Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: formulación del problema

Metaheuristics applied to vehicle routing. A case study. Parte 1: formulating the problem

Guillermo González Vargas[1] y Felipe González Aristizábal[2]

RESUMEN

En este artículo se presentan la formulación matemática del problema de ruteo de vehículos (VRP) y una serie de metodologías utilizadas por diferentes autores para resolver sus variaciones. Se presenta con el propósito de introducir al lector a una serie de artículos referentes a la decisión de localización de una empresa manufacturera tomando como criterio de selección la distancia total a recorrer para distribuir su producto.

Palabras clave: distribución, ruteo de vehículos, formulación matemática.

ABSTRACT

This paper deals with VRP (vehicle routing problem) mathematical formulation and presents some methodologies used by different authors to solve VRP variation. This paper is presented as the springboard for introducing future papers about a manufacturing company's location decisions based on the total distance traveled to distribute its product.

Keywords: distribution, vehicle routing problem, mathematical formulation.

Recibido: abril 18 de 2006
Aceptado: septiembre 3 de 2006

Introducción

Este artículo es el primero de una serie de tres, en los cuales se ilustrará la aplicación de técnicas metaheurísticas en la solución de un problema de ruteo de vehículos (VRP, por las siglas en inglés de Vehicle Routing Problem). Esta serie de artículos tiene su origen en un caso de aplicación desarrollado para una empresa manufacturera colombiana, la cual ha solicitado expresamente a los autores mantener en anonimato su identidad; por tanto, se ilustrará la metodología y los resultados obtenidos de la manera más abstracta posible, manteniendo los datos de entrada reales con los cuales se aplicaron las diferentes técnicas y la calidad y rigurosidad académica que merecen.

El artículo tiene como fin presentar al lector el problema que se abordará en los dos artículos siguientes, iniciando con una revisión bibliográfica en la que se ilustra la problemática del ruteo de vehículos y las técnicas utilizadas para resolverla, seguida por una breve descripción del problema; posteriormente se enuncia la formulación matemática del mismo y se finaliza con las conclusiones pertinentes.

El problema de ruteo de vehículos en la literatura

Centrados en el problema de distribución, en el que se enmarca el presente artículo, es importante recurrir a la afirmación de Toth y Vigo (2000): "*El problema de distribuir productos desde ciertos depósitos a sus usuarios finales juega un papel central en la gestión de algunos sistemas logísticos, y su adecuada planificación puede significar considerables ahorros. Esos potenciales ahorros justifican en gran medida la utilización de técnicas de investigación operativa como facilitadoras de la planificación, dado que se estima que los costos del transporte representan entre el 10% y el 20% del costo final de los bienes*". Dentro de este problema de transporte es necesario determinar el tipo de recurso a utilizar, la cantidad y las rutas a seguir, lo que se denomina problema de ruteo, y es tratado en la literatura como el problema del agente viajero (TSP, por las siglas en inglés de Traveling Salesman Problem), o en términos generales, para problemas con capacidad definida (Machado *et al.,* 2002), es generalizado el VRP (Olivera, 2004).

[1] Ingeniero industrial, Universidad Nacional de Colombia. Aspirante a M.Sc. en Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes, Colombia. gu-gonza@uniandes.edu.co

[2] Ingeniero industrial, Universidad Nacional de Colombia. Aspirante a M.Sc. en Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes, Colombia. fe-gonza@uniandes.edu.co

El ruteo de vehículos (VRP) es un problema *de optimización combinatoria* complejo, considerado ya un paradigma en la literatura especializada (Hermosilla y Barán, s/f), que surgió, según Olivera (2004), desde 1959. Este tipo de situación, como se había mencionado anteriormente, es una generalización del problema del agente viajero, el mismo que puede ser explicado de la siguiente manera:

Existe un agente de ventas que debe visitar a sus clientes ubicados en diferentes ciudades y luego volver a su ciudad de partida, y dicha actividad debe ser llevada a cabo con el menor costo posible (Ahuja *et al*., 1993); según Hermosilla y Barán (s/f) el costo de la ruta puede estar dado por la duración total de la misma (en tiempo o distancia). El problema de ruteo de vehículos se representa en un grafo con nodos y arcos, los cuales representan la ubicación de los clientes y la red vial por la cual pueden circular los vehículos.

Una recopilación de técnicas exactas de solución existentes para los problemas de ruteo de vehículos puede encontrarse en Laporte (1992); no obstante los de gran dimensión resultan imposibles de solucionar en tiempo polinomial, por lo que el VRP se denomina NP-hard (Machado *et al*., 2000; Olivera, 2004), donde no es posible alcanzar una solución óptima, y, dependiendo de las características especiales de clientes, locaciones y producto/servicio, requiere la elaboración de una metodología de solución específica con la cual sea posible aproximarse lo mejor posible al óptimo. Las diferentes variaciones y restricciones del problema generan una "familia" de VRP (Medaglia, 2005) de la que vale la pena mencionar ocho casos típicos, los cuales al compartir características pueden dar lugar a todo un universo de problemas VRP. Los principales problemas de ruteo de vehículos se ilustran en la Figura 1 y pueden ser descritos así:

CVRP

(Capacited VRP), es el VRP más general y consiste en uno o varios vehículos con capacidad limitada y constante encargados de distribuir los productos según la demanda de los clientes (Olivera, 2004; Lee *et al*., 2002). Este problema ha sido resuelto mediante búsqueda Tabú (Olivera, 2004; Rego, s/f), algoritmos genéticos (Machado *et al*, 2002; Machado *et al*., 2003 (a); Olivera, 2004), algoritmos de colonias de hormigas (Olivera, 2004), *Constraint programming* (Shaw, 1998) y algoritmos híbridos de recocido simulado y algoritmos genéticos (Wendt y König, s/f).

