



# Ensayos sobre POLÍTICA ECONÓMICA

[www.elsevier.es/espe](http://www.elsevier.es/espe)



## Sistema de inferencia difuso para la inflación en Colombia

Mónica Enciso Pulido, Andrés Acosta Hernández y Jacobo Campo Robledo\*

Facultad de Economía, Universidad Católica de Colombia, Colombia

### INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

*Historia del artículo:*

Recibido el 1 de noviembre de 2012

Aceptado 27 de febrero de 2013

*Códigos JEL:*

A12

C15

C61

E31

E37

*Palabras clave:*

Lógica clásica

Lógica difusa

Función de pertenencia

Sistema de inferencia difuso

Difusificación

Defusificación

Reglas difusas

Inflación

*JEL Classification:*

A12

C15

C61

E31

E37

*Keywords:*

Classic logic

Fuzzy logic

Membership function

Fuzzy inference system

Defuzzification

Fuzzy rules

Inflation

### RESUMEN

El sistema de inferencia difuso para la inflación en Colombia considera valoraciones subjetivas, las cuales son aproximadas a valores precisos, esto es aplicado a variables económicas consideradas determinantes de la inflación, y su aplicación muestra una nueva posibilidad para el análisis y pronóstico de uno de los indicadores macroeconómicos con mayor relevancia en las decisiones que deben tomar las autoridades económicas. Los resultados de la aplicación de este sistema muestran el comportamiento esperado; en este sentido, se puede afirmar que la aplicación de la lógica difusa a un problema, como proyectar la tasa de inflación anual, es válido y se convierte en una novedosa herramienta que abre la puerta al estudio de nuevos mecanismos que puedan ser implementados en la toma de decisiones de política monetaria.

© 2012 Banco de la República de Colombia. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Fuzzy inference system for inflation in Colombia

#### ABSTRACT

SIDIC is a fuzzy inference system that considers subjective assessments, which are approximated to accurate values, applying to economic variables considered as determining factors of inflation and its application shows a new possibility for analyzing and the forecasting of one of the most relevant indicators of the decisions that should be made by the financial authorities. The results of the implementation of this system show the expected behavior, and in this sense, we can say that the application of fuzzy logic to a problem, such as predicting the annual inflation rate is valid and opens new ways to study mechanisms that can be applied in making monetary policy decisions.

© 2012 Banco de la República de Colombia. Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

## 1. Introducción

La ciencia económica como ciencia social parte de la lógica clásica o lógica bivalente para el análisis de los fenómenos económicos que afectan a los individuos. Dicha lógica clásica tiene sus bases en

el uso de herramientas que provienen de las teorías de la probabilidad y la estadística. En este sentido, para formalizar los razonamientos, parte de hechos que suceden en condiciones "estáticas" y trata de hallar probabilidad de que sucedan otros hechos relacionados con un acontecimiento de interés. Sin embargo, el mundo se encuentra en constante cambio, las anomalías e irregularidades nunca dejan de aparecer y el estudio de los acontecimientos sociales se hace cada vez más complejo, pues, la economía dista de ser una ciencia exacta.

\*Autor para correspondencia.

Correo electrónico: [jacampo@ucatolica.edu.co](mailto:jacampo@ucatolica.edu.co) (J. Campo Robledo).

Dichas imprecisiones son difícilmente calculables y en los modelos generalmente utilizados en economía han sido ajustadas por medio de supuestos arbitrarios, de tal manera que resulta cuestionable el uso de la lógica bivalente para modelar algunos razonamientos y dar solución a problemas que obedecen a criterios vagos e imprecisos propios de la conducta humana (Sárria, 1984). Para analizar aquellos fenómenos inciertos, se han desarrollado y formalizado herramientas que buscan aproximarse al razonamiento humano; una de ellas es la actualización bayesiana que incluye en su aplicación la probabilidad como un concepto subjetivo, que surge del observador y corresponde a un grado de certeza racional sobre la ocurrencia de un suceso en estados probables condicionados a la información disponible en rangos permisibles no óptimos.

Por otro lado, existe otra herramienta que permite valores intermedios, la lógica difusa o lógica borrosa, concepto inmerso en las llamadas ciencias de la complejidad, que permite realizar inferencia a partir de valores imprecisos, pues acepta valoraciones subjetivas e incluso lingüísticas para los parámetros de un problema y va más allá de las evaluaciones clásicas o convencionales de Sí/No o verdadero/falso cuyo objetivo principal es expresar mediante reglas el comportamiento humano o los problemas de incertidumbre. Estas reglas representan conocimiento, percepción, experiencia y la ambigüedad que un sujeto (experto) difícilmente podría plasmar en valores exactos (Zadeh, 1965).

El uso de esta herramienta permite controlar partes de un sistema que son desconocidas o que presentan comportamientos fluctuantes no lineales, dada una relación con diferentes variables del entorno, como es el caso de las expectativas que tienen los agentes privados ante la toma de decisiones de política económica por parte del Estado, la credibilidad del Banco Central, la pobreza por su carácter multidimensional, y las variaciones climáticas que pueden afectar a diferentes sectores de la economía, entre otros.

Es importante aclarar que la lógica difusa no elimina ni reemplaza el supuesto de racionalidad económica, solo lo limita, ya que el individuo busca maximizar o alcanzar un óptimo, pero dada la incertidumbre e información incompleta no siempre lo logra. En palabras del Premio Nobel en Economía de 1978, Herbert Simon: "Toda la racionalidad en el proceso de decisión es limitada. El gerente no maximiza, toma decisiones que lo satisfacen, descubre soluciones aceptables para problemas bien reales. Se contenta con alternativas satisfactorias".

La contribución de este trabajo radica en que se presenta la lógica difusa como una metodología y herramienta alternativa para describir, representar, plantear y resolver los problemas de la teoría de la decisión en economía. Adicionalmente, se presenta una aplicación empírica a la política monetaria en Colombia que es innovadora, lo cual aporta a la actual discusión económica desde una nueva perspectiva.

Este documento está organizado de la siguiente manera. En la segunda sección se presenta una conceptualización y referenciación de la lógica difusa, que incluye todos los conceptos teóricos fundamentales de esta herramienta. En la tercera sección se realiza una revisión de algunas investigaciones económicas y financieras en las que se ha utilizado esta herramienta. En la cuarta sección se expone la metodología y la construcción del sistema de inferencia difuso para la inflación en Colombia (SIDIC). En la quinta sección se presenta la aplicación y los resultados del SIDIC expuesto en la sección 4. Finalmente, se concluye en la sexta y última sección.

## 2. Marco teórico

La lógica difusa procura crear aproximaciones matemáticas en la resolución de ciertos tipos de problemas, especialmente aquellos donde hay información vaga, ambigua e incompleta, es allí donde esta herramienta pretende producir resultados exactos a partir de datos imprecisos. El adjetivo "difuso" aplicado a ella se debe a que

los valores de verdad, son no-deterministas, es decir, se alejan del concepto de ser acontecimientos producto de la concepción de causa-efecto, no son exactos y por tal razón poseen una connotación de incertidumbre; este concepto se encuentra estrechamente asociado con las valoraciones lingüísticas o frases utilizadas en el lenguaje cotidiano. Por ejemplo: si tenemos un vaso medio lleno, independientemente de que también esté medio vacío, no está lleno completamente ni está vacío por completo. Qué tan lleno puede estar es un elemento de incertidumbre, es decir, de difusidad, entendida esta última como una propiedad de indeterminismo, y la connotación lleno, medio lleno, vacío, etc., son valores lingüísticos que otorgamos a la variable.

Entonces, lo difuso puede entenderse como la posibilidad de asignar más valores de verdad a los enunciados que los clásicos "falso" o "verdadero". Así pues, la lógica difusa es un tipo de lógica no-clásica que permite múltiples valores. Para explicar esta concepción, la lógica difusa hace uso de la teoría de conjuntos desde una perspectiva distinta a la lógica bivalente (lógica de 0-1) (anexos A, B y C).

### 2.1. Estructura de un sistema de inferencia difuso

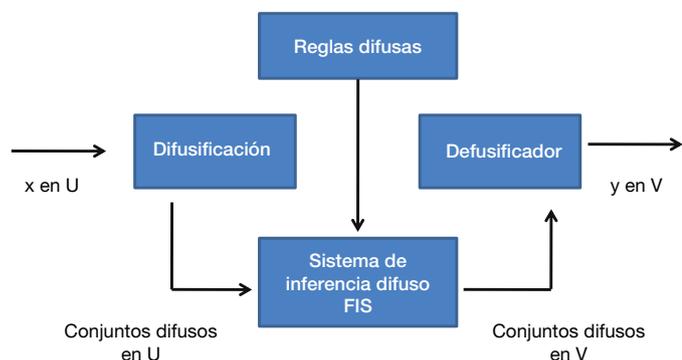
Un sistema de inferencia difuso o sistema experto es un método aplicado para la interpretación de valoraciones subjetivas; este incorpora el conocimiento de uno o varios sujetos que tienen una amplia experiencia en un tema determinado y por tanto son considerados expertos. En la figura 1 se muestra la estructura de un sistema de inferencia difuso. Para su construcción, en primera instancia es necesario determinar cuáles serán aquellas variables que se consideran importantes para llegar al resultado, las cuales se denominan variables de entrada, y la variable de salida del sistema o variable resultado, según la aplicación que se quiere realizar. Para cada una de estas variables es necesario determinar los conjuntos difusos (conjuntos difusos en  $U$  y  $V$ ) que la componen y su grado de pertenencia respectivo. El siguiente paso consiste en la elaboración de las reglas difusas y la determinación del operador difuso a la utilización de "y" u "o" según la relación que se desee encontrar. En esta etapa se debe tener en cuenta que el número de reglas puede variar según el número de variables de entrada y los respectivos conjuntos difusos que las componen. El criterio para la construcción de una regla depende del experto que la diseña y está sujeta a cambios según los escenarios a que pueda ser sometido el sistema de inferencia.

