

## UNA FÓRMULA DE CUBICACIÓN SOBRE EL PLANO

GABRIEL POVEDA RAMOS<sup>1</sup>

### RESUMEN

Se deducen fórmulas para calcular con aproximación acotada, fórmulas que permiten valorar numéricamente integrales dobles e integrales triples sobre superficies bidimensionales planas, mediante mediciones de los valores de la función integrando, tomadas en una retícula cuadrículada que se trace en el plano. El método es análogo al que se usa para deducir la fórmula de Simpson para una integral simple.

**PALABRAS CLAVE:** Análisis Numérico; Integración numérica; Cálculo Integral.

### A FORMULA FOR CUBIC MEASUREMENT ON A PLANE

### ABSTRACT

Formulas are derived to calculate with acute approximation, formulas that allow numerical evaluation of double integrals and triple integrals on flat two-dimensional surfaces, by means of measurements of the integrating function values, taken in a grid that is plotted in the plane. The method is analogous to that used to derive Simpson's formula for a simple integral.

**KEYWORDS:** Numerical Analysis; Numerical integration; Integral calculus.

### UMA FÓRMULA DO CUBO SOBRE O PLANO

### RESUMO

Deduzem-se fórmulas para calcular com aproximação limitada, fórmulas que permitem avaliar numericamente integrais duplas e integrais triplos sobre superfícies bidimensionais planas, através de medições dos valores da função integrando, tomadas em uma reticula quadriculada que se traça no plano. O método é análogo ao que se usa para deduzir a fórmula de Simpson para uma integral simples.

**PALAVRAS-CHAVE:** Análises Numérico; Integração numérica; Cálculo Integral.

---

<sup>1</sup> Ingeniero Químico, Ingeniero Electricista, Matemático. Doctor en Ingeniería



*Autor de correspondencia:* Poveda Ramos, G. (Gabriel).  
Correo electrónico: gapora@une.net.co.

*Historia del artículo:*

Artículo recibido: 01-IV-2015 / Aprobado: 11-VII-2016  
Disponible online: 30 de octubre de 2016  
Discusión abierta hasta octubre de 2017



1. Quienes estudian Cálculo integral o alguna de sus numerosas aplicaciones, conocen la fórmula de integración definida que se llama Fórmula de Simpson y que se usa para computar aproximadamente una integral definida en el caso de una función que está descrita por sus valores en puntos equidistantes. Como se recuerda la fórmula es

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx = (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n) \times (x_n - x_0) / 3n$$

en donde los símbolos tienen el significado que se aprecia en el dibujo N° 1, anexo. No sobra recordar dos rasgos característicos de esta fórmula:

1. El número de valores equidistantes que utiliza es: 0 3, o 5, o 7, ..., o, en general, un número impar de la forma  $n + 1$

2. La suma de los coeficientes de dichos términos es  $3n$

3. El número de intervalos entre dos ordenadas consecutivas  $(y_i, y_{i+1})$  es  $n$  y es par

4. La suma de dichos intervalos es  $x_n - x_0$

2. Es sorprendente que en la literatura didáctica matemática casi no se menciona el hecho evidente de que así como se deduce la fórmula de cuadratura de Simpson, así mismo puede deducirse una fórmula de cubicación para calcular (siquiera aproximadamente) el valor de integrales dobles definidas sobre una región  $R$  del plano, en dos variables, es decir, integrales de la forma

$$\iint_R f(x, y) dx \cdot dy \quad (2.1)$$

Una integral de esta forma expresa el volumen contenido entre la superficie  $z = f(x, y)$  y el plano determinado por los ejes cartesianos  $OX, OY$ , que son perpendiculares entre sí y perpendiculares a  $OZ$ . Por esta razón, una fórmula tal puede tener numerosas aplicaciones. Ejemplos de tales aplicaciones serían:

a. Calcular el volumen estancado en un embalse conociendo una cuadrícula de profundidades suficientemente fina.

b. Calcular el contenido de mineral de una colina, conociendo una cuadrícula horizontal de la misma, y los tenores de mineral de cada sondaje, hasta determinada profundidad.