MDVRP

(Multi-Depot VRP), o VRP con múltiples depósitos es un caso de ruteo de vehículos en el que existen varios depósitos (cada uno con una flota de vehículos independiente) que deben servir a todos los clientes, caso resuelto por Tansini *et al*., (s/f) mediante técnicas de cluster firts – routen second, que serán descritas posteriormente.

PVRP

(Period VRP), contempla en su planteamiento un horizonte de operación de M días, periodo durante el cual cada cliente debe ser visitado una vez, problema propuesto por Francis *et al.,* (2004) y resuelto por los mismos autores mediante relajación lagrangiana.

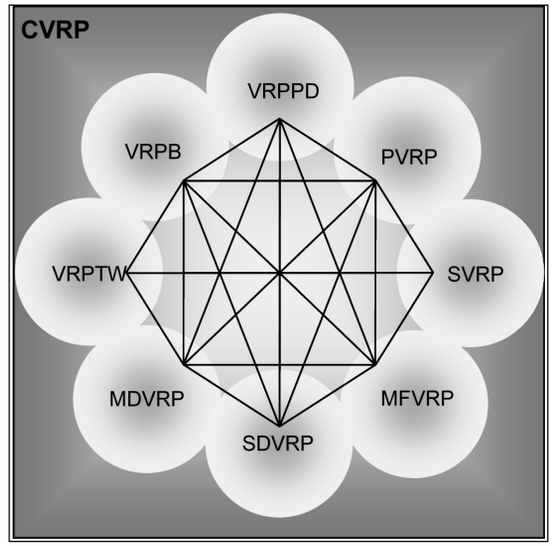

Figura 1. Familia VRP
Fuente: Elaboración propia a partir de Medaglia (2005), Olivera (2004) y García (2000)

SDVRP

(Split Delivery VRP), o VRP de entrega dividida, donde se permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante si el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo, (Lee *et al*., 2002; Archetti *et al*., 2001), resuelto en 2002 por Lee *et al*.

SVRP

(Stochastic VRP), se trata de un VRP en que uno o varios componentes son aleatorios; clientes, demandas y tiempos estocásticos son las principales inclusiones en este tipo de problemas. El SVRP ha sido resuelto por Bianchi *et al*., (s/f) a través de búsqueda Tabú, recocido simulado, algoritmos de colonias de hormigas, algoritmos genéticos y otros algoritmos evolutivos.

VRPPD

(VRP Pickup and Delivery), o VRP con entrega y recogida, es aquel en el que cabe la posibilidad de que los clientes pueden devolver determinados bienes, por tanto, se debe tener presente que estos quepan en el vehículo. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación y puede causar una mala utilización de las capacidades de los vehículos, un aumento de las distancias recorridas o a un mayor número de vehículos (Volkan, 2005; Dethloff, 200; Halse, 1992; Gendreau *et.al*., 1994; Min, 1989). Una forma de solucionar el VRPPD mediante la utilización de algoritmos genéticos fue propuesta por Volkan en 2005, quien afirma que si este problema incluye la restricción de culminar todas las entregas antes de iniciar las recogidas se da lugar a un

VRP con *backhauls* o **VRPB**, variación del VRP estudiada por Charlotte y Goetschalckx (1998).

MFVRP

(Mix Fleet VRP), es un VRP en el que se suponen vehículos con distintas capacidades o capacidad heterogénea, por lo que es necesario considerar estas capacidades en la ruta que seguirá cada recurso, ya que un camión más grande podrá realizar una ruta más larga o que tenga mayor concentración de demanda, lo cual fue estudiado inicialmente por Liu y Shen (1999) y posteriormente resuelto por Barchett y Campion mediante Búsqueda Tabú en 2002.

VRPTW

(VRP with Time Windows), es aquel en el que se incluye una restricción adicional en la que se asocia a cada cliente una ventana de tiempo, es decir, cada cliente sólo está dispuesto a recibir el bien o servicio durante un intervalo de tiempo predeterminado; este tipo de problema ha sido resuelto por diferentes autores, entre los que vale la pena mencionar a Olivera (2004), quien presenta una solución mediante búsqueda Tabú, Gendreau *et a.,l* (1998) proponen una heurística de inserción; Olivera (2004), Vacic (2002), Bräysy (2001), Zhu (2000) y Louis *et al* (1999) lo resuelven con algoritmos genéticos y Barán y Schaerer (2003) y Gambardella *et al*., (1999) presentan una propuesta a través de algoritmos de colonia de Hormigas.

Los diferentes problemas VRP, y básicamente los que utilizan múltiples vehículos (Restori, s/f; Olivera, 2004) y/o depósitos (Tansini *et al.,* s/f), pueden reducir su complejidad acotando el universo de soluciones, disminuyendo el conjunto de clientes a ser visitados por cada vehículo o desde cada depósito, esto es, asignar a cada vehículo/depósito un conjunto de clientes para atender, lo que Medaglia (2005) llama *set covering*, o lo que otros autores conocen como clusterizar o asignar primero, rutear después *cluster firts – routen second* (Olivera, 2004).

La clusterización de los clientes puede ser realizada a través de diferentes heurísticas, entre las que vale la pena mencionar:

Heurística de barrido o *sweep*, esta técnica propone establecer un punto de origen en el depósito y desde allí realizar un barrido para abarcar toda el área geográfica del problema, determinando así cada uno de los *clusters* (anónimo, s/f).[1]

Heurística de asignación generalizada de Fisher y Jaikumur, basa la generación de *clusters* en la solución de un problema de asignación generalizada (GAP) sobre los clientes, fue realizada por Fisher y Jaikumur (1981).