Finalmente, las reglas son sometidas al método de implicación, con lo cual se obtiene el grado de pertenencia de la consecuencia de la regla en un conjunto difuso en la variable de salida (conjuntos en  $V$ ). Los conjuntos difusos son luego agrupados en uno solo, y con el proceso de defusificación o proceso en el que los valores inexactos se convierten en valores numéricos se obtiene un valor que representa la relación difusa entre las variables.

De una manera más sencilla, en un sistema difuso el proceso que se lleva a cabo empieza con la difusificación de las variables de entrada, es decir, establecer variables lingüísticas utilizando funciones de membresía y denotando los grados de pertenencia a cada variable; a continuación se realiza la definición de las reglas SI-ENTONCES, se aplica la implicación y, finalmente, se sigue el proceso de defusificación descrito con anterioridad, lo cual da como resultado un valor numérico no difuso o exacto.

La aplicación de la teoría difusa requiere en muchas ocasiones de herramientas como la opinión de expertos en el tema<sup>1</sup>, dado que la definición de las caracterizaciones lingüísticas y las relaciones determinadas en las reglas difusas parten fundamentalmente del conocimiento de quien elabora el sistema difuso, o bien puede estar

1. Para aquellas variables netamente subjetivas se usa la opinión de varios sujetos considerados expertos en el tema, lo cual servirá posteriormente para hallar los conjuntos difusos y las funciones de pertenencia.



**Figura 1.** Estructura de un sistema de inferencia difuso.  
Fuente: elaboración de los autores.

determinado por bases teóricas o procesos en los cuales se requiere de la utilización de paneles de expertos, esto asegura el correcto funcionamiento y retroalimentación del sistema y permite incorporar de una manera objetiva definiciones que en la práctica suelen tener significados poco claros o ambiguos.

### 3. Revisión de literatura: la lógica difusa aplicada

La lógica difusa ha sido de gran aplicación en aquellos campos en los que la inferencia rebasa la aplicación de modelos matemáticos precisos, de ahí que sea paradójico que hoy tenga una mayor aplicación en disciplinas como la ingeniería que en áreas de las ciencias sociales y de política económica<sup>2</sup>. No obstante, en la disciplina económica es posible encontrar numerosos trabajos que aplican dicha lógica como un método alternativo de análisis; a continuación se referencian algunos de estos.

Como herramienta que permite modelar el comportamiento humano, la lógica difusa ha sido aplicada para desarrollar modelos que representan el comportamiento de agentes heterogéneos que actúan en los mercados bursátiles. Escobar, Moreno y Múnera (2010) muestran la capacidad de esta herramienta para simular el comportamiento de inversores inexpertos en un mercado en el cual las acciones se comercian bajo un mecanismo de subasta doble continua. El resultado final muestra una proyección consistente que preserva la conducta de la media y varianza de cada acción y demuestra que cuanto mayor sea la tendencia a asumir riesgo, la rentabilidad para cada agente puede ser mayor.

Medina y Paniagua (2008) diseñan un sistema de inferencia difuso aplicado al mercado de crédito, el cual considera toda la información en el proceso de evaluación crediticia con una perspectiva más neutral y con el objetivo de minimizar el riesgo operativo y de contraparte en el otorgamiento del crédito. Los resultados muestran que el modelo da respuestas consistentes de acuerdo con el reglamento de crédito y en el caso de los plazos hay coincidencia entre el sistema de inferencia difuso y la consulta a expertos, lo cual muestra que es una herramienta muy útil en la evaluación de crédito.

De otra parte, Reys, Arbage y Oliveira (2010) consideran la utilización de sistemas difusos para analizar las relaciones en los intercambios económicos y centran su estudio en determinar el origen o fuente de los costos de transacción en el sector agrícola; realizan una breve descripción de la teoría difusa para luego examinar el papel que juega la incertidumbre, la frecuencia, la estructura de la información y los activos en los procesos de toma de decisión que se dan en el interior y entre las cadenas productivas. Los autores

concluyen que la teoría difusa permite trabajar conceptualizaciones de carácter lingüístico que normalmente asumen los agentes en sus transacciones, de forma tal que es posible evaluar categorías como el oportunismo, la racionalidad, la incertidumbre, etc., y aproximar esta evaluación de variables, generando un indicador a partir del cual se pueden determinar las fuentes de los costos de transacción en las cadenas productivas.

Por otro lado, un tema que se debate constantemente y en el que la ciencia económica no ha encontrado acuerdo convincente es la medición de la pobreza. Innumerables críticas surgen para el método de medición actual, sin embargo hay pocas propuestas para solucionar las falencias y limitaciones de este método. Hurtado y Tinto (2009) proponen la lógica difusa como una novedosa técnica para aliviar las limitaciones de las herramientas actuales, limitaciones que surgen debido a que la pobreza es multidimensional. A partir de la lógica difusa, establecen umbrales para determinar los hogares en pobreza, a diferencia de la técnica convencional que utiliza el método de la línea de pobreza, lo que dificulta considerar los hogares e individuos que se encuentran sobre esta.

Los niveles de pobreza obtenidos mediante el nuevo método son menores que los obtenidos mediante el método tradicional. Dentro del estudio existen grupos de hogares que se encuentran en el límite inferior del umbral, donde alcanzan a cubrir los requerimientos tradicionales mínimos de supervivencia pero no alcanzan el límite superior (otro tipo de bienes), sin embargo esta situación no amerita que a estos hogares se les clasifique como pobres.

De otra parte, la gestión pública es un tema de controversia actual y de igual forma ampliamente debatido. En este tema, Felizzola (2009) presenta una propuesta aplicando lógica difusa para medir el desempeño de la gestión pública, incluyendo la evaluación de los mecanismos de control social a los que los ciudadanos tienen acceso para evaluar el ejercicio de las instituciones políticas, económicas y sociales, obteniendo un resultado de calificación regular para la gestión.

La teoría económica también ha sido explicada a través de la lógica difusa. Pattanaik (1997) propone la lógica difusa como un método que supera las limitaciones subyacentes al concepto neoclásico de racionalidad económica, de ahí que reinterprete formalmente las relaciones de preferencias formuladas con anterioridad mediante esquemas de análisis binario. Este aspecto es reconsiderado y profundizado en trabajos posteriores (Pecha y Villamil, 2002; Prieto y Villamil, 2000).

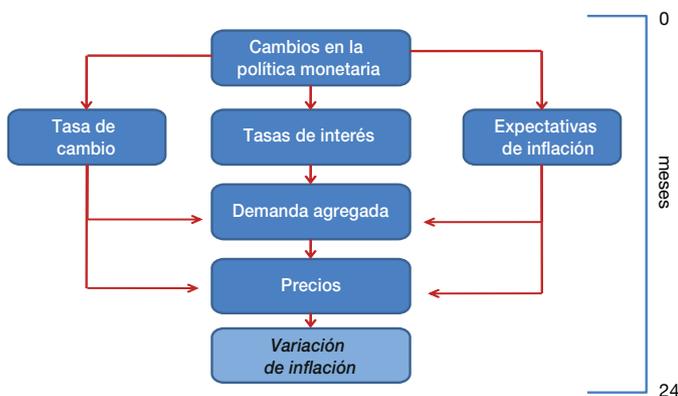
Finalmente, como un último ejemplo de aplicación en la disciplina económica, encontramos la relación inversa entre la demanda por dinero y la tasa de interés, fundamental en la economía keynesiana. Cada función de demanda de dinero individual representa una elección entre tener dinero o tener bonos, lo cual depende de la tasa de interés de los bonos. Dow y Ghosh (2009) decidieron establecer por medio de la lógica difusa que tan alta o baja debe ser la tasa de interés para influir en las decisiones de los agentes. La opinión de expertos cobra importancia en esta investigación, pues tras la consulta de personas consideradas especialistas en el tema, obtuvieron que cuando la tasa de interés es 9,5%, esta es indiscutiblemente alta según su opinión; por el contrario, cuando está entre 1 y 2,5% es indiscutiblemente baja; cuando la tasa de interés es 3%, solo el 10% de los expertos la consideran alta.

## 4. Metodología difusa

### 4.1. Sistema de Inferencia Difuso para la Inflación en Colombia

En Colombia, la Constitución política de 1991 y en particular la ley 31 de 1992 definieron la naturaleza y objeto del Banco de la República, con lo cual, le fue conferida la facultad de organismo autónomo e independiente encargado de velar por el poder adquisitivo de la moneda y ser la única autoridad monetaria y cambiaria del

2. Es muy difundido el uso de esta herramienta en temas de redes neuronales, control de procesos industriales, tecnología informática, entre otros; sin embargo, no hay un modelo económico que se fundamente en lógica difusa.