Cabe anotar que los textos de Matemáticas que son usuales en nuestras escuelas, en general, casi nada se ocupan del tema de las fórmulas aproximadas de cubicación (o de cubatura), ni aun en buenos textos de Análisis Numérico. El propósito de esta nota es deducir una fórmula de cubicación "a la manera de la de Simpson" y mostrar cómo podría emplearse.

3. En primer lugar, considérese el problema de calcular el volumen comprendido entre una superficie cuádrica en dos variables y el plano de los dos ejes  $OX$  y  $OY$ .

Sea la superficie cuádrica

$$z(x, y) = a + b_1x + b_2x^2 + c_1y + c_2y^2 + dxy \quad (3.1)$$

en donde  $a, b_1, b_2, c_1, c_2, d$  son constantes reales tales que los coeficientes de los términos de segundo grado no son todos nulos, es decir, tales que

$$b_2^2 + c_2^2 + d^2 > 0 \quad (3.2)$$

Considérese, por otra parte, la región del plano  $OXY$  constituida por el cuadro  $R$  que se muestra en la **Figura 2**, y cuyos vértices son los cuatro puntos  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(-1,0)$  y  $(0,-1)$ . Su superficie mide, como es evidente, 2 unidades de área. Calculando la función  $z(x, y)$  en el centro del cuadrado y en sus cuatro esquinas, se obtiene

$$z(0,0) = z_0 = a$$

$$z(1,0) = z_1 = a + b_1 + b_2$$

$$z(0,1) = z_2 = a + c_1 + c_2$$

$$z(-1,0) = z_3 = a - b_1 + b_2$$

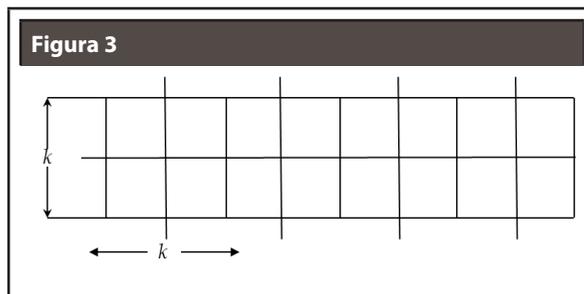
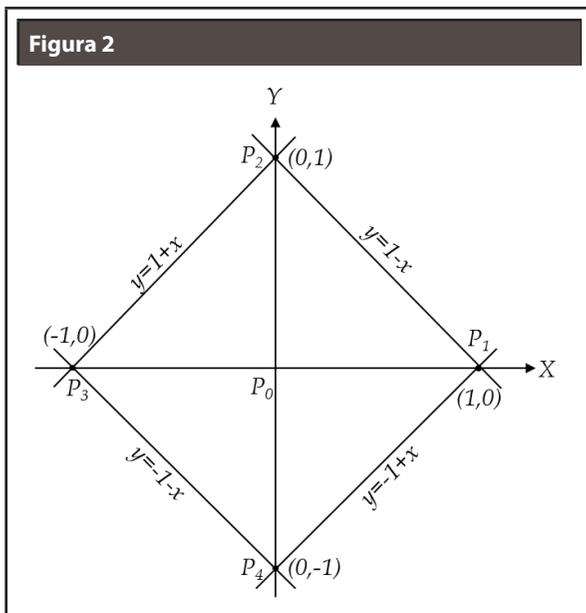
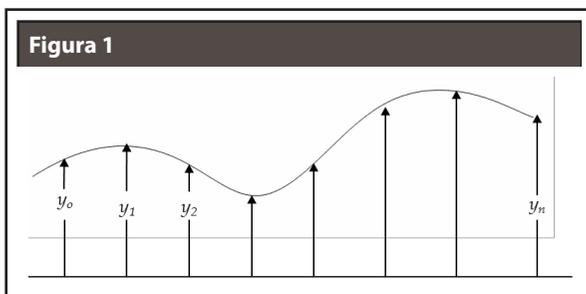
$$z(0, -1) = z_4 = a - c_1 + c_2$$

