $P(x, y)$ contenido en esa misma región, y construyamos la Fórmula de Lagrange para interpolar una función $f(x, y)$ cuyos valores en los cuatro puntos P_1, P_2, P_3, P_4, son, respectivamente

$$f(0,0)=z \;,\; f(a,0)=z_2 \;,\; f(a,b)=z_3 \;,\; f(0,b)=z_4 \qquad (8.01)$$

Hacemos la triangulación que se necesita para la fórmula (5.01), del modo como se ve en la figura vecina. Y calculamos las áreas de esos triángulos, las cuales son casi evidentes

$$A_{123}=ab/2 \quad A_{134}=ab/2 \quad A_{124}=ab/2$$

$$\begin{gathered} A_{023}=b\,(a-x)/2 \quad A_{034}=a\,(b-y)/2 \\ A_{024}=b[a(b-y)/b-x]=A_{042} \end{gathered} \qquad (8.02)$$

$$\begin{gathered} A_{041}=bx/2 \quad A_{013}=-A_{031}=b(ay/b-x) \\ A_{012}=ay/2 \end{gathered}$$

Pero, como ya se vio:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= z_1\frac{A_{023}}{A_{123}}\frac{A_{034}}{A_{134}}\frac{A_{024}}{A_{124}}+z_2\frac{A_{034}}{A_{234}}\frac{A_{041}}{A_{241}}\frac{A_{031}}{A_{231}}+ \\ &+z_3\frac{A_{041}}{A_{341}}\frac{A_{012}}{A_{312}}\frac{A_{042}}{A_{342}}+z_4\frac{A_{012}}{A_{412}}\frac{A_{023}}{A_{423}}\frac{A_{013}}{A_{413}} \end{aligned} \qquad (8.03)$$

Sustituyendo los valores de las áreas (con su correspondiente signo "más" o signo "menos"), se tiene:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= z_1\frac{b(a-x)}{ab}\frac{a(b-y)}{ab}\frac{b[a(b-y)/b-x]}{ab} \\ &+z_2\frac{a(b-y)}{ab}\frac{bx}{ab}(-1)\frac{b(ay/b-x)}{ab} \\ &+z_3\frac{bx}{ab}\frac{ay}{ab}(-1)\frac{b[a(b-y)/b-x]}{ab}+z_4\frac{ay}{ab} \\ &\quad\frac{b(a-x)}{ab}\quad\frac{b(ay/b-x)}{ab} \end{aligned} \qquad (8.04)$$

Haciendo las operaciones indicadas, simplificando numeradores con denominadores, y reduciendo términos semejantes, se encuentra:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= (1/a^2b)\,[x^2\;y\,(-z_1-z_2+z_3+z_4)- \\ &(a/b)\;xy^2(z_1-z_2-z_3+z_4)+ \\ &+bx^2(z_1+z_2)+axy(3z_1-z_2-z_3-z_4)+ \\ &(a^2/b)\,y^2\;(z_1+z_4)- \\ &-2abxz_1\;-2a^2yz_1\;+a^2bz_1] \end{aligned} \qquad (8.05)$$

Este polinomio tiene ocho términos, con sus respectivos coeficientes, en

$$x^2y,\ xy^2,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x,\ y,\ x^0y^0$$

Es, por lo tanto, un polinomio isotrópico.

La fórmula (5.01) permite escribir:

$p(x,b)=z_3(x/a)^2+z_4(1-x/a)^2$,	sobre el lado P_3P_4
$p(0,y)=z_1(1-y/b)^2+z_4(y/b)^2$,	sobre el lado P_4P_1
$p(x,bx/a)=z_1(1-a/x)^2(1-2x/a)+z_3x^2(2x/a-1)$,	sobre la diagonal P_1P_2

En el centro del rectángulo es $x=a/2$, y $b/2$ y resulta $p(a/2,b/2)=0$

Que en el centro del rectángulo el polinomio interpolador de Lagrange se anula.