Heurística de localización de Bramel y Simchi-Levi, se utiliza una metodología de solución similar a la propuesta por Fisher y Jaikumur (1981); sin embargo, la solución inicial es determinada por la de un problema de localización de concentradores con capacidades (Bramel y Simchi-Levi, 1995).

Una vez definido el conjunto de clientes a atender (*cluster*) se procede a realizar la asignación de la mejor ruta, este subproblema generalmente subyace en un caso de problema de agente viajero (TSP) y puede resultar tan pequeño como para ser solucionado mediante una técnica de optimización como la programación lineal (Ahuja *et al.,* 1993).

Descripción del problema

La problemática tratada en este y los próximos artículos se basa en la necesidad que presenta una empresa manufacturera para decidir la localización de una bodega desde la cual sea posible distribuir su producto a 53 centros de consumo (en adelante se numerarán consecutivamente de 1 a 53), cada uno de los cuales tiene una demanda periódica constante,[2] como se ilustra en la Tabla 1.

La empresa cuenta con máximo seis vehículos con capacidad constante y homogénea de 5.500 unidades, con los cuales debe entregar en cada periodo la totalidad de productos que se demandan (cada vehículo realiza un recorrido por periodo). El punto de partida de los vehículos es uno de tres centros de consumo que por sus características resultan opcionados para convertirse en bodegas de distribución (9, 28 y 49). La demanda del centro de consumo que se convierte en bodega se satisface *in situ*, por lo que no requiere desplazamiento ni consumo de la capacidad de los vehículos. La compañía realiza la distribución durante las 24 horas del día y se considera que el tiempo de entrega es despreciable.

La decisión de la empresa consiste en establecer el centro de consumo desde el cual operar la bodega y determinar las rutas de cada uno de los vehículos minimizando de la distancia total a recorrer para satisfacer la demanda de los 53 municipios de la zona. Con el propósito de establecer responsabilidades, ha definido que cada uno de los vehículos encargados de la distribución debe atender un número determinado de municipios y encargarse de satisfacer a cabalidad sus demandas; por esto se entiende que los centros de consumo han de subdividirse en seis conjuntos, de manera que cada vehículo atienda sólo un conjunto y cada conjunto sea atendido por un solo vehículo.

Para el caso práctico del presente y los subsiguientes artículos se ilustrará la zona de influencia de la empresa con un grafo, en el cual los nodos representan los centros de consumo y los arcos las rutas directas existentes entre pares de centros

[1] Disponible en: http://www.cs.tcd.ie/courses/baict/bass/4ict5/Networks2004.pdf. Recuperado el 1 de marzo de 2005.

[2] Por recomendación de la empresa se considera la demanda constante, dado que la desviación estándar de la misma es poco representativa.

(para el lector interesado se presenta la longitud de los arcos en el apéndice: "Matriz de distancias entre centros de consumo", tabla en la cual se resaltan las distancias entre los arcos conectados de manera directa). El grafo de la Figura 2 ilustra la zona de influencia de la empresa y la ubicación geográfica de los centros de consumo, además se resaltan las tres posibles ubicaciones de la bodega de distribución.

Tabla 1. Demanda periódica por centro de consumo en unidades por periodo.
Fuente: Datos históricos de la empresa

Centro de consumo	*Demanda (unidades/periodo)*	*Centro de consumo*	*Demanda (unidades/periodo)*	*Centro de consumo*	*Demanda (unidades/periodo)*
1	995	19	840	37	167
2	556	20	290	38	447
3	310	21	390	39	40
4	234	22	3	40	238
5	1.163	23	149	41	166
6	277	24	257	42	393
7	9	25	9	43	2.016
8	173	26	567	44	215
9	5.329	27	290	45	149
10	167	28	2.937	46	319
11	142	29	71	47	226
12	175	30	907	48	98
13	16	31	154	49	5.141
14	560	32	29	50	11
15	20	33	249	51	180
16	859	34	240	52	910
17	325	35	175	53	97
18	460	36	246		

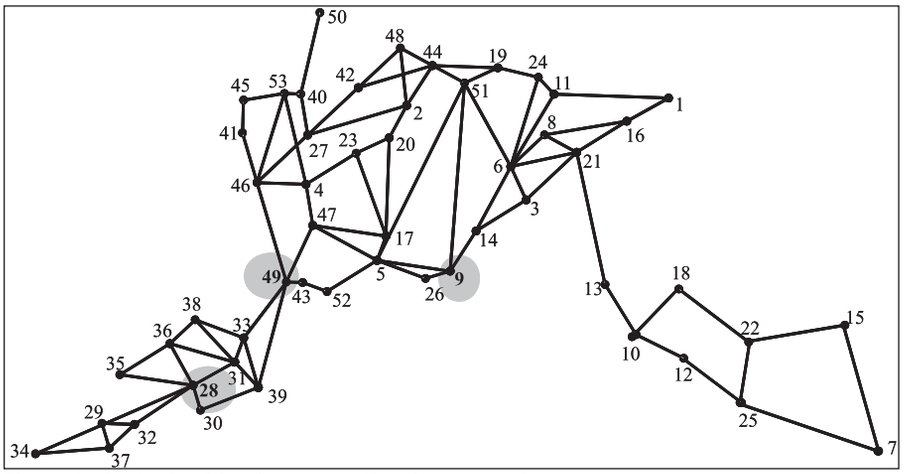

Figura 2. Grafo de ubicación geográfica de centros de consumo y conexiones directas existentes.
Fuente: Elaboración propia