Invirtiendo este sistema se obtienen los coeficientes  $a, b_1, b_2, c_1, c_2$ , en términos de las cotas  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$  de la superficie  $z(x, y)$  sobre el plano  $OXY$ :

$$\begin{aligned}
 a &= z_0 \\
 b_1 &= (1/2) (z_1 - z_3) \\
 b_2 &= (1/2) (z_1 + z_3) - z_0 \\
 c_1 &= (1/2) (z_2 - z_4) \\
 c_2 &= (1/2) (z_2 + z_4) - z_0
 \end{aligned}$$

Así, los cinco coeficientes quedan determinados por los valores de  $z(x, y)$  en los cinco puntos indicados del cuadrado  $R$ , y la ecuación de la superficie cuádrica puede escribirse en forma de determinante como

$$\begin{vmatrix}
 1 & x & x^2 & y & y^2 & z \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & z_1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & z_2 \\
 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & z_3 \\
 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & z_4
 \end{vmatrix} = 0$$



4. El volumen que cubre  $z(x, y)$  sobre la región  $R$  (cuya área mide 2 unidades) es el integral

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R z(u, v) \, du \cdot dv = \\
 &= \iint_R (a + b_1 u + b_2 u^2 + c_1 v + c_2 v^2) \, du \cdot dv
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

El valor de estas integrales se puede calcular término a término:

$$\begin{aligned}
 \iint_R du \cdot dv &= 2 \\
 \iint_R u \cdot du \cdot dv &= \int_{-1}^0 \int_{v=-(1+u)}^{v=1+u} u \cdot du \cdot dv + \int_0^1 \int_{v=-(1-u)}^{v=1-u} u \cdot du \cdot dv \\
 \iint_R u^2 \cdot du \cdot dv &= 1/3 \\
 \iint_R v \cdot du \cdot dv &= 0 \\
 \iint_R v^2 \cdot du \cdot dv &= 1/3 \\
 \iint_R u \cdot v \cdot du \cdot dv &= 0
 \end{aligned}$$

En consecuencia se obtiene

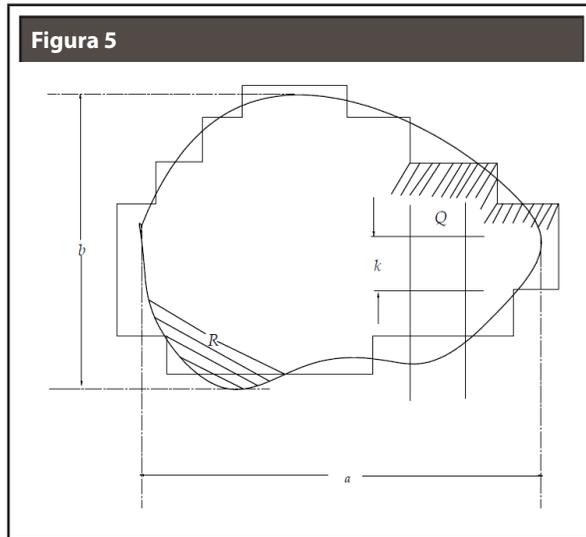
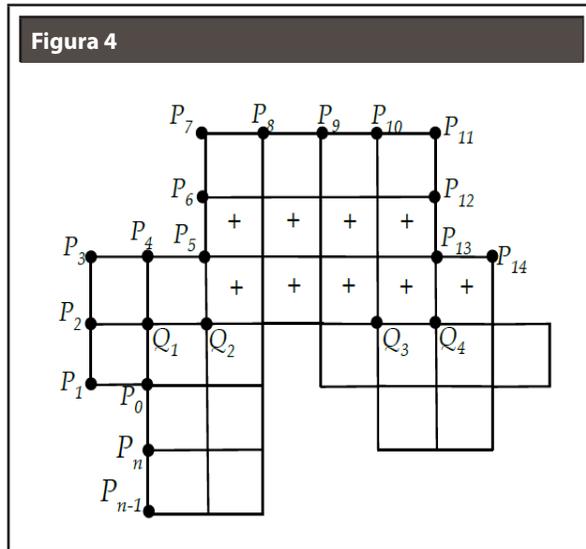
$$V = 2a + b_2/3 + c_2/3 \tag{4.2}$$