**Figura 2.** Mecanismos de transmisión de la política monetaria obtenidos del Banco de la República, Política Monetaria.  
Fuente: Banco de la República.

país, función que desempeña a través de la Junta Directiva del Banco de la República (JDBR).

Para el cumplimiento de este mandato, la JDBR utiliza la tasa de intervención como uno de los instrumentos para aplicar la política monetaria e inyecta o retira liquidez a la economía dados unos mecanismos de transmisión que llevan al cumplimiento de objetivos intermedios que luego se verán reflejados en objetivos finales de política. Así, por ejemplo, cuando la JDBR decide realizar una modificación en la tasa de intervención, afecta las tasas de interés del mercado y de esta manera el costo del crédito, entre otras variables, que luego se van a ver reflejadas en la inflación esperada. En la figura 2 se muestra cómo actúan los mecanismos de transmisión de la política monetaria ante un cambio, por ejemplo, una modificación en la tasa de interés de intervención. Es válido aclarar que el Banco de la República ha estimado el tiempo que toma un cambio de política monetaria en afectar la economía; este ocurre con algunos rezagos que oscilan entre 4 y 8 trimestres<sup>3</sup>.

Teniendo en cuenta que las decisiones de política monetaria no se ven reflejadas inmediatamente en la economía y que las relaciones de causalidad en el efecto de cada uno de los mecanismos de transmisión sobre las metas finales varía, es importante que adicional a las herramientas convencionales para el cálculo de la inflación esperada se cuente con recursos no convencionales que ayuden a proyectar los resultados de inflación en el corto plazo a partir de estructuras sencillas que permitan modelar las expectativas de los agentes económicos.

La proyección de los resultados de inflación es un proceso que implica tomar decisiones en escenarios con algún grado de incertidumbre, pues es difícil conocer claramente la posición que adoptarán los agentes económicos del mercado. La lógica difusa permite modelar en el corto plazo la relación existente entre los mecanismos de transmisión considerados en la figura 2, interpretando cada variable bajo valoraciones lingüísticas que representan con mayor precisión las posiciones que pueden adoptar los agentes, esto es, un agente puede normalmente expresar que la inflación se encuentra en un nivel alto y no referirse a un valor porcentual específico, sino a un rango de posibilidades que puede clasificarse en alto, muy alto, medio, bajo y muy bajo, situación que no se considera en la lógica clásica por definir de manera precisa 2 valoraciones (alta o baja).

En esta sección se presenta una primera aproximación a un sistema de inferencia difuso para la proyección de la inflación anual en Colombia denominado SIDIC.

## 4.2. Construcción de la estructura del Sistema de Inferencia Difuso para la Inflación en Colombia

Para la definición de la estructura del SIDIC se siguió un proceso determinado por las siguientes fases:

**Fase 1:** seleccionar las variables de entrada y salida considerando la teoría económica y los mecanismos de transmisión definidos por el Banco de la República. Se debe tener en cuenta que para la construcción de un sistema difuso “experto” no es necesario jerarquizar las variables según afectan los objetivos intermedios y finales de la política monetaria, ya que se parte de valoraciones lingüísticas de carácter subjetivo que puede tener un agente económico del mercado. Para hacer mayor claridad, el concepto de un agente (valoración subjetiva) puede depender de los conocimientos recientes que tenga acerca de las variables que afectan la inflación anual esperada, bien sea a partir de noticias, documentos o comentarios de expertos. En este sentido, la selección de variables implica escoger aquellas que permiten denotar un panorama económico en el cual se espera un resultado de inflación.

La tasa de intervención es el mecanismo más usado por el Banco de la República en la política monetaria; por esta razón fue definida como una de las variables de entrada en el sistema y se tomó en cuenta que las decisiones de política monetaria tardan de 4 a 8 trimestres en surtir efecto, como se había explicado con anterioridad. La variable se consideró como un promedio ponderado de los últimos 4 trimestres y no como un promedio simple anual, ya que los cambios observados en la tasa de intervención entre 2004 y 2011 se presentan en momentos distintos y no muestran un patrón de comportamiento temporal constante.

La segunda variable definida para el sistema fue la inflación al cierre de año, que es considerada como la situación inicial a partir de la cual la JDBR tomaría las decisiones de política monetaria; la tercera variable es el promedio de crecimiento del producto interior bruto (PIB) entre el último trimestre del año anterior que se ha de proyectar y el tercer trimestre del año a proyectar; esta variable es una *proxy* del crecimiento de la demanda agregada de corto plazo, la variable de salida fue definida como la inflación anual esperada, es decir, el objetivo de proyección.

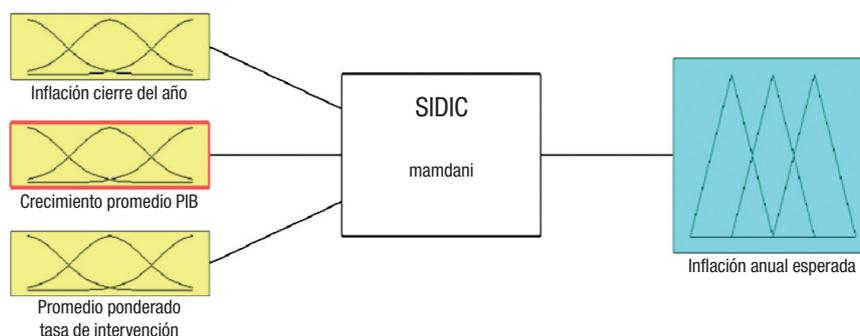
Finalmente, la estructura de las variables de entrada y salida del SIDIC se observan en la figura 3.

**Fase 2:** seleccionar las funciones de membresía para cada una de las valoraciones lingüísticas de las variables definidas en la fase 1.

Las funciones de membresía pueden ser de distintos tipos; inicialmente fueron definidas las valoraciones lingüísticas para determinar el número de funciones de membresía por cada una de las variables. Para el caso de la tasa de intervención se definieron 5 niveles: “Muy baja”, “Baja”, “Nivel medio”, “Alta” y “Muy alta”. Los rangos que caracterizan cada uno de estos niveles fueron obtenidos a través de un proceso de consulta a expertos que contó con la colaboración de 10 economistas<sup>4</sup>, a quienes se les indagó de manera independiente sobre sus consideraciones individuales para el caso colombiano en cuanto a los niveles de tasa de intervención. El rango de decisión se propuso entre 0 y 10% sustentado en que en la última década el valor máximo de la tasa de intervención se ubicó en el 10%. Esta metodología ha sido utilizada por otros autores, por ejemplo, Melo y Loaiza (2012) emplean información de expertos del Departamento de Programación e Inflación del Banco de la República para utilizarla como *prior*. Los resultados de la opinión de los expertos se muestran en la tabla 1.

3. Este rango de rezagos está establecido por el mismo Banco de la República. Disponible en: <http://www.banrep.gov.co/politica-monetaria/index.html#inflab>

4. Estos economistas se consideran expertos en la medida en que tienen conocimiento y experiencia en este tipo de análisis como docentes, investigadores y analistas.



**Figura 3.** Variables de entrada y salida del sistema difuso del Sistema de Inferencia Difuso para la Inflación en Colombia. Fuente: elaboración del autor con Fuzzy Logic Toolbox de Matlab®.

Dados los resultados de la consulta, se logró identificar rangos para las funciones de membresía, así por ejemplo, una tasa de intervención se encuentra en un nivel medio entre el 3 y el 7%, con 5% como el valor que pertenece totalmente a este nivel. A partir de

esta información, se diseñó la variable tasa de intervención promedio utilizando *toolbox "Fuzzy Logic"* con el que cuenta el software Matlab 7.6.0.

Dadas las características de la información, se determinó un tipo de función triangular (fig. 4), pues permite establecer los rangos anteriormente inferidos del expertizaje y solo se requieren 3 parámetros (a, b, c), donde a y c determinan el ancho del rango y b es el valor modal.

Por otro lado, para la definición de las funciones de pertenencia triangulares de la variable "inflación cierre de año", se propuso un rango de decisión entre 0 y 10%; teniendo en cuenta que en la última década la inflación anual no ha superado los 2 dígitos y no se han presentado períodos de hiperinflación ni de inflación negativa, este rango también fue utilizado para el proceso de consulta a expertos, y los resultados se presentan en la tabla 2.