9. Otra fórmula para el rectángulo P_1, P_2, P_3, P_4. Una fórmula de interpolación unívocamente determinada por los cuatro vértices de cualquier cuadrilátero debe tener cuatro coeficientes. Ella podría ser de la forma

$$z = c_{00} + c_{10} \cdot x + c_{01} \cdot y + c_{11} \cdot xy$$

si pedimos que la interpolación sea isotrópica, es decir, que no le atribuya potencias a una de las dos variables que la otra no tenga en la fórmula. Se tiene así, como ya se explicó, el determinante de Vandermonde.

$$\begin{vmatrix} z(x,y) & 1 & x & y & xy \\ z_1 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ z_2 & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ z_3 & 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ z_4 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix} = 0$$

Fácilmente se calcula que $p(x, y)$ reproduce los valores de $f(x, y)$ en las cuatro esquinas del rectángulo de la figura. En efecto: sustituyendo las coordenadas correspondientes en la fórmula (8.04) o en su forma equivalente (8.05), y haciendo las operaciones algebraicas indicadas se encuentra que

$$p(0,0) = z_1 = f(0,0) \quad p(a,0) = z_2 = f(a,0)$$
$$p(a,b) = z_3 = f(a,b) \quad p(0,b) = z_4 = f(0,b)$$

Sobre los puntos del perímetro y sobre las diagonales se tiene:

$a)$ en P_1P_2: $y = 0$; $b)$ en P_2P_3: $x = a$;
$c)$ en P_3P_4: $y = b$; $d)$ en P_4P_1: $x = 0$
$e)$ en P_1P_3; $y = bx/a$ $f)$ en P_2P_4 : $y = b(1 - x/a)$

Por lo tanto, la fórmula de interpolación (8.04) adopta las siguientes expresiones:

$p(a, 0) = z_1(1 - x/a)^2 + z_2(x/a)^2$, sobre el lado P_1P_2

$p(a, y) = z_2(1 - y/b)^2 + z_3(y/b)^2$, sobre el lado P_2P_3

5. LA FÓRMULA DE LAGRANGE EN VARIAS DIMENSIONES

En el estudio de muchos temas y problemas de Geografía, Meteorología, Economía, Demografía y otras ciencias del mundo real, surge la situación en que se conocen varios datos (en general, m datos) para cada uno de N puntos, puntos en los cuales una variable u, que depende de aquellos datos, toma valores conocidos; y se trata de determinar el valor que tiene u en otro punto —distinto de los ya conocidos— a partir de sus valores en los puntos conocidos. Por ejemplo: sería el caso de un geógrafo que estudia la distribución de temperaturas ambientes en un país, y dispone del valor de dicha temperatura en diez lugares ($N = 10$), y para cada lugar conoce cinco datos ($m = 5$) de los cuales depende su temperatura: la latitud, la altura sobre el nivel del mar, la humedad relativa, la pluviosidad y la insolación.

El problema del geógrafo consistiría en determinar mediante cálculo numérico la temperatura media anual en otro lugar de ese país, distinto de las ciudades mencionadas.

En este trabajo se expone un método para construir una versión de la fórmula de Lagrange en un espacio de varias dimensiones (sea, en general, de m dimensiones) y para emplearla en el cálculo numérico con variables reales.

Para decirlo formalmente: se tienen N puntos en un espacio $\mathbb{R}^m$ formado por m variables reales $x^1, x^2, \ldots, x^m$. Tales puntos son $P_1(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^m)$, … $P_i\ (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^m)$, … , $P_N(x_N^1, x_N^2, \ldots, x_N^m)$ y pertenecen a un espacio que está dotado de la métrica euclidiana usual. En esos puntos y en una región D continua y compacta que los contiene, está definida una función

$$u(x^1, x^2, \ldots, x^m)$$

que es continua y diferenciable, y que adopta los N valores numéricos (conocidos).

$$u_i = u(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m) \text{ para } i\epsilon\{1,2, \dots, N\}$$

En el espacio $\mathbb{R}^m$ se llama "simplex topológico" a un hiper-triángulo (o hiperpoliedro) de m dimensiones, convexo, que tiene $m+1$ vértices y $m+1$ hiper-caras (hiper-planos). Por ejemplo: en el espacio tridimensional euclidiano usual, es $m=3$ y un simplex en él, es un tetraedro (regular o no).

Con los N puntos $P_1, P_2, \dots, P_N$ como vértices, es posible construir un número (cardinal) de simplex-es

$$\binom{N}{m+1} = N!/(m+1)!\,(N-m-1)! = \mu(N,\ m)$$

supuesto, desde luego, que $N > m$.