Y sustituyendo los valores de los coeficientes, se tiene:

$$V = [(4/3)] z_0 + (1/6) (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \tag{4.3}$$

A modo de comprobación de esta fórmula puede observarse que si la superficie que cubre a  $R$  es el plano  $z(x, y) = 1$ , el volumen de que se trata es un paralelepípedo de base  $R$  con área igual a 2 y altura igual a 1, cuyo volumen es 2 unidades cúbicas, y esto es precisamente lo que anuncia la fórmula encontrada:

$$V = [(4/3) \times 1 + (1/6) (1 + 1 + 1 + 1)] = 12/6 = 2 \text{ (unidades cúbicas)}$$



Esta fórmula (4.3) expresa el volumen buscado como una combinación lineal de las cinco cotas  $z_0, z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$ , en la cual cabe notar que la suma de sus cinco coeficientes es igual a 2, como se vio arriba.

5. Considerando que se tiene un rectángulo formado por dos cuadrados de lado  $k$  unidos por uno de sus lados, como en la **Figura 3**, en el plano  $OXY$ ; y que sobre este en el espacio está la superficie cuádrica

$$z(x, y) = a + b_1x + b_2x^2 + c_1y + c_2y^2 + dxy$$

acompañada de la condición (3.2), se aprecia que el volumen de la cuádrica por encima del rectángulo se obtiene aplicando la fórmula (4.3) a los dos cuadrados y sumando. Así se obtiene

$$V = [(4/3) (z_{11} + z_{31} + (1/6) (z_{00} + z_{02} + z_{40} + z_{42}) + (1/3)(z_{20} + z_{22}))] k^2/2 \quad (5.1)$$

en donde  $z_{hk} = z(x_h, y_k)$  es la cota de la cuádrica en el punto de coordenadas  $x_h, y_k$ .

6. Yuxtaponiendo un cuadrado a otro, unidos por uno de sus lados cada par de ellos, puede formarse una figura como la esquematizada en la **Figura 4**. El perímetro de esa figura es una poligonal  $P_0P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$  cuyos puntos sucesivos son equidistantes. Hay algunos de esos puntos donde los dos segmentos adyacentes al punto son colineales. Tal es el caso de  $P_2, P_4, P_6, P_8, P_9$ , etc. A estos puntos los llamaremos nodos llanos.

En algunos otros puntos de la poligonal los dos segmentos adyacentes forman un ángulo de  $90^\circ$  respecto al interior del polígono, como ocurre en  $P_1, P_3, P_7, P_{11}, P_{14}$ , etc. A estos puntos los llamaremos nodos convexos. Y a puntos como  $P_0, P_5, P_{13}, \dots$ , donde se forma un ángulo de  $270^\circ$  respecto al interior de la poligonal, los llamaremos nodos cóncavos. Si  $p$  es el número de nodos cóncavos, se demuestra fácilmente que el número de nodos convexos es  $p + 4$ . Cada punto llano pertenece a dos cuadrados; cada esquina convexa pertenece a un cuadrado, y cada esquina cóncava pertenece a tres cuadrados. A puntos como  $Q_1, Q_2$ , etc. que pertenecen a cuatro cuadrados se les llamará nodos interiores. Y los centros de los cuadrados se llamarán  $C_1, C_2, \dots$ , etc.

7. El volumen que una superficie cuádrica

$$z(x, y) = a_0 + b_1x + b_2x^2 + c_1y + c_2y^2$$

cubre encima del área poligonal sombreada de la **Figura 5**, puede calcularse aplicando la fórmula (4.3) a cada uno de los cuadrados que forman el área poligonal y sumando sobre todos ellos.