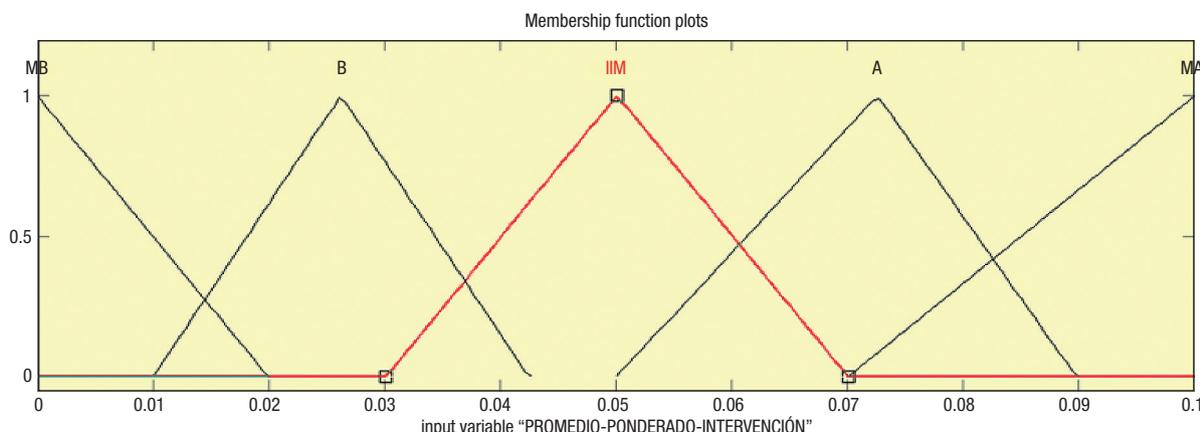
Una vez obtenidos los resultados de la consulta a los expertos, se definieron los rangos para cada una de las funciones (fig. 5). Es importante aclarar que la función de membresía del valor lingüístico "rango meta" (RM) se determinó teniendo en cuenta lo establecido por la JDBR como rango meta de largo plazo (2 y 4%) y que la opinión de los expertos solo fue considerada para los rangos "Muy baja", "Baja", en el RM, por encima del RM y muy por encima del RM.

De igual manera, las funciones de membresía del promedio del crecimiento del PIB trimestral fueron definidas a través de la consulta a expertos, en el que las propuestas de decisión pretendían establecer 5 niveles para este crecimiento, de forma tal que los valores lingüísticos representarán una aproximación a las variaciones de la demanda agregada definida por los niveles: decrece, crecimiento bajo, crecimiento medio, crecimiento alto y crecimiento muy alto.

**Tabla 1**  
Definición de los grados de pertenencia para la variable de tasa de intervención según expertizaje

Tasa de intervención	Grados de pertenencia				
	Muy baja	Baja	Nivel medio	Alta	Muy alta
0,00%	1	0	0	0	0
0,50%	0,75	0	0	0	0
1,00%	0,5	0	0	0	0
1,50%	0,25	0,25	0	0	0
2,00%	0	0,65	0	0	0
2,50%	0	0,99	0	0	0
3,00%	0	0,755	0	0	0
3,50%	0	0,5	0,25	0	0
4,00%	0	0,2	0,5	0	0
4,50%	0	0	0,75	0	0
5,00%	0	0	1	0	0
5,50%	0	0	0,75	0,25	0
6,00%	0	0	0,5	0,5	0
6,50%	0	0	0,25	0,75	0
7,00%	0	0	0	1	0
7,50%	0	0	0	0,75	0,15
8,00%	0	0	0	0,5	0,25
8,50%	0	0	0	0,25	0,5
9,00%	0	0	0	0	0,65
9,50%	0	0	0	0	0,75
10,00%	0	0	0	0	1

Fuente: cálculos propios.

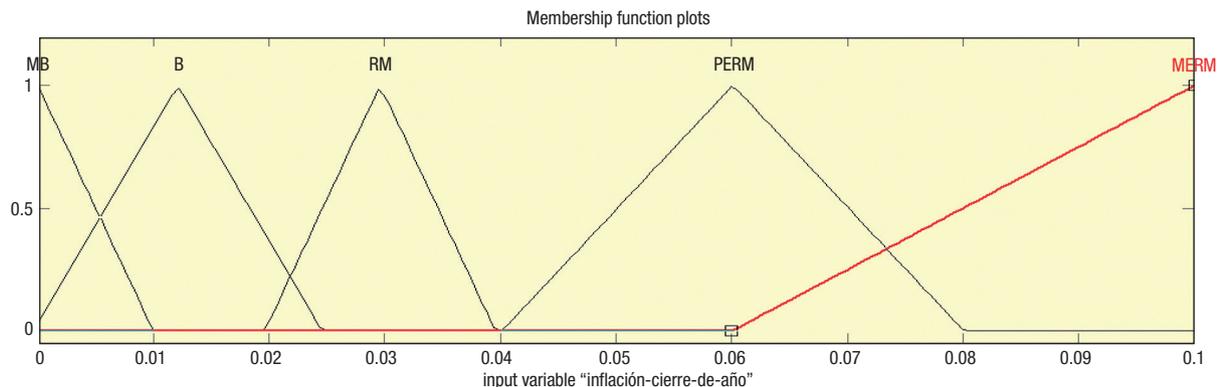


**Figura 4.** Funciones de membresía promedio ponderado de la tasa de Intervención. MA: muy alta; MB: muy baja. Fuente: elaboración del autor con FuzzyLogicToolbox de Matlab®.

**Tabla 2**  
Definición de los grados de pertenencia para la variable de inflación anual según expertizaje

Inflación cierre de año	Grados de pertenencia				
	Muy baja	Baja	Rango meta	Por encima del rango meta	Muy por encima del rango meta
0,00%	1	0	0	0	0
0,50%	0,5	0	0	0	0
1,00%	0	0,5	0	0	0
1,50%	0	1	0	0	0
2,00%	0	0,5	0	0	0
2,50%	0	0	0,5	0	0
3,00%	0	0	1	0	0
3,50%	0	0	0,5	0	0
4,00%	0	0	0	0	0
4,50%	0	0	0	0,25	0
5,00%	0	0	0	0,5	0
5,50%	0	0	0	0,75	0
6,00%	0	0	0	1	0
6,50%	0	0	0	0,75	0,1
7,00%	0	0	0	0,5	0,15
7,50%	0	0	0	0,25	0,25
8,00%	0	0	0	0	0,5
8,50%	0	0	0	0	0,65
9,00%	0	0	0	0	0,7
9,50%	0	0	0	0	0,8
10,00%	0	0	0	0	1

Fuente: cálculos propios.



**Figura 5.** Funciones de membresía inflación cierre año. MB: muy baja; MERM: muy por encima del rango meta. Fuente: elaboración de los autores con FuzzyLogicToolbox de Matlab®.

En la tabla 3 se presentan los resultados del expertizaje, donde el rango de decisión se propuso entre 0 y 10%.

Por otro lado, en la figura 6 se muestran las funciones triangulares que representan los valores lingüísticos de la variable “Crecimiento Promedio PIB trimestral” y sus respectivos rangos de pertenencia establecidos a partir de la consulta a expertos. Por último, para la variable de salida se utilizaron las mismas funciones de membresía de la inflación cierre de año, pues es la misma variable solo que proyectada al cierre del siguiente año.

Es importante aclarar que la caracterización de los valores lingüísticos pueden variar de acuerdo con las opiniones de los expertos y el escenario en el que se esté aplicando el sistema, ya que dependiendo del entorno económico las funciones de membresía pueden cambiar sus parámetros, en cuyo caso se requiere retroalimentar el modelo para actualizarlo de manera constante.

**Fase 3:** definición de las reglas “SI-ENTONCES” para el sistema de inferencia difuso.

En esta etapa se establecieron las reglas que determinaron el proceso de defusificación que sería realizado por el método de centroide o centro de gravedad, es decir, se definieron las proposiciones que determinarían el funcionamiento del sistema (tabla 4). Para ello, se tuvo en cuenta el canal de expectativas de inflación mediante el

cual, como se menciona en Gómez (2006), un aumento de la tasa de interés disminuye las expectativas de inflación y por tanto la inflación misma<sup>5</sup>.

En la anterior etapa, fueron definidas 5 funciones de membresía para cada una de las variables, las posibles relaciones que se pueden presentar corresponden a 125 reglas (5<sup>3</sup>). En la tabla 4 se presentan en detalle las reglas “SI ENTONCES” definidas para el sistema.

Para mostrar las relaciones gráficamente se usó la herramienta Surface Toolbox de Matlab 7.6.0. La figura 7 muestra cómo la inflación esperada es creciente a medida que disminuye el promedio ponderado de la tasa de intervención y aumenta el crecimiento promedio del PIB trimestral. De igual forma, se puede observar que a medida que decrece el promedio del PIB y el promedio de la tasa de intervención aumenta, la inflación esperada será baja.

## 5. Aplicación y resultados

Para probar el sistema de inferencia posterior a su construcción, este se aplicó en la proyección de la inflación al cierre de los años 2005-2011; para esta aplicación, la variable inflación al cierre de

5. Bajo expectativas racionales, las expectativas disminuyen porque a través de todos los canales disminuye la inflación.