Formulación del problema

Teniendo en cuenta la descripción del problema realizada anteriormente, es posible determinar que el problema planteado es un problema clásico de localización de una sola instalación (Schroeder, 1996) teniendo en cuenta un solo criterio de tipo tangible (Guerrero y Osorio, 2003) que puede ser denominado: "minimización de la distancia total a recorrer para la satisfacción de la demanda"[3]. Sabiendo que debido a criterios intangibles (Ballou, 1999) el universo de posibilidades para la localización de la bodega de la empresa queda reducida a tres posibilidades (centros de consumo 9, 28 y 49), el problema puede ser solucionado como tres subproblemas independientes de ruteo con múltiples vehículos, lo que Thomson y Orlin (1989) llaman *multi-vehicle routing and scheduling*, o lo que se ha descrito en este artículo como ruteo de vehículos con capacidad limitada CVRP (Olivera, 2004; García, 2000). La propuesta final de localización se ha de realizar teniendo en cuenta el mínimo costo de la ruta para cada una de las tres posibles localizaciones. Para este caso específico, y con base en lo dicho por Hermosilla y Barán (s/f), se asume que el costo de la ruta está dado por la longitud total de la misma, y se supone velocidad constante y unitaria para los vehículos.

Es importante aceptar que un problema similar al planteado se presentó en el concurso Whizzkids '96 (Applegate *et al.,* 2001) y fue resuelto por Jan Karel Lenstra y Emile Aarts *et al*. (Hurkens, 1997) mediante la utilización de Recocido Simulado (Simulated Anealing) y que el mismo problema ha sido abordado por otros autores como Thomson y Orlin (1989) y Machado *et al.,* 2003a, 2003b, entre otros.

Formulación matemática general

Teniendo en cuenta que el problema se abordará como tres subproblemas de ruteo de vehículos, uno para cada posible localización de la bodega, en cada uno de los cuales se encontrará la menor distancia total a recorrer para atender

[3] Se utilizará el término "minimización" con el ánimo de referirse al menor valor que pueda ser encontrado; sin embargo, los autores no garantizan la toma de la decisión basados en un valor óptimo.

la demanda de la empresa, el problema global puede ser definido como la minimización del mínimo de las distancias totales a recorrer para satisfacer la demanda de la zona de influencia de la empresa, partiendo desde cada uno de los tres centros de consumo opcionados (expresión 1).

Min (DT_9, DT_{28}, DT_{49}) (1)

Donde,

DT_i : Distancia total recorrida para satisfacer la demanda al localizar la bodega en el centro de consumo i (i= 9,28,49).

Formulación matemática de los subproblemas: VRP

Dado un número máximo de seis (6) vehículos con una capacidad homogénea determinada u=5500, que tienen como centro de operaciones único la bodega en el nodo 0 (centros de consumo 9, 28 y 49), y deben satisfacer a una cantidad de 52 clientes (centros de consumo), que se representan por j= 1,2,…,52, cada uno de los cuales tiene una demanda conocida d_j (véase Tabla 1), es posible realizar la siguiente formulación matemática:

Índices

Los índices del modelo son:

i = nodo de partida i (1,2,…,52)

j = nodo de llegada j (1,2,…,52)

k = vehículo k (1,2,…, K)

Variables

Las variables que se definen en el modelo son:[4]

x_{ij}^k 1 Si se asigna el vehículo k para recorrer el arco del nodo i al nodo j

0 De lo contrario

y_{ij} 1 Si se realiza el recorrido desde i hasta j

0 De lo contrario

K = Número de recursos (vehículos) a utilizar.

Parámetros

Los parámetros del problema son:

c_{ij}= Costo de transporte del nodo i al nodo j

d_i= Demanda en el nodo j

u= Capacidad del recurso k

n= Cantidad de clientes

Modelo matemático

El modelo matemático que representa cada uno de los tres subproblemas de ruteo se puede plantear según los aportes de Ahuja *et al.* (1993) y Olivera (2004) como sigue:[5]

Minimizar $$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} \quad (2)$$

Sujeto A:

$$\sum_{1\le k\le K} x_{ij}^k = y_{ij} \;;\quad \forall \quad i,j \quad (3)$$

$$\sum_{1\le j\le n} y_{ij} = 1 \;;\quad \forall \quad i \quad (4)$$

$$\sum_{1\le i\le n} y_{ij} = 1 \;;\quad \forall \quad j \quad (5)$$

$$\sum_{1\le j\le n} y_{0j} = k \quad (6)$$

$$\sum_{1\le i\le n} y_{i0} = k \quad (7)$$

$$\sum_{1\le i\le n} \sum_{1\le j\le n} d_i x_{ij}^k \le u \;;\quad \forall \quad k \quad (8)$$

$$\sum_{i\in Q} \sum_{j\in Q} y_{ij} \le |Q| - 1 \;;\quad \forall \text{ subconjunto } Q \text{ de } \{1,2,\ldots,n\} \quad (9)$$

$$k \le K \quad (10)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \;;\quad \forall \quad (i,j)\in A \quad (11)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \;;\quad \forall \quad (i,j)\in A,\ \forall \quad k \quad (12)$$

El conjunto A se define como: $A=\{(i,j) : y_{ij}=1\}$.

La restricción (3) se encarga de hacer obligatoria la asignación de un vehículo a la ruta (i,j), si esta es recorrida, y no asignarlo si la ruta no se va a recorrer, esta restricción contiene la variable de decisión x^k_{ij} que indica sí si (x^k_{ij}=1) o no (x^k_{ij}=0) se utiliza el vehículo k en el arco (i,j).