El resultado es casi evidente y puede escribirse

$$V = [(4/3)S_0 + (1/6) S_1 + (1/3) S_2 + (1/2) S_3 + (2/3) S_4]k \quad (5.1)$$

en donde:

$S_0$ : Suma de las cotas  $z(x, y)$  en los centros de los cuadrados

$S_1$ : Suma de las cotas  $z(x, y)$  en los nodos convexos

$S_2$ : Suma de las cotas  $z(x, y)$  en los nodos llanos

$S_3$ : Suma de las cotas  $z(x, y)$  en los nodos cóncavos

$S_4$ : Suma de las cotas  $z(x, y)$  en los nodos interiores

8. Es interesante hacer notar algunas relaciones numéricas que deben cumplir los números de sumandos de estas sumas. Para expresarlas llámese

$N_0$ : Número de cuadrados (o bien, de centros de cuadrados).

$N_1$ : Número de nodos convexos

$N_2$ : Número de nodos llanos

$N_3$ : Número de nodos cóncavos

$N_4$ : Número de nodos interiores

Los  $N_0$  cuadrados, considerados uno por uno, tienen  $4 \cdot N_0$  vértices (o nodos). De manera que contando cada nodo convexo una vez, cada nodo llano dos veces, cada nodo cóncavo tres veces y cada nodo interior 4 veces, se debe tener:

$$4 N_0 = N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 \quad (8.1)$$

Y puesto que ya se hizo notar que

$$N_1 = N_3 + 4 \quad (8.2)$$

se deduce que

$$2(N_0 - N_4 - N_3 - 1) = N_2$$

lo cual indica que el número de nodos llanos debe ser par, y que

$$N_0 = N_4 + N_3 + N_2/2 + 1 \quad (8.3)$$

Por otra parte, ya se vio que al sumar los coeficientes de las cotas de cada cuadrado (fórmula 4.3) se obtiene el número 2, de modo que al sumar los  $N_0$  cuadrados debe obtenerse  $2 \cdot N_0$ , y la suma de coeficientes en la fórmula 7.1 será

$$(4/3)N_0 + (1/6)N_1 + (1/3)N_2 + (2/3)N_4 = 2N_0$$

de donde

$$(2/3)N_0 + (1/6) (N_3 + 4) + (1/3)N_2 + (1/3)N_3 + (2/3) N_4$$

Dividiendo esta ecuación por 2 resulta nuevamente la **Ecuación 8.3**.

Con estos antecedentes es posible ya escribir una fórmula para calcular con aproximación ajustable un integral de la forma

$$\iint_R f(x, y) dx \cdot dy$$

siendo  $R$  una región simplemente conectada del plano  $OXY$  y siendo  $f(x, y)$  una función acotada, continua y sumable en  $R$ .

El procedimiento para valorar este integral es el siguiente:

a. Admitir que  $f(x, y)$  es aproximable por una superficie cuádrica  $z(x, y)$  como (3.1), en toda la región  $R$ , en el sentido de que para cada punto  $(x, y)$  de  $R$  se tiene que

$$|f(x, y) - z(x, y)| < \varepsilon$$

siendo  $\varepsilon$  un número positivo prescrito de antemano y tan vecino al cero (0) como se necesite para afinar los resultados y de acuerdo con el calibre de la cuadrícula que se anuncia enseguida.

b. Dibujar una cuadrícula de calibre  $k$ , que cubra toda  $R$ , y tal que la variación de  $f(x, y)$  dentro de ningún cuadro exceda a  $\varepsilon$ .

c. Escoger en la cuadrícula una poligonal cerrada que no se aparte a distancia mayor que  $k$  del contorno de  $R$ , el cual es una curva simple, rectificable y cerrada de Jordan, de longitud  $L$ . Esta poligonal se denomina poligonal aproximante, y la región que

encierra se indica con  $Q$ . Es sencillo demostrar que si se hace tender  $k$  a cero, el área de  $Q$  tiende, como límite, al área de  $R$ , y el perímetro de  $Q$  tiende al perímetro de  $R$ .