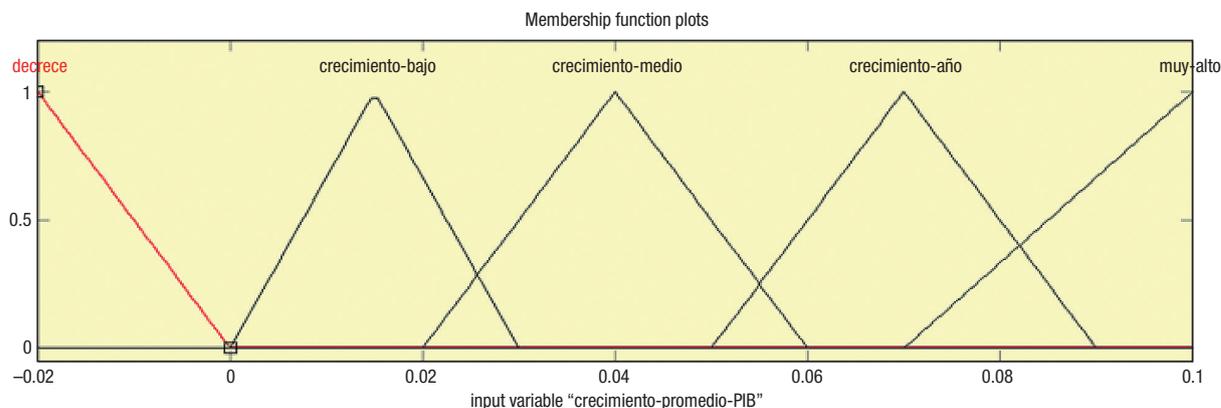
**Tabla 3**

Definición de los grados de pertenencia para la variable crecimiento promedio del producto interior bruto trimestral según expertizaje

Promedio PIB trimestral	Grados de pertenencia				
	Decrece	Crecimiento bajo	Crecimiento medio	Crecimiento alto	Crecimiento muy alto
-2,00%	1	0	0	0	0
1,50%	0,75	0	0	0	0
-1,00%	0,5	0	0	0	0
-0,50%	0,25	0	0	0	0
0,00%	0	0	0	0	0
0,50%	0	0,25	0	0	0
1,00%	0	0,75	0	0	0
1,50%	0	1	0	0	0
2,00%	0	0,75	0	0	0
2,50%	0	0,25	0,25	0	0
3,00%	0	0	0,5	0	0
3,50%	0	0	0,75	0	0
4,00%	0	0	1	0	0
4,50%	0	0	0,75	0	0
5,00%	0	0	0,5	0	0
5,50%	0	0	0,25	0,25	0
6,00%	0	0	0	0,5	0
6,50%	0	0	0	0,75	0
7,00%	0	0	0	1	0
7,50%	0	0	0	0,75	0
8,00%	0	0	0	0,5	0
8,50%	0	0	0	0,25	0,25
9,00%	0	0	0	0	0,5
9,50%	0	0	0	0	0,75
10,00%	0	0	0	0	1

PIB: producto interior bruto.

Fuente: cálculos propios.

**Figura 6.** Funciones de membresía crecimiento promedio PIB trimestral.

Fuente: elaboración de los autores con FuzzyLogicToolbox de Matlab®.

año es considerada como punto de partida para las estimaciones, posteriormente se considera el crecimiento promedio del PIB trimestral y, por último, el promedio ponderado de la tasa de intervención.

Con el fin de comparar las estimaciones obtenidas por el sistema de inferencia difuso, se recopiló información disponible en los informes trimestrales de inflación elaborados por el Banco de la República acerca de los pronósticos realizados por analistas locales<sup>6</sup> y la misma entidad; para el caso de aplicación, se tomó en cuenta que en las proyecciones del SIDIC se utiliza el promedio ponderado de la tasa de intervención y el promedio simple del crecimiento trimestral del PIB, realizando un corte en el mes de septiembre; por lo tanto,

fueron consideradas las proyecciones publicadas en el informe de inflación del tercer trimestre de cada año.

En la tabla 5 se muestran los resultados obtenidos por medio del SIDIC en comparación con los resultados estimados por los analistas y el Banco de la República y la inflación observada. Cabe aclarar que hasta el año 2007 el Banco de la República muestra estimaciones puntuales por medio del pronóstico del modelo central, y posteriormente los informes de inflación revelan estimaciones basadas en el RM (superior al RM, en el rango meta, debajo del RM).

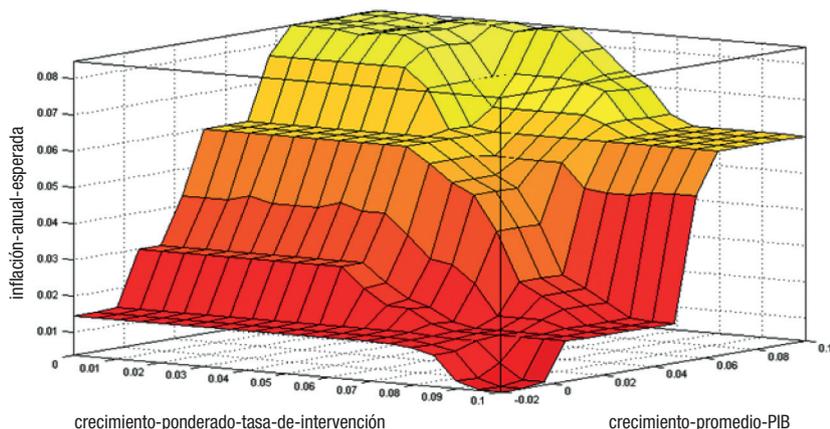
La figura 8 muestra las proyecciones estimadas por los analistas locales y el SIDIC, con el fin de comparar la capacidad del sistema frente a los resultados obtenidos por otras metodologías. A partir de la aplicación de SIDIC se lograron proyecciones cercanas al valor observado para todos los años excepto para 2008, lo cual se explica por la crisis financiera global, pues allí los mecanismos de transmisión presentaron fluctuaciones atípicas influenciados por factores externos que el sistema de inferencia no logra controlar, pues solo considera 2 de estos mecanismos (expectativas y crecimiento de la demanda agregada).

6. Los pronósticos de analistas locales corresponden al promedio de las estimaciones realizadas por alrededor de 10 instituciones reconocidas del país, entre ellas, comisionistas de Bolsa, instituciones financieras y centros de investigación que son publicadas en los informes trimestrales de inflación que elabora el Banco de la República; para el caso de aplicación se tomaron los valores consignados en el informe de inflación de septiembre en cada año comparado.

**Tabla 4**  
Reglas del sistema de inferencia difuso para la inflación en Colombia

			Tasa de intervención				
			Muy baja	Baja	Nivel medio	Alta	Muy alta
<b>Inflación</b>	Muy baja	Decrece	Baja	Baja	Muy baja	Muy baja	Muy baja
		Crecimiento bajo	Estable	Estable	Baja	Baja	Muy baja
		Crecimiento medio	Alta	Alta	Estable	Estable	Baja
		Crecimiento alto	Muy alta	Alta	Alta	Estable	Estable
		Crecimiento muy alto	Muy alta	Muy alta	Alta	Alta	Estable
	Baja	Decrece	Baja	Baja	Baja	Muy baja	Muy baja
		Crecimiento bajo	Estable	Estable	Estable	Baja	Muy baja
		Crecimiento medio	Alta	Estable	Estable	Estable	Baja
		Crecimiento alto	Muy alta	Alta	Alta	Estable	Estable
		Crecimiento muy alto	Muy alta	Muy alta	Alta	Alta	Estable
	Rango meta	Decrece	Baja	Baja	Baja	Muy baja	Muy baja
		Crecimiento bajo	Estable	Estable	Baja	Baja	Muy baja
		Crecimiento medio	Alta	Estable	Estable	Baja	Baja
		Crecimiento alto	Muy alta	Alta	Estable	Estable	Baja
		Crecimiento muy alto	Muy alta	Muy alta	Alta	Alta	Alta
	Por encima del rango meta	Decrece	Baja	Baja	Baja	Baja	Muy baja
		Crecimiento bajo	Estable	Estable	Estable	Baja	Baja
		Crecimiento medio	Alta	Alta	Alta	Estable	Baja
		Crecimiento alto	Muy alta	Muy alta	Alta	Alta	Alta
		Crecimiento muy alto	Muy alta	Muy alta	Muy alta	Alta	Alta
Muy por encima del rango meta	Decrece	Estable	Baja	Baja	Baja	Baja	
	Crecimiento bajo	Alta	Estable	Estable	Baja	Baja	
	Crecimiento medio	Alta	Alta	Estable	Estable	Estable	
	Crecimiento alto	Muy alta	Muy alta	Muy alta	Alta	Alta	
	Crecimiento muy alto	Muy alto	Muy alto	Muy alto	Muy alto	Alta	

Fuente: elaboración de los autores.



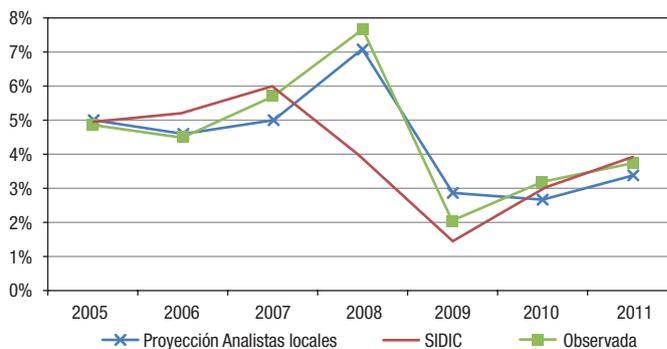
**Figura 7.** Relaciones entre el promedio ponderado de la tasa de intervención, inflación al cierre de año e inflación anual esperada.  
Fuente: FuzzyLogicToolbox de Matlab®.