La variable y_{ij} presente en las restricciones (4) y (5) indica la activación del arco (i,j), lo que determina un recorrido entre los nodos i,j, además se asegura que todo cliente es un nodo intermedio de alguna ruta. Los grupos de restricciones (6) y (7) indican que k es la cantidad de vehículos utilizados en la solución y que todos los que parten del depósito deben regresar al mismo. La restricción (8) observa que cada vehículo no sobrepase su capacidad. La restricción (9) vigila que

[4] Según notación de Ahuja *et al.*, 1993.

[5] La nomenclatura utilizada y las restricciones representadas por las expresiones 3 a 9 son tomadas de Ahuja *et al.*, 1993.

la solución no contenga ciclos usando los nodos 1,2,…n. De otra manera los arcos de *A* contendrían algún ciclo pasando a través de un conjunto de nodos *Q* y la solución violaría la restricción, porque el lado izquierdo de la restricción sería al menos $|Q|$. La restricción (10) limita el número máximo de vehículos a utilizar hasta una cantidad máxima. Las restricciones (10) y (11) indican que tanto la variable x^k_{ij} como la variable y_{ij} son binarias.

Consideraciones finales

Una vez definida la formulación matemática con la que se describe el problema al que se enfrenta el presente artículo y teniendo en cuenta que los parámetros d_i, *u* y *n* son conocidos, sólo resta determinar un *input* fundamental del CVRP, el costo de cada ruta (c_{ij}), que para este caso será la distancia de cada ruta.

Según lo expresado por Olivera (2004), *puede suponerse que el grafo es completo, pues entre todo par de lugares de una red de transporte razonable, debería existir algún camino*, concepto que necesariamente debe ser usado en el desarrollo del presente artículo; así, aunque existan nodos que sólo tienen una vía de acceso (véase por ejemplo nodo 50 en la Figura 2), es necesario suponer que entre cada par de nodos existe un arco que los une, por lo anterior los autores decidieron construir arcos ficticios que representen la conexión existente entre todo par de nodos del grafo, a través de la ruta más corta entre ellos.

La construcción de los arcos ficticios anteriormente mencionados supone la solución de problemas de ruta más corta (*Shortest Path Problems*), específicamente lo que Ahuja *et al.* (1993) llaman *All-pair shortest path problem* y que pretende encontrarla entre todo par de nodos de un grafo, problema que puede ser solucionado según los mismos autores mediante la aplicación de *repeated shortest path algorithm*, que consiste en la aplicación de un algoritmo para encontrar rutas más cortas para un solo origen *n* veces (donde *n* es el número de nodos), o bien, *all-pairs lebel-correcting algorithm*, que se basa en la aplicación del algoritmo de Floyd-Warshall. Los dos métodos mencionados pretenden alcanzar la condición de optimalidad representada por la expresión 13, donde *d*[*i,j*] representa la distancia más corta entre los nodos *i, j*.

$$d[i,j] \leq d[i,k] + d[k,j] \quad \text{para todo nodo } i,j,k. \qquad (13)$$

Para crear la matriz de distancias entre todo par de centros de distribución del apéndice Matriz de distancias entre centros de consumo se decidió calcular la ruta más corta para cada municipio respecto de los demás (*repeated shortest path algorithm*) mediante la aplicación del algoritmo de Dijkstra (Taha, 1997).

Una vez hecho el recorrido bibliográfico pertinente, descrito y formulado el problema y recopilada la información necesaria para enfrentar el problema, los autores utilizaron diferentes técnicas aplicadas a encontrar la asignación que reduzca al máximo la distancia total recorrida por los vehículos encargados de satisfacer la demanda de los 53 centros de consumo, y con base en los resultados decidir la mejor localización para la empresa. Los resultados numéricos de la aplicación de cada una de las técnicas, al igual que la descripción de las mismas, se encontrarán en los dos artículos siguientes.

Conclusiones

El de ruteo de vehículos es la generalización del problema del agente viajero y encierra una familia de que debe ser resuelta según las características específicas de cada caso.

La formulación matemática del ruteo de vehículos debe contener familias de restricciones que imposibiliten la construcción de ciclos o subtoures.

En los siguientes artículos los autores expondrán diferentes metodologías de solución para el caso de estudio ilustrado.

Bibliografía

Ahuja, R., Magnanti, T. and Orlin, J., Network flows: theory, algorithms, and applications., Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1993.

Anónimo., Network. s/f., Disponible en: www.cs.tcd.ie/courses/baict/bass/4ict5/ Networks2004.pdf. Consultado en Marzo de 2004.

Applegate, D., Cook, W., Dash, S. and Rohe, A., Solution of a Min-Max Vehicle Routing Problem. August 15, 2001. Disponible en: www.research.ibm.com/ people/s/sanjeebd/ reports/newsboys.pdf. Consultado en Febrero de 2005.

Archetti, C., Mansini, R. and Speranza, M.G., The Split Delivery Vehicle Routing Problem with Small Capacity, November 7, 2001, Disponible en: http://fausto.eco.unibs.it/~www_mequ/ricerca/quaderni/201.pdf. Consultado en: Febrero de 2005.

Ballou, R. H., Business Logistics Management., Prentice-Hall, New Jersey, 4° edición, 1998, pp. 3-28, 481-592.

Barán, B. and Schaerer, M. A., Multiobjective Ant Colony System for Vehicle Routing Problem with Time Windows., Proceedings of the 21st IASTED International Conference APPLIED INFORMATICS, Innsbruck, Austria, 2003.