Además, dado de uno de los puntos P_i (cualquiera pero fijo), es posible construir a partir de él un número de simplex-es

$$\binom{N-1}{m} = (N-1)!/m! \quad (N-1-m)! = v(N, m)$$

usando los $N-1$ puntos restantes como vértices de estos simplex-es

Nota. Dividiendo μ/v resulta $\mu/v = N/(m+1)$; y puesto que $N \geq m+1$, resulta que $\mu \geq v$.

Cada uno de estos últimos simplex-es se identifica por medio de sus vértices en la forma

$$P_1 P_{ji1}\ P_{ji2}\ \dots P_{jim} \quad \text{siendo cada } jih \neq i$$

y a su hiper-volumen euclidiano se le representará como

$$V(P_i P_{ji1}\ \dots P_{jim})$$

en donde $ji1, ji2, \dots, jim$ es una permutación ordenada que se extrae de la sucesión ordenada

$$\{1,2, \dots, i-1, i+1, \dots, N\}$$

en la que se ha suprimido, precisamente, el subíndice "i" de P_i.

La Geometría Analítica multidimensional enseña que

$$V(P_i P_{ji1} \dots P_{jim}) = \frac{1}{m!}\begin{vmatrix} x_i^1 & x_i^2 & \dots & x_i^m & 1 \\ x_{ji1}^1 & x_{ji1}^2 & \dots & x_{ji1}^m & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{jim}^1 & x_{jim}^2 & \dots & x_{jim}^m & 1 \end{vmatrix}$$

cuyo determinante es de orden $(m+1) \times (m+1)$. En cada caso particular este determinante puede resultar positivo o negativo, pero nunca será nulo. Es decir: $V(P_j P_{ji1} \dots P_{jim}) \gtrless 0$, pero siempre $V \neq 0$.

Para interpolar la variable u en un punto

$$P(x^1, x^2, \dots, x^m)$$

de $\mathbb{R}^m$, distinto de los puntos P_i la función $u(x^1, x^2, \dots x^m)$ se puede estimar usando el polinomio de colocación

$$u(x^1, \dots x^m) \simeq \sum\prod \frac{V(P\, P_{ji1} \dots P_{jim})}{V(P_i P_{ji1} \dots P_{jim})} u_i = p(x^1, x^2, \dots, x^m)$$

Esta es la fórmula general para interpolar la función, que se buscaba. Se le puede llamar la fórmula de Lagrange en m dimensiones (o en $\mathbb{R}^m$). El polinomio $p(x', \dots x^m)$ es una función algebraica, no homogénea, de grado $N-1$ (o menos, en ciertos casos excepcionales).

En rigor, la fórmula anterior debe escribirse como

$$u(x^1, \dots, x^m) = p(x', \dots x^m) + \epsilon(x', \dots, x^m)$$

donde $\epsilon(x', \dots, x^m)$ es el error de interpolación es de la forma:

$$\epsilon(x', \dots, x^m) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{ji_m, \dots j_{im}}^{v} [V(P_i P_{ji1} \dots P_{jim}) - V(P\, P_{ji1} \dots P_{jim}] \emptyset(P)/N!$$

expresión que tiene rápidamente a cero cuando N aumenta, o sea, cuando se toman más y más puntos como base para hacer la interpolación.

6. UN EJEMPLO ELEMENTAL EN $\mathbb{R}^2$

Se tienen los cuatro puntos conocidos en el plano $\mathbb{R}^2$, dados por las coordenadas

$$P_1(0,0) \qquad P_2(a,0)$$

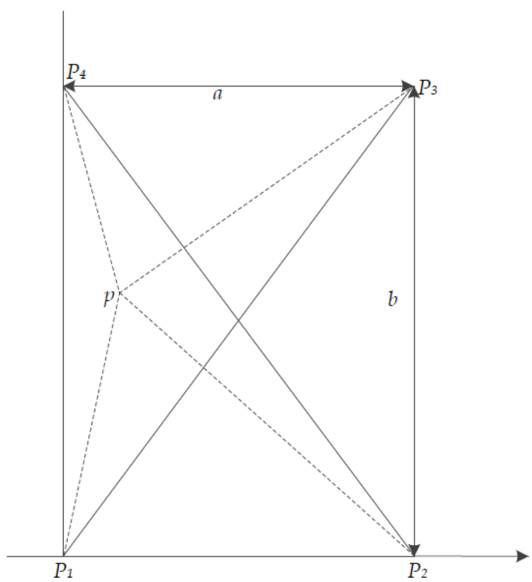
$$P_3(a,b) \qquad P_4(0,b)$$

y se sabe que una variable continua en todo el plano (por ejemplo, una temperatura, una cota topográfica, una densidad de población, etc.) toma en dichos puntos los valores conocidos

$$z_1 \qquad z_2$$

$$z_3 \qquad z_4$$

Figura 7



Se trata de valorar a z en el punto

$$P(x,y)$$

En este caso ($\mathbb{R}^2$, $m = 2$) los simplex-es que son necesarios y suficientes para calcular z en P, son cuatro triángulos