**Tabla 5**  
Proyecciones realizadas por el Banco de la República, analistas locales y el sistema de inferencia difuso para la inflación en Colombia

Año	Proyección Banco de la República rango meta	Proyección analistas locales	SIDIC	Observada
2011	2,00-4,00	3,4	3,91	3,73
2010	2,00-4,00	2,7	3,00	3,17
2009	4,50-5,50	2,9	1,45	2,00
2008	3,50-4,50	7,1	3,90	7,67
2007	5,00**	5,0	6,00	5,69
2006	4,60**	4,6	5,20	4,48
2005	5,20**	5,0	4,93	4,85

\*\*Pronósticos del modelo central.

Fuente: Banco de la República. Elaboración de los autores utilizando el sistema de inferencia difuso para la inflación en Colombia.



**Figura 8.** Proyecciones realizadas por analistas locales y SIDIC e inflación observada 2005-2011.  
Fuente: Banco de la República. Cálculo y elaboración de los autores.

## 6. Conclusiones

La toma de decisiones de política económica es una de las tareas más complejas a las que se puede enfrentar un economista; el carácter de ciencia social trae consigo la responsabilidad de adoptar medidas que procuren cumplir con los objetivos económicos de una sociedad. Por tanto, la implementación de modelos que permitan estimar el comportamiento de las diferentes variables macroeconómicas es importante.

La contribución de este trabajo radica en que se presenta la lógica difusa como una metodología y herramienta alternativa para describir, representar, plantear y resolver los problemas de la teoría de la decisión en economía. Adicionalmente, se presenta una aplicación empírica a la política monetaria en Colombia que es innovadora, lo cual aporta a la actual discusión económica desde una nueva perspectiva.

El diseño e implementación del sistema de inferencia difuso presentado en este trabajo se retroalimenta y aprende de la experiencia del experto, y es importante resaltar que contiene lógica clásica dentro de sí mismo, pues las reglas difusas son relaciones causa y efecto.

A partir de los resultados se puede deducir que el sistema muestra el comportamiento esperado; en este sentido, se puede afirmar que la aplicación de la lógica difusa a un problema de estimación como el cálculo y proyección de la inflación anual, es válido y se convierte en una herramienta con la posibilidad de modelar los determinantes de variables como la inflación. Sin embargo, para el año 2008, el sistema no logra incorporar los efectos de la crisis financiera global, pues allí los mecanismos de transmisión presentaron fluctuaciones atípicas influenciados por factores externos que el sistema de inferencia no logra controlar, pues solo considera 2 de estos mecanismos (expectativas y crecimiento de la demanda agregada). Se puede entonces inferir la necesidad de retroalimentar constantemente el sistema, de manera que absorba la información de carácter coyuntural que pueda presentarse.

Por otro lado, se requiere trabajar hacia el futuro, en posteriores investigaciones, en un modelo que contenga más insumos o variables de entrada (mecanismos de transmisión de la política monetaria como el tipo de cambio y el costo de crédito) que permitan un mayor alcance al modelo.

Finalmente, los estudios analizados, demuestran que la teoría difusa puede convertirse en un recurso que aplicado a la economía posee la capacidad de modelar el comportamiento de los agentes económicos e incorpora en el análisis las ambigüedades e imprecisiones que el ser humano como principal actor en la sociedad y como agente heterogéneo introduce a los problemas que atañen al bienestar social.

## Anexo A

### Conjuntos difusos

En teoría de conjuntos difusos se llama a un conjunto normal, conjunto nítido, para distinguirlo del conjunto difuso. Un conjunto nítido se encuentra definido por una función característica de la siguiente manera:

Conjunto nítido, definición  $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ , es una función característica de un conjunto  $A \subset X$ , si  $\forall x \in X$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \in A \\ 0 & \text{cuando } x \notin A \end{cases} \Rightarrow \text{Lógica de cero-uno}$$

Donde  $X$  es el conjunto Universal

Esto significa que un elemento  $x$  es un miembro del conjunto  $A$  si  $\mu_A(x) = 1$ , y no pertenece al conjunto  $A$  cuando  $\mu_A(x) = 0$ .

En teoría de conjuntos difusos, la función característica está generalizada por una función de pertenencia que asigna a cada  $x_i \in X$  un valor cualquiera en el intervalo unitario  $[0,1]$ . El conjunto que está definido sobre la base de tal función de pertenencia se denomina conjunto difuso.

En este orden de ideas, un conjunto difuso  $A$  en el universo  $X$  es un conjunto definido por una función de pertenencia  $\mu_A(x)$  que muestra un mapa del universo  $X$  en el intervalo  $[0,1]$ :

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

Si el valor de la función de pertenencia llamado "grado de pertenencia" es igual a 1,  $x$  pertenece totalmente al conjunto difuso; si el grado de pertenencia es igual a 0,  $x$  no pertenece al conjunto difuso, y si el grado de pertenencia está entre 0 y 1,  $x$  es un miembro parcial del conjunto difuso. La función característica es:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ es un miembro pleno de } A \\ \in (0,1) & x \text{ es un miembro parcial de } A \\ 0 & x \text{ no es un miembro pleno de } A \end{cases}$$

### 1. Operaciones con conjuntos difusos

Para entender cómo se realizan las operaciones entre conjuntos difusos, se puede partir del hecho de que dichas operaciones se derivan de las operaciones con conjuntos nítidos o clásicos. A continuación se presentan las definiciones clave para comprender las operaciones que se pueden realizar:

- **Igualdad**  
Dos conjuntos difusos son iguales si y solo si  $\forall x \in X; \mu_A(x) = \mu_B(x)$
- **Subconjunto**  
 $A$  es subconjunto de  $B$  ( $A \subseteq B$ ) (es decir, que implica inclusión).  
Si y solo si  $\forall x \in X; \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Zadeh introdujo una interpretación simple para estas operaciones de la siguiente manera:

- **Intersección:** sean  $A$  y  $B$  2 conjuntos borrosos en  $X$ . La intersección de  $A$  y  $B$  es un conjunto borroso  $C$ , que se denota:

$$C = A \cap B \forall x \in X: \mu_C(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

- **Unión:** sean  $A$  y  $B$  2 conjuntos difusos en  $X$ . La unión de  $A$  y  $B$  es un conjunto  $C$  que se denota:

$$C = A \cup B \forall x \in X: \mu_C(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

- **Complemento:** sea  $A$  un conjunto difuso en  $X$ . El complemento de  $A$  es un conjunto difuso que se denota:

$$\bar{A} \forall x \in X: \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) = \mu_{A^c}(x)$$

### 2. Normas para operaciones entre conjuntos difusos

Para representar en forma más general las operaciones de unión, intersección y complemento, se emplean las llamadas normas triangulares (t-Normas y t-conormas).

a. t-normas:

Para representar la intersección de 2 conjuntos borrosos, buscamos funciones del tipo  $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , que nos permitan obtener la función de pertenencia del conjunto intersección de la siguiente forma:

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in X$$

Desde el punto de vista de las funciones de pertenencia, se deben cumplir 4 propiedades:

• **Conmutativa:**

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_{B \cap A}(x)$$

Por lo tanto,  $T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = T(\mu_B(x), \mu_A(x))$ , con lo que T ha de ser conmutativa.

• **Asociativa:**

$$\mu_{(A \cap B) \cap C}(x) = \mu_{A \cap (B \cap C)}(x)$$

Entonces,  $T(T(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x)) = T(\mu_A(x), T(\mu_B(x), \mu_C(x)))$ , por lo que T ha de ser asociativa.

• **Elemento neutro el conjunto X:**

$$\mu_{A \cap X}(x) = \mu_A(x)$$

Entonces,  $T(\mu_A(x), \mu_X(x)) = T(\mu_A(x), 1) = \mu_A(x) \forall x$ , donde 1 es el elemento neutro de T.

• **Monótona creciente:**

$$\mu_A(x) \leq \mu_C(x) \forall x \quad y \quad \mu_B(x) \leq \mu_D(x) \forall x$$

Entonces,

$$\mu_{A \cap B}(x) \leq \mu_{C \cap D}(x) \forall x$$

De esta forma,  $T(\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq T(\mu_C(x), \mu_D(x))$  por lo tanto ha de ser creciente.

Por tanto, buscamos las funciones T:  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  que cumplan las siguientes propiedades:

• **Conmutativa:**

$$T(x, y) = T(y, x) \forall x, y \in [0,1]$$

• **Asociativa:**

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \forall x, y, z \in [0,1]$$

• **Elemento neutro:**

$$T(x, 1) = x \forall x \in [0,1]$$

• **Monótona creciente:**

$$\text{Si } x \leq y \text{ entonces } T(x, z) \leq T(y, z) \forall x, y, z \in [0,1]$$

A estas funciones se les denomina normas triangulares o t-normas. Las más conocidas son:

• **Mínimo:**

$$T(x, y) = \min(x, y), \text{ que es la mayor de las t-normas.}$$

• **Producto (pirobalística):**

$$\text{prod}(x, y) = x * y$$

• **Operación de Lukasiewicz:**

$$W(x, y) = \max(0, x + y - 1)$$

Estas t-normas se relacionan por medio de las desigualdades siguientes:

$$W(x, y) \leq \text{prod}(x, y) \leq \min(x, y) \quad \forall x, y \in [0,1]$$

b. **t-conormas:**

Con la operación de la t-conorma se trata de representar la unión de 2 conjuntos borrosos. En este caso, necesitamos buscar una función del tipo S:  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , tales que nos permitan obtener la función de pertenencia del conjunto unión de forma que:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) \forall x \in X$$

Desde el punto de vista de las funciones de pertenencia, se deben cumplir las siguientes propiedades:

• **Conmutativa:**

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_{B \cup A}(x)$$

Por lo tanto,  $S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(\mu_B(x), \mu_A(x)) \forall x$ , con lo que S ha de ser conmutativa.