Barchett D. and Campion, E., Mix fleet vehicle routing problem – An application of Tabu search in the grocery delivery industry; 2002.., Disponible en: www.mang.canterbury.ac.nz/courseinfo/msci/msci480/WebPage.htm, Consultado en: Febrero de 2005.

Bianchi, L., Metaheuristics for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands; S/F., Disponible en: www.idsia.ch/idsiareport/IDSIA-06-04.pdf., Consultado en: Febrero de 2005.

Bramel, J. and Simchi-Levi, D., A location based heuristic for general routing problems., Operations Research, Vol. 43, 1995, pp. 649–660.

Bräysy, O., Genetic Algorithms for the Vehicle Routing Problem with Time Windows. 2001., Disponible en: osiris.tuwien.ac.at/~wgarn/ VehicleRouting/ Braysy.pdf, Consultado en: Febrero de 2005.

Charlotte, J. andy Goetschalckx, M., The vehicle routing problem with backhauls: properties and solution algorithms. Scholl of industrial and systems engineering - georgia institute of technology., Copyright 1992 – 1998. Disponible en: www.isye.gatech.edu/people/faculty/Marc_Goetschalckx/cali/Lineback/Vehicle%20Routing%20Problem%20with%20Backhauls.pdf, Consultado en Febrero de 2005.

Dethloff, J., Relation between vehicle routing problems: an insertion heuristic for the vehicle routing problem with simultaneous delivery and pick-up applied to the vehicle routing problem with backhauls., Journal of the Operational Research Society, 2002, Consultado en: Febrero de 2005.

Fisher, M., and Jaikumur, R., A generalized assignment heuristic for the vehicle routing problem., Networks 11, 1981, pp.109–124.

Francis, P., Smilowitz, K. and Tzur, M., The period vehicle routing problem with service choice; 2004., Disponible en: http://www.iems.northwestern.edu/ images/PDF/WP_04_005.pdf, Consultado en: Febrero 2005.

Gambardella, L.M., Taillard, E. and Agazzi, G., MACS-VRPTW: A Multiple Ant Colony System for Vehicle Routing Problems with Time Windows., New Ideas in Optimization, Disponible en: http://www.idsia.ch. Consultado en: Febrero 2005, McGraw-Hill, 1999.

García, A., Optimización de rutas, seguridad en el transporte y sistemas GIS. 2000., Disponible en: www.imac.unavarra.es/SEMAOL/Ponencias/04_Alejandro G_del_Valle.pdf, Consultado en: Febrero de 2005.

Gendreau, M., Hertz, A. and Laporte, G., A tabu search heuristic for the vehicle routing problem., Management Science 40, 1994, pp. 1276–1290.

Gendreau, M., Hertz, A., Laporte, G. and Stan, M.., A generalized insertion heuristic for the traveling salesman problem with time windows., Operations Research, Vol. 43, 1998, pp. 330–335.

Guerrero, L., y Osorio, L., La localización de instalaciones como decisión estratégica de la logística: un acercamiento al estado del arte., Trabajo de grado ingeniería industrial, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Marzo, 2003.

Halse, K., Modeling and Solving Complex Vehicle Routing Problems., PhD Thesis, Institute of Mathematical Statistics and Operations Research, Technical University of Denmark, Lyngby, 1992.

Hermosilla, A. y Barán, B., Comparación de un sistema de colonias de hormigas y una estrategia evolutiva para un Problema Multiobjetivo de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo. s/f., Disponible en: www.cnc.una.py/invest/paper2/augCLEI.pdf. Consultado en: Febrero de 2005.

Hurkens, C., WHIZZKIDS '96 1997., Disponible en: www.win.tue.nl/ whizzkids/1996/, Consultado en: Febrero de 2005.

Laporte, G., The vehicle routing problem: an overview of exact and approximate algorithms., European Journal of Operational Research, 59, 1992, pp. 345–358.

Lee, Ch., Epelman, M., Chelsea, C. and Bozer Y., A Shortest Path Approach to the Multiple-Vehicle Routing Problem with Split Pick-Ups, 2002., Disponible en: http://osiris.tuwien.ac.at/~wgarn/VehicleRouting/mvrpsp_ts.pdf, Consultado en: Febrero de 2005.

Liu, F. and Shen, S., A Method for Vehicle Routing Problem with Multiple Vehicle Types and Time Windows. 1999., Disponible en: http://nr.stic.gov.tw/ejournal/ProceedingA/v23n4/526-536.pdf. Consultado en: Febrero de 2005, Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A), Vol. 23, No. 4, 1999.

Louis, S., Yin, X. and Yuan, Z., Multiple Vehicle Routing with Time Windows Using Genetic Algorithms., Memorias de Proceedings of the Congress of Evolutionary Computation, 1999, pp. 1804-1808.

Machado, P., Tavares, J., Pereira, F. and Costa, E., Vehicle Routing Problem: Doing it the Evolutionary Way. 2000., Disponible en: http://osiris.tuwien.ac.at/~wgarn/VehicleRouting/GECCO02_VRPCoEvo.pdf. Consultado en: Febrero de 2005.

Machado, P., Pereira, F., Tavares, J. and Costa, E., GVR: a New Genetic Representation for the Vehicle Routing Problem. 2002., Disponible en: http://neo.lcc.uma.es/radiaeb/WebVRP/data/articles/vrp_aics2002.pdf, Consultado en: Febrero de 2005.