$P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4$, $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_1$

cuyas áreas miden:

$$A_{123}=ab/2 \ , \ A_{234}=ab/2 \ , \ A_{341}=ab/2 \ , \ A_{412}=ab/2$$

(Estas áreas corresponden a lo que en la sección anterior se designaron como "hipervolúmenes" y los cuatro (triángulos) son simplex-es en el plano).

Desde el punto $P(x,y)$ se pueden formar con el polígono $P_1P_2P_3P_4$ cuatro triángulos (que son simplex-es en $\mathbb{R}^2$), cuyas áreas son:

$$A_{012} = a \cdot y/2 \qquad A_{023} = b(a-x)/2$$

$$A_{034} = a(b-y)2 \qquad A_{041} = b\,x)/2$$

Entonces el polinomio de colocación es

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{i=4} \prod_{\substack{j \neq i \\ k \neq i}} \frac{A_{0jk}}{ijk} =$$

$$= z_1 \frac{A_{023}}{A_{123}} \frac{A_{034}}{A_{134}} + z_2 \frac{A_{034}}{A_{234}} \frac{A_{041}}{A_{241}} + z_3 \frac{A_{041}}{A_{341}} \frac{A_{012}}{A_{312}} + z_4 \frac{A_{012}}{A_{412}} \frac{A_{023}}{A_{423}}$$

y la fórmula para interpolar valores de z en puntos del rectángulo en el dibujo, es:

$$z(x,y) \simeq p(x,y) = \frac{1}{ab}[z_1(b-y)(a-x)+z_2x(b-y)+z_3xy+z_4(a-x)y]$$

es decir, una combinación convexa de los cuatro valores z_1, z_2, z_3, z_4.

7. ALGORITMO DE CÁLCULO

El procedimiento para calcular valores interpolados en una región de un espacio real de varias dimensiones ($\mathbb{R}^m$) puede seguir el siguiente algoritmo.

Se considera el problema en un espacio de m dimensiones, donde se tienen

a. N puntos P_1, P_2, … , P_N, de coordenadas conocidas.

b. los N valores numéricos que tiene una variable u en esos puntos, y que son: $u_1, \ldots, u_N$ respectivamente.

Y se trata de calcular el valor que adopta (aproximado, o exacto) la variable u en un punto P distinto de los N puntos dados.

Procedimiento:

1. Anotar las $N \times m$ coordenadas numéricas de los puntos P_i:

$x^1, x_1^2, \dots x_1^m; x_2^1, x_2^2, \dots; x_2^m; \dots; x_N^1, x_N^2, \dots, x_N^m$

de los N puntos. Son datos conocidos.

2. Anotar los N valores (también conocidos)

$$u_1, u_2, \dots, u_N$$

3. Tomar P_1 y formar los $\binom{N-1}{m} = v$, cuerpos simplex-es, de dimensión m, que se pueden construir con los restantes $N-1$ puntos. Se les denominará $(P_1 P_{j11} P_{12} \dots P_{jm1}), \dots, (P_1 P_{j11} P_{12}, \dots, P_{j1m})$, donde los subíndices $j_{1_K} \neq 1$ y cada uno adopta los valores que hay en la colección $\{1,2, \dots, N\}$ omitiendo el valor 1.

4. Calcular los respectivos hipervolúmenes usando el determinante que se presentó más arriba.

5. Formar y calcular numéricamente los v cuocientes

$$V(PP_{j11} \dots P_{j1m}) \div V(P_1 P_{j11} \dots P_{j1m})$$

y multiplicarlos entre sí. El resultado numérico es q_1.

6. Tomar sucesiva y ordenadamente a P_2, P_3, ..., P_N y hacerle a cada uno los tres pasos, 3, 4 y 5. Los resultados respectivos son $q_2, q_3, \dots, q_N$.