• **Asociativa:**

$$\mu_{(A \cup B) \cup C}(x) = \mu_{A \cup (B \cup C)}(x)$$

Entonces,  $S(S(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x)) = S(\mu_A(x), S(\mu_B(x), \mu_C(x))) \forall x$ , por lo que S ha de ser asociativa.

• **Elemento neutro el conjunto Ø:**

$$\mu_{A \cup \emptyset}(x) = \mu_A(x)$$

Entonces,  $S(\mu_A(x), \mu_\emptyset(x)) = S(\mu_A(x), 0) = \mu_A(x) \forall x$ , donde 0 es el elemento neutro de S.

• **Monótona creciente:**

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \forall x \quad y \quad \mu_C(x) \leq \mu_D(x) \forall x$$

Entonces,

$$\mu_{A \cup C}(x) \leq \mu_{B \cup D}(x) \forall x$$

De esta forma,  $S(\mu_A(x), \mu_C(x)) \leq S(\mu_B(x), \mu_D(x))$ , por lo tanto, S ha de ser creciente.

Para definir de forma correcta la unión, a la función S:  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  se le exige que cumpla las siguientes propiedades:

• **Conmutativa:**

$$S(x, y) = S(y, x) \quad x, y \in [0,1]$$

• **Asociativa:**

$$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z) \quad x, y, z \in [0,1]$$

• **Elemento neutro:**

$$S(x, 0) = x \quad \forall x \in [0,1]$$

• **Monótona creciente:**

$$\text{Si } x \leq y \text{ entonces } S(x, z) \leq S(y, z) \forall x, y, z \in [0,1]$$

Las funciones que cumplen con las propiedades anteriormente descritas se consideran t-conormas o conormas triangulares. Las más conocidas son:

• **Máximo**

$$S(x, y) = \max(x, y) \text{ que es la menor de todas las t-conormas}$$

• **Suma-producto:**

$$\text{sum} - \text{prod}(x, y) = x + y - xy$$

• **Operación dual de Lukasiewicz:**

$$W^*(x, y) = \min(1, x + y)$$

Las t-conormas se relacionan por medio de las desigualdades siguientes:

$$\max(x, y) \leq \text{sum} - \text{prod}(x, y) \leq W^*(x, y) \quad \forall x, y \in [0,1]$$

### c. Generalización del complemento:

Para representar el complemento o la negación de un conjunto difuso, se utiliza el complemento. Entonces, en este caso, buscamos funciones de pertenencia de la forma  $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$  que nos permitan definir la función de pertenencia de un conjunto complementario de forma que:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = N(\mu_A(x)) \quad \forall x \in X$$

Si consideramos las funciones de pertenencia de un conjunto difuso  $A$  y de  $\bar{A}$ , se debe poder comprobar lo siguiente:

- Si  $\mu_A(x) = 0$ ; entonces  $\mu_{\bar{A}}(x) = 1$
- Si  $\mu_A(x) = 1$ ; entonces  $\mu_{\bar{A}}(x) = 0$
- Si  $\mu_A(x) \leq \mu_A(y)$ ; entonces  $\mu_{\bar{A}}(y) \leq \mu_{\bar{A}}(x) \quad \forall x, y \in X$
- Si  $\mu_{\bar{\bar{A}}}(x) = \mu_A(x)$

De esta manera, se deben buscar funciones  $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$  que cumplan con las siguientes propiedades:

- $N(0)=1, N(1)=0$
- Si  $x \leq y$  entonces  $N(y) \leq N(x)$
- $N(N(x)) = x \quad \forall x \in [0,1]$

## Anexo B

### Variables lingüísticas y reglas difusas SI-ENTONCES de variables numéricas a variables lingüísticas

Las palabras se usan a menudo para describir variables, por ejemplo: "Hace calor" o el equivalente "La temperatura es alta"; usamos la palabra "alta" para describir la variable "temperatura", por tanto, la palabra "alta" le otorga un valor a esta variable. Claramente, la variable "temperatura" también puede tomar los números 25 °C, 19 °C, etc., como su valor. Cuando una variable toma un número como valor, tenemos un marco matemático de trabajo bien establecido para formularlo, pero cuando una variable toma una palabra como valor, tenemos un marco amplio de trabajo complejo de formular en teoría de matemática clásica. Para proveer dicho marco de trabajo, se introdujo el concepto de variable lingüística.

Si una variable puede tomar palabras en lenguaje natural como su valor, a esa variable se le llama variable lingüística, donde las palabras son caracterizadas por conjuntos difusos definidos en el universo, en el cual la variable se encuentra definida.

Una variable lingüística es caracterizada por  $(X, T, U, M)$ , donde:

- $X$  es el nombre de la variable lingüística.
- $T$  es el conjunto de valores lingüísticos.
- $U$  es el dominio físico actual en el cual la variable lingüística  $X$  toma sus valores cuantitativos.
- $M$  es la regla semántica que relaciona cada valor lingüístico en  $T$  con un conjunto difuso en  $U$ , es decir, la función de pertenencia.

Comparando las 2 definiciones anteriores, se evidencia que son esencialmente equivalentes. La primera es más intuitiva y la segunda más formal. De estas definiciones, podemos ver que las variables lingüísticas son extensiones de variables numéricas en el sentido de que se les permite tomar conjuntos difusos como sus valores.

### Reglas difusas SI-ENTONCES (If-then)

Una regla difusa SI-ENTONCES es una expresión condicional de la forma:

SI (proposición difusa), ENTONCES (proposición difusa).

### d. Proposiciones difusas

Hay 2 tipos de proposiciones difusas: proposiciones difusas atómicas y proposiciones difusas compuestas. Una proposición difusa atómica es una expresión singular como  $x$  es  $A$ . Donde  $x$  es una variable lingüística y  $A$  es un valor lingüístico de  $x$  (esto es,  $A$  es un conjunto difuso definido en el dominio físico de  $x$ ). Una proposición difusa compuesta es una composición de proposiciones difusas atómicas usando los conectores "y", "o" y "no", los cuales representan intersección difusa, unión difusa y complemento difuso, respectivamente.

Nótese que en una proposición difusa compuesta, las proposiciones difusas atómicas son independientes, esto es, cada proposición difusa atómica puede usar una variable  $x$  distinta. Las variables lingüísticas en una proposición difusa compuesta son en general distintas.

Las proposiciones difusas compuestas deberían ser entendidas como relaciones difusas, y para determinar sus funciones de pertenencia se deben interpretar los conectores de acuerdo con las t-normas, t-conormas y la generalización del complemento. De esta forma, para el conector "y", se utilizan las intersecciones difusas, para el conector "o", se utilizan las uniones difusas y para el conector "no", se utiliza el complemento. Por ejemplo:

Sean  $x$  y  $y$  variables lingüísticas en los dominios físicos  $U$  y  $V$ ,  $A$  y  $B$  conjuntos difusos en  $U$  y  $V$  respectivamente, entonces la proposición difusa compuesta  $x$  es  $A$  y  $y$  es  $B$ , es interpretado como la relación difusa  $A \cap B$  en  $U \times V$  con función de pertenencia  $\mu_{A \cap B}(x, y) = T[\mu_A(x), \mu_B(y)]$ , donde  $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  es cualquier t-norma.

### e. Implicaciones

Las relaciones difusas pueden presentar diferentes implicaciones. Si seguimos el ejemplo  $x$  es  $A$  y  $y$  es  $B$ , los resultados de las relaciones pueden variar de acuerdo con las variables que sean objeto de estudio. En la forma clásica para formalizar las implicaciones se utilizan los parámetros  $p$  y  $q$ , donde  $p$  hace referencia a una proposición cierta o "verdadera" y  $q$  a una proposición "falsa". En teoría de conjuntos difusos diferentes se utiliza la notación  $v(p)$  para indicar el valor verdadero de una proposición. Generalmente, el valor verdadero de una proposición está asociado a un valor dentro del rango de  $[0, 1]$  de la función de pertenencia como resultado de las operaciones entre conjuntos difusos, según se hayan definido los conectores "y", "o" o "no".