Machado, P., Tavares, J., Pereira, F. and Costa, E., Crossover and Diversity: A Study about GVR. 2003 (a)., Memorias de Proceedings of the Analysis and Design of Representations and Operators (ADoRo'2003) a bird-of-a-feather workshop at the 2003 Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2003), Chicago, Illinois, USA, 12-16 July, 2003. Disponible en: http://cisuc.dei.uc.pt/ ecos /view_pub.php?id_p=65. Consultado en: Febrero de 2005.

Machado, P., Tavares, J., Pereira, F. and Costa, E., On the Influence of GVR in Vehicle Routing. 2003 (b)., Memorias de Proceedings of the 2003 ACM Symposium On Applied Computing (SAC 2003) - Evolutionary Computation And Optimization Track, pp.753-758, Melbourne, Florida, USA, 9-13 March, 2003. Disponible en: http://cisuc.dei.uc.pt/ecos/view_pub.php?id_p=65. Consultado en: Febrero de 2005

Medaglia, A., Combinatoria para Logística., Coloquio en Optimización Combinatoria Sesión Avanzada, Universidad de los Andes, marzo de 2005.

Min, H., The Multiple Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pick-Up Points., Transportation Research, vol.23-A, 1989, pp. 377-386.

Olivera, A., Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos., Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. 2004. Disponible en: www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/ TR0408.pdf. Consultado en Febrero de 2005.

Rego, C., Node Ejection Chains for the Vehicle Routing Problem: Sequential and Parallel Algorithms. (s/f)., Disponible en: http://hces.bus.olemiss.edu/reports/ hces0201.pdf. Consultado en: febrero de 2005.

Restori M., An Application of VRP Algorithms with Original Modifications. s/f., Disponible en: http://eal.asu.edu/Papers%5CMel_VRP_studentTech.pdf, Consultado en: Febrero 2005

Shaw, P., Using Constraint Programming and Local Search Methods to Solve Vehicle Routing Problems., Memorias de Proceedings of the Fourth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP '98), M. Maher and J. Puget (eds.), 1998, pp. 417-431.

Schroeder, R., Administración de operaciones, toma de decisiones en la función de operaciones., 3ª. Ed., Editorial Mc Graw Hill, México, 1992.

Tansini, L., Urquhart, M. and Viera, O., Comparing assignment algorithms for the Multi-Depot VRP; s/f; Diponible en: www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/TR0108.pdf. Consultado en: Febrero 2005

Taha, H., Investigación de Operaciones., 5ª. Edición, alfaomega, Grupo Editor México, 1995.

Thompson, P. and Orlin, J., The Theory of Cyclic Transfers. 1989., Disponible en: http://web.mit.edu/jorlin/www/oldpapersfolder/cyclic_tranfers.pdf. Consultado en Febrero de 2005.

Toth, P. and Vigo, D., An Overview of Vehicle Routing Problems., Monographs on Discrete Mathematics and Applications. In: The Vehicle Routing Problem. SIAM, 2000, pp. 1–26.

Vacic, V., Vehicle Routing Problem with Time Windows ; 2002., Disponible en: www.bridgeport.edu/sed/projects/cs399/vacic/vrptw.html. Consultado en: Febrero 2005

Volkan, A., A GA Based Meta-Heuristic for the Capacitated Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-up and Deliveries. 2005., Disponible en: www.msie.sabanciuniv.edu/thesis/arif_volkan_vural.ppt. Consultado en: Marzo 2005

Wendt, O. and König, W., Cooperative Simulated Annealing: How much cooperation is enough?. s/f., Disponible en: www.wiiw.de/publikationen/Cooperative SimulatedAnnealing48.pdf. Consultado en: Febrero de 2005

Zhu, K., A new genetic algorithm for VRPTW., Presented at IC-AI 2000, Las Vegas, USA, 2000.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA

ORI Oficina de Relaciones Internacionales Facultad de Ingeniería

El objetivo principal de nuestra labor es elevar el nivel académico e investigativo de la Facultad. Para materializar éste propósito buscamos, en cooperación con las Unidades de la Facultad y de la Universidad, establecer y consolidar relaciones de cooperación duraderas con instituciones nacionales e internacionales.

Funciones:

Activación de convenios suscritos por la Universidad que tienen en su contenido componentes de Ingeniería.
Fortalecimiento de la política de movilidad de profesores y estudiantes.
Internacionalización de los currículos y de la investigación.
Promoción de cátedras internacionales.
Promoción de redes internacionales de cooperación.
Desarrollo de competencias internacionales entre estudiantes, docentes y administrativos (aprendizaje de idiomas, uso de nuevas tecnologías para la enseñanza, adiestramiento para la elaboración de proyectos con perfil internacional, etc.).

Periódicamente se realiza el evento Lunes de Internacionalización, donde se invitan expertos en la cooperación internacional para que orienten en los aspectos relevantes de las relacines internacionales a los miembros le nuestra Facultad. Así mismo, se realiza la Consejería Académica Internacional todos los viernes entre las 9 a.m. y las 12 m., en el salón de postgrados junto a la biblioteca de la Facultad. Allí, en conversaciones individuales o en pequeños grupos, se precisan los intereses de experiencia internacional de los miembros de la Facultad, y se planea la manera de trabajar conjuntamente en ellos para hacerlos realidad.

De igual forma, se presenta un Boletín permanente en la Página Web de la Facultad http://www.ing.unal.edu.co/admfac/noticias/ori/inter.html, en el cual se publican diferentes aspectos de la internacionalización de la Facultad.

Mayor información : ORI - Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá
Tel.(57)(1)3165000 Ext.18421 Carrera 50 No. 27-70 Bloque B6 Of.83. Unidad Camilo Torres
Atención de 8 :30 a.m. a 12 :30 p.m.