d. Señalar los centros y las esquinas de todos los cuadrados que queden abrazados por la poligonal mencionada. Dichas esquinas son los nodos de la red poligonal.

e. Clasificar el conjunto  $M$  de nodos de la red poligonal en los cuatro subconjuntos disyuntos:

$M_1$ : sub-conjunto de nodos convexos

$M_2$ : sub-conjunto de nodos planos

$M_3$ : sub-conjunto de nodos cóncavos

$M_4$ : sub-conjunto de nodos interiores

Se tiene así la partición

$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ , con  $M_i \cap M_j = \emptyset$  para  $i \neq j$

f. Calcular  $f(x, y)$  en cada uno de los nodos del conjunto  $M$ , cuyo número es  $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ .

Alternativamente,  $f(x, y)$  puede estar dada en una tabla numérica o dibujada como familia de curvas de nivel en el plano  $OXY$ .

g. Calcular numérica o algebraicamente (o leer u observar gráficamente o medir físicamente en un modelo a escala) el valor de  $f(x, y)$  en cada uno de los centros de los  $N_0$  cuadrados que están encastrados por la poligonal aproximante. Estos centros forman el conjunto  $M_0$ .

h. Formar cada una de las cinco sumaciones

$$S_n = \sum_{P_i \in M_n} f(P_i) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, 4$$

y calcularlas numéricamente.

i. Calcular la expresión (7.1)

$$V = [4 \cdot S_0/3 + S_1/6 + S_2/3 + S_3/2 + 2 \cdot S_4/3] k^2/2$$

la cual daría el volumen cubierto por una superficie continua que en cada cuadrado de la cuadrícula coincide con una cuádriga, por encima del área abrazada por la poligonal. En primera aproximación es posible tomar este valor como estimativo del in-

tegral (2.1) propuesto, pero teniendo en cuenta que estamos admitiendo errores de aproximación por dos conceptos:

i. Por aproximar la región  $R$  con la poligonal  $Q$ , y

ii. Por aproximar la función  $f(P)$  por los “parches” de cuádrigas  $z(P)$  que coincidan con  $f(P)$  en los nodos de la cuadrícula, pero no necesariamente en los demás puntos de la región  $R$ .

10. Para apreciar la magnitud del error de aproximación, obsérvese primero que la región  $R$  es la unión de  $Q$  con  $R \cap \bar{Q}$  excluyendo de este último conjunto los puntos de  $Q$  que no están  $R$ , o sea:

$$R = Q \cup (R \cap \bar{Q} / (Q \cap \bar{Q}))$$

en donde la barra diagonal (/) es el signo de diferencia entre conjuntos, y la barra superior encima de un conjunto indica su complemento. Entonces

$$\begin{aligned} \iint_R f(P) dP &= \iint_Q f(P) \cdot dP + \\ &\iint_{R/Q} f(P) dP - \iint_{Q/R} f(P) dP \end{aligned} \quad (10.1)$$

El primer integral de lado derecho de esta ecuación es

$$\begin{aligned} \iint_Q f(P) \cdot dP + \iint_Q z(P) \cdot dP + \\ \iint_Q [f(P) - z(P)] dP = V + \iint (f - z) \cdot dP \end{aligned} \quad (10.2)$$

El tercer término del lado derecho de la **Ecuación 10.1**, que es

$$\iint_{Q/R} f(P) \cdot dP$$

puede no estar definido por el problema que se trata de resolver, o puede ser nulo, puesto que el dominio donde se busca el volumen  $V$ , es  $R$ . Y por una consideración anterior, resulta que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \iint_R dx \cdot dy = \iint_Q dx \cdot dy \Rightarrow \lim_{k \rightarrow 0} \iint_{Q/R} f(P) \cdot dP = 0$$

Sustituyendo la (10.2) en la (10.1) se tiene entonces

$$\iint_R f \cdot dP - V = \iint_{Q \cap R} (f - z) \cdot dP + \iint_{R/Q} f(P) \cdot dP$$