Las reglas difusas SI-ENTONCES pueden ser vistas como reemplazando  $p$  y  $q$  con proposiciones difusas, podemos interpretar las reglas difusas SI-ENTONCES reemplazando los operadores  $*$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$  para el complemento difuso, unión difusa e intersección difusa, respectivamente. Como hay una gran variedad de complementos difusos, uniones difusas e intersecciones difusas en la literatura, se propone un número distinto de reglas difusas SI-ENTONCES. A continuación se listan algunas:

#### Implicación Dienes-Rescher

Si reemplazamos los operadores lógicos  $*$  y  $\vee$  de la ecuación por el complemento difuso básico y por la unión difusa básica, respectivamente, obtenemos la llamada implicación Dienes-Rescher. Específicamente, la regla difusa SI-ENTONCES será SI  $\mu_A(x)$ , ENTONCES  $\mu_B(y)$  se interpreta como una relación difusa  $QD$  en  $U \times V$  con función de pertenencia:

$$\mu_{QD}(x, y) = \max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]$$

#### Implicación Lukasiewicz

Si usamos la t-conorma Yager con  $W=1$  para el operador y complemento difuso básico para el operador  $*$ , obtenemos la implicación Lukasiewicz. Específicamente, la regla difusa SI-ENTONCES será SI  $\mu_A(x)$ , ENTONCES  $\mu_B(y)$  se interpreta como una relación difusa  $QL$  en  $U \times V$  con función de pertenencia:

$$\mu_{QL}(x, y) = \min[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]$$

**Implicación Zadeh**

Aquí la regla difusa SI-ENTONCES será SI  $\mu_A(x)$ , ENTONCES  $\mu_B(y)$  se interpreta como una relación difusa QZ en  $U \times V$  con función de pertenencia:

$$\mu_{QZ}(x,y) = \text{máx}\{\text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(y)](1 - \mu_A(x))\}$$

La ecuación se obtiene usando complemento difuso, unión difusa básica e intersección difusa básica para  $*, \vee, \wedge$ , respectivamente.

**Implicación Mamdani**

La regla difusa SI-ENTONCES se interpreta como una regla difusa  $Q_{MM}$  en  $U \times V$  con función de pertenencia:

$$\mu_{QMM}(x,y) = \text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

Las implicaciones Mamdani son las más ampliamente usadas en sistemas difusos y control difuso. Sin embargo, uno puede no estar de acuerdo con este argumento. Este tipo de debate indica que cuando representamos conocimiento humano en términos de reglas difusas SI-ENTONCES, diferentes personas tienen diversas interpretaciones. Consecuentemente, se necesitan diferentes implicaciones para lidiar con la diversidad de interpretaciones.

**Anexo C**

**Defusificadores**

El defusificador está definido como un mapeo de conjunto difuso  $V \subset R$  (que es la salida del sistema de inferencia difuso) a un punto no-difuso  $y^* \in V$ . La tarea del defusificador es especificar un punto en  $V$  que mejor represente al conjunto difuso en  $B'$ . Esto es similar al valor promedio de una variable al azar, sin embargo, como  $B'$  es construido de una forma especial, tenemos un número de opciones para representar este punto de representación. Los criterios que se han de considerar al escoger un defusificador son:

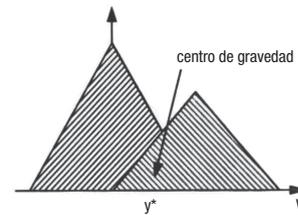
- **Plausibilidad:** el punto  $y^*$  debería representar  $B'$  desde un punto de vista intuitivo; por ejemplo, puede estar aproximadamente en medio del soporte de  $B'$  o tener un alto grado de pertenencia en  $B'$ ;
- **Simplicidad computacional:** este criterio es particularmente importante para control difuso porque los controladores difusos operan en tiempo real.
- **Continuidad:** un pequeño cambio en  $B'$  no debería resultar en un gran cambio en  $y^*$ .

El defusificador de centroide o centro de gravedad especifica a  $y^*$  como el centro del área cubierta como la función de pertenencia de  $B'$ , esto es:

$$y^* = \frac{\int V y \mu_{B'}(y) dy}{\int V \mu_{B'}(y) dy}$$

donde  $\int V$  es la integral convencional. La figura C.1 muestra esta operación gráficamente. Como el conjunto difuso  $B'$  es la unión o intersección de  $M$  conjuntos difusos, una buena aproximación es el promedio de los pesos de los centros de los  $M$  conjuntos difusos, con los pesos igual a las alturas de los correspondientes conjuntos difusos. Específicamente, sea  $y_i$  el centro del  $i$ -ésimo conjunto difuso y sea su peso, el defusificador centroide determina  $y^*$  como:

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^M y_i^{-1} w_i}{\sum_{i=1}^M w_i}$$



**Figura C1.** Defusificador, centroide o centro de gravedad. Fuente: elaboración de los autores.

**Bibliografía**

Aliiev, R. (2008). Modelling and stability analysis in fuzzy economics. *Journal of applied mathematics and computing*, 7, 31-53.

Amozurrutia, J. A. (2006). Lógica borrosa y redes neuronales artificiales aplicadas a las ciencias sociales. *Estudios sobre las culturas contemporáneas*. Época II. Vol. 12. Colima, Mexico, p. 119-167.

Babuska, R. (2004). Fuzzy and Neural control: Disc Course Lectures Notes. Delft Center for systems and Control, Delft University. Holanda.

Banco de la República de Colombia. Informes sobre Inflación. Septiembre (2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011), recuperado el 20 de octubre de 2011. Disponible en: [http://www.banrep.gov.co/publicaciones/jd\\_info\\_infla.htm](http://www.banrep.gov.co/publicaciones/jd_info_infla.htm)

Banco de la República de Colombia. Política monetaria. (Oct, 2011). Disponible en: <http://www.banrep.gov.co/politica-monetaria/index.html#inflab>

Coase, R. H. (1937). The nature of the firm. *Económica*, 4, 386-405, reimpresso in Coase, R. H. (1988). The firm, the market and the law. University of Chicago Press.

Cuevas, H. (2002). *Teorías Económicas del Mercado*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Dow, S. y Ghosh, D. (2009). Fuzzy logic and Keynes's speculative demand for money. *Journal of Economic Methodology*, 16, 57-69.

Escobar, A., Moreno, J. y Múnera, S. (2010). Modeling of investment strategies in stocks markets: An approach form multi agent based simulation and fuzzy logic. *DYNA*, 77, 211-221.

Felizzola, Y. (2009). Metodología de Evaluación del desempeño de los mecanismos de control social de la gestión pública en Colombia. *Revista de Economía & Administración*, 6, 105-127.

Fernández de Castro, M. (2008). La lógica if y los fundamentos de las matemáticas. *Signos Filosóficos*, 10, 148-171.

Fernández, A. (2006). Política Económica. Volumen I. Madrid, España: McGraw-Hill.

Gómez, J. (2006). La política monetaria en Colombia. *Borradores de economía*, Banco de la República, N.º 394.

Hurtado, A. y Tinto, J. (2009). Nueva técnica para medir la pobreza utilizando la teoría de la incertidumbre. *Economía*, 34, 213-237.

Lukasiewicz, J. (2011). Estudios de lógica y filosofía. Escuela de filosofía de la Universidad ARCIS autónoma. [Recuperado 10 de Agosto de 2011]. Disponible en: <http://www.philosophia.cl>

Maldonado, C. (2005). Ciencias de la complejidad: Ciencias de los cambios súbitos. Universidad Externado de Colombia, *Observatorio de economía y operaciones numéricas ODEON*, N.º 002.

Mearman, A. (2011). Who do heterodox Economists think they are? *American Journal of Economics and Sociology*, 70, 480-510.

Medina, S. y Paniagua, G. (2008). Modelo de inferencia difusa para estudio de crédito. *DYNA*, Núm. 154, 215-229.

Melo, L. y Loaiza, R. (2012). Bayesian forecast combination for inflation using rolling windows: an emerging country case. *Borradores de Economía*, N.º 705, Banco de la República de Colombia.

Parisi, A. y Parisi, F. (2006). Modelos predictivos de lógica y lógica borrosa en índices bursátiles de América del Norte. *El trimestre económico*, 73 (2), 265-288.

Pattanaik, P.K. (1997). "Fuzziness and The Normative Theory of Social Choice", en Kacprzyk, H. Nurmi, y M. Fedrizzi (eds.), *Consensus under Fuzziness*, p. 17-26, Kluwer.

Pecha, A. y Villamil, J. (2002). Relaciones de Preferencia y elección social en una estructura Difusa. *Cuadernos de Economía*, Bogotá, 21.

Prieto, A. y Villamil, J. (2000). La transitividad en la elección social desde la teoría de los conjuntos difusos. Monografía, Universidad Nacional de Colombia.

Reys, M., Arbage, A. y Oliveira, S. (2010). Identification of sources of transaction costs: A fuzzy approach for the evaluation of analytical categories. *Organizaciones rurales y agroindustrias*, 12, 11-19.

Robayo, E. (2007). *Control difuso: Fundamentos y aplicaciones*. Barranquilla, Colombia: Ediciones Uninorte.

Sárrria, A. (1984). *Conjuntos Borrosos: Antecedentes, estructura y aplicaciones en psicología*. Documentos del Laboratorio de psicología Matemática. Universidad Autónoma de Barcelona.

Terceño, A., Barberá, M. G. y Laumann, Y. (2003). La formalización del análisis económico empresarial en un ambiente incierto. IX jornadas de epistemología de las ciencias económicas. Buenos Aires.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.