7. Construir y calcular numéricamente la suma

$$q_1 u_1 + q_2 u_2 + \cdots + q_N u_N$$

8. El valor interpolado que se busca es

$$u(P) \cong q_1 u_1 + \cdots + q_N u_N$$

8. CONCLUSIONES

- El problema de interpolar valores numéricos en funciones tabuladas en regiones de dos o más variables sigue siendo un problema relevante, a pesar de la disponibilidad actual de calculadoras manuales y de computadores de alta velocidad.

- En la literatura usual sobre Análisis Numérico no se presentan algoritmos que puedan usarse para este propósito, al contrario de lo que ocurre con funciones de una sola variable, para las cuales hay numerosas fórmulas de interpolación, como la fórmula de Lagrange que se rememora en este documento.

- La fórmula de Lagrange en 1 dimensión se usa para calcular o para estimar valores $p(x)$ de una función de 1 variable independiente, cuyos valores numéricos se conocen en varios puntos de x, y que son $u(x_1), u(x_2), \dots, (x_N)$. La fórmula expresa a $f(x)$ en un valor de x distinto de los conocidos, como

$$p(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_N)}{(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-N})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_N)} u(x_i)$$

donde los valores de $u(x_i)$ son obtenidos mediante una fórmula explícita computable, o son mediciones empíricas observadas.

- En el caso del plano $\mathbb{R}^2$, si se tienen los valores z_1, z_2, z_3 y z_4 de una variable dependiente (o valores observados empíricamente) en puntos P_1, P_2, P_3, P_4, una función de esa misma variable en otro punto $z(x, y)$ distinto de los conocidos, con la fórmula deducida aquí, se puede estimar por

$$z(x, y) = z_1 \frac{A_{023} \cdot A_{034}}{A_{123} \cdot A_{134}} + z_2 \frac{A_{034} \cdot A_{041}}{A_{234} \cdot A_{241}} + z_3 \frac{A_{041} \cdot A_{012}}{A_{341} \cdot A_{312}} + z_4 \frac{A_{012} \cdot A_{023}}{A_{412} \cdot A_{423}}$$

donde cada A_{ijk} es el área positivamente orientada del triángulo $P_i P_j P_k$ que está dada por el determinante.

$$A_{ijk} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

- En el caso de N puntos $P_1, P_2, \dots, P_N$ de coordenadas conocidas, en un espacio $\mathbb{R}^m$ de m dimensiones, abarcado por una variable continua, u, dependiente de m variables y cuyos valores numéricos

$$u_1 = u(P_1), u_2 = u(P_2), \dots, u_N = u(P_N)$$

se puede calcular o estimar el valor de u en su punto p vecino a los conocidos mediante la fórmula

$$u(P) = q_1 \cdot u_1 + q_2 \cdot u_2 + \cdots + q_N u_N$$

en donde

$$q_h = \prod_{k=1}^{v} \frac{V(0, j_1, \dots, j_m)}{V(h, j_1, \dots, j_m)}$$

y $V(0, j_1, \dots, j_m)$ es el volumen de un simplex (de dimensión m) formado por el punto P_h donde se está estimando y una combinación de m puntos tomados de los N puntos conocidos. Hay $\binom{N}{m} = v$ de estas combinaciones. Cada simplex es de dimensión m y tiene $m+1$ vértices y $m+1$ caras.

- El volumen de cada simplex V_k mencionado, formado por los puntos P_k, P_{j1}, … , P_{jm} y siendo x_{i1}, x_{i2}, … , x_{im} las coordenadas (o componentes) de cada punto P_i, está dado por el determinante

$$\frac{1}{m!} \begin{vmatrix} x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{km} & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} & 1 \end{vmatrix}$$

REFERENCIAS

Mineur, H. (1952). Techniques de Calcul Numérique. Paris. Librairie Polytechnique Ch. Béranger. 605 p.

Scarborough, J. B. (1966). Numerical Mathematical Analysis. Baltimore. The John Hopkins Press. 600 p.

PARA CITAR ESTE ARTÍCULO /
TO REFERENCE THIS ARTICLE /
PARA CITAR ESTE ARTIGO /

Poveda Ramos, G. (2016). La interpolación de Lagrange en el espacio $\mathbb{R}^m$. *Revista EIA*, 13(25), enero-junio, pp. 29-44. [Online]. Disponible en: DOI: http:/dx.doi.org/10.14508/reia.2016.13.25.29-44