De aquí se obtiene el error del cálculo del volumen

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| \iint_{R/Q} f(P) \cdot dP - V \right| \leq \left| \iint_{Q \cap R} (f - z) \cdot dP + \iint_{R/Q} f \cdot dP \right| \\ &\leq \iint_{Q \cap R} |f - z| \cdot dP + \iint_{R/Q} |f| \cdot dP \\ &\leq \max_{Q \cap R} |f - z| \cdot \text{área}(Q \cap R) + \max_{\frac{R}{Q}} |f| \cdot \text{área de } (R/Q) \end{aligned}$$

Pero:

$$\text{área de } Q \cap R \leq \text{área de } R = S$$

$$\begin{aligned} \text{área de } R/Q &\leq \text{perímetro de la frontera de } R \\ &\times k = L \cdot k \end{aligned}$$

y llamando

$$m = \max_{Q \cap R} |f - z| \leq \max_R |f - z| = m^*$$

$$M = \max_{R/Q} |f| \leq \max_R |f| = M^*$$

se deduce una acotación para el error  $\varepsilon$

$$\varepsilon = m \cdot S + MLk \leq m^* \cdot S + M^* \cdot L \cdot k \quad (10.3)$$

Esta acotación permite estimar numéricamente un límite máximo del módulo del error de la aproximación. En efecto,  $S$  y  $L$  son datos conocidos de la región  $R$ ;  $k$  se ha escogido a voluntad;  $m$  y  $M$  se obtienen por inspección o por algún método conocido de extremalizar funciones.

11. Sería deseable ahora poder demostrar que el error es infinitesimal con  $k$ . En las desigualdades (10.3) los factores  $M$ ,  $L$ ,  $k$  y  $M^*$  son evidentemente infinitesimales con  $k$ . Por esta consideración, sería necesario y suficiente demostrar que  $m$  (o bien  $m^*$ ) tiende a cero si  $k \rightarrow 0$ . Pero este tema del error en el ajuste polinómico de funciones tabuladas será tratado en otro documento.

12. En resumen, podemos enunciar la siguiente fórmula de integración numérica aproximada, en dos variables, y refiriéndose a la **Figura 5**:

$$\iint_R f(x, y) dx \cdot dy = \left[ \frac{4}{3} S_0 + \frac{1}{6} S_1 + \frac{1}{3} S_2 + \frac{1}{2} S_3 + \frac{2}{3} S_4 \right] k^2 / 2 + \varepsilon \quad (12.1)$$

En donde  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$  tienen el significado explicado en el numeral 7 (fórmula 7.1), y

$$|\varepsilon| \leq m S + M \cdot L \cdot k$$

cuyos símbolos ya fueron definidos en el numeral anterior.

La fórmula (12.1) bien podría llamarse "fórmula de Simpson en el plano".

13. Entre las numerosas aplicaciones que se pueden dar a esta fórmula cabe mencionar las siguientes:

- La medición del volumen de un embalse o de un lago, por medio de sondajes hechos en puntos de la superficie que formen una cuadrícula bien orientada, bien calibrada y bien abscisada.
- La volumetría de un manto de carbón mediante taladros desde la superficie y según la técnica cuadrangular ya descrita.
- La medida de los volúmenes de una colina de grava, por encima de distintas cotas de referencia.

## REFERENCIAS

- Edwards, C.H. (1973). *Advanced Calculus of Several Variables*. New York. Dover Publications, Inc. 457 p.
- Mineur, H. (1952). *Techniques de Calcul Numériques*.
- Todd, J. (1962). *Survey of Numerical Analysis*. New York, London. MacGraw Hill Company Inc. 589 p.

**PARA CITAR ESTE ARTÍCULO /  
TO REFERENCE THIS ARTICLE /  
PARA CITAR ESTE ARTIGO /**

Poveda Ramos, G. (2016). Una fórmula de cubicación sobre el plano. *Revista EIA*, 13(25), enero-junio, pp. 45-51. [Online]. Disponible en: DOI: <http://dx.doi.org/10.14508/reia.2016.13.25.45-51>