APENDICE: MATRIZ DE DISTANCIAS ENTRE CENTROS DE CONSUMO

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
1		84	42	101	86	41	137	32	68	71	27	85	58	56	132	12	91	86	43	78	26	108	87	32	102	74	108	145	168	151	133	161	127	185	162	149	170	139	136	118	137	95	107	72	132	124	104	81	111	138	51	100	122
2	84		51	32	38	42	169	42	56	104	43	117	90	59	164	72	32	118	27	9	58	141	18	37	135	38	24	90	113	97	79	107	72	132	107	93	115	85	82	27	56	29	59	12	42	44	42	15	56	47	20	52	31
3	42	51		82	44	9	128	19	26	63	28	76	49	14	123	30	50	77	39	93	17	99	71	30	93	31	75	103	126	109	91	120	85	145	120	106	128	97	95	34	97	57	64	39	48	94	62	48	69	54	31	58	38
4	101	32	82		28	84	201	74	46	135	74	149	122	58	196	103	28	150	58	22	90	172	14	69	166	41	35	59	82	65	47	75	41	100	75	61	84	53	50	25	25	45	29	44	32	12	10	46	25	45	52	42	21
5	86	38	44	28		47	172	57	18	107	66	120	93	30	167	74	6	121	55	29	61	143	27	68	137	13	63	59	82	65	47	75	41	100	75	61	84	53	50	53	53	73	20	50	60	40	18	53	25	73	47	14	62
6	41	42	9	84	47		127	11	29	62	20	80	48	17	122	30	53	76	30	51	16	98	60	22	98	34	70	106	129	112	94	123	88	147	122	108	131	100	97	80	95	49	67	30	94	96	64	39	71	100	22	61	84
7	137	169	128	201	172	127		120	154	66	147	52	79	142	31	125	178	77	157	179	112	55	187	149	35	160	198	232	255	238	220	249	214	273	248	234	257	226	223	207	225	176	193	118	222	213	190	127	197	227	149	186	211
8	32	42	19	74	57	11	120		39	55	30	68	41	27	115	20	64	69	41	62	9	91	70	32	85	45	81	116	140	123	105	133	99	158	133	119	142	111	108	91	105	59	78	41	105	86	75	50	82	110	33	71	95
9	68	56	26	46	18	29	154	39		89	48	102	75	12	149	56	24	103	53	47	43	125	45	50	119	6	81	77	100	84	66	94	60	119	94	80	102	72	69	71	71	72	39	53	78	58	36	62	43	91	45	32	157
10	71	104	63	135	107	62	66	55	89		82	13	14	77	60	60	113	14	101	113	46	37	134	84	31	94	128	166	189	172	154	183	148	207	183	168	191	160	157	160	159	110	127	92	174	147	124	136	131	180	84	121	164
11	27	43	28	74	66	20	147	30	48	82		100	68	37	142	38	65	96	16	52	36	118	60	6	117	54	67	133	156	139	122	150	115	175	150	136	158	127	125	76	114	49	87	127	90	83	82	136	97	96	24	81	80
12	85	117	76	149	120	80	52	68	102	13	100		27	90	55	73	126	28	110	126	59	32	140	102	17	107	142	179	203	186	168	196	162	221	196	182	205	174	171	173	173	124	140	105	188	158	138	114	145	193	102	134	177
13	58	90	49	122	93	48	79	41	75	14	68	27		63	74	46	99	28	78	99	32	50	120	70	44	80	114	152	175	158	141	169	134	194	169	155	177	146	144	146	145	97	113	78	161	131	110	87	117	166	70	107	150
14	56	59	14	58	30	17	142	27	12	77	37	90	63		137	45	36	91	47	59	31	113	57	39	107	17	93	89	112	95	77	106	71	131	106	92	114	83	81	83	82	65	50	47	90	70	47	56	54	103	39	44	79
15	132	164	123	196	167	122	31	115	149	60	142	55	74	137		120	173	46	152	173	106	24	182	144	38	154	189	226	249	232	215	243	208	268	243	229	251	220	218	220	220	171	187	152	235	205	185	161	192	240	144	181	224
16	12	72	30	103	74	30	125	20	56	60	38	73	46	45	120		81	74	60	81	14	96	101	51	90	62	96	134	157	140	122	150	116	175	150	136	159	128	125	109	125	79	95	61	124	112	92	70	99	129	51	88	113
17	91	32	50	28	6	53	178	64	24	113	65	126	99	36	173	81		127	49	23	67	149	21	59	144	30	56	65	88	71	53	82	47	106	81	67	90	59	56	53	59	46	27	44	66	40	18	46	32	73	41	20	49
18	86	118	77	150	121	76	77	69	103	14	96	28	28	91	46	74	127		106	127	60	23	148	98	37	108	142	180	203	186	168	197	162	222	197	183	205	174	172	174	173	125	141	106	189	158	138	115	145	194	98	135	178
19	43	27	39	58	55	30	157	41	53	101	16	110	78	47	152	60	49	106		36	46	128	44	11	128	58	51	113	137	120	102	130	96	155	130	116	139	108	105	60	79	29	75	15	74	67	66	23	81	79	8	69	64
20	78	9	93	22	29	51	179	62	47	113	52	126	99	59	173	81	23	127	36		67	150	8	46	149	52	34	81	104	87	69	98	63	123	98	84	106	75	73	43	47	42	49	21	55	34	33	24	47	63	29	43	44
21	26	58	17	90	61	16	112	9	43	46	36	59	32	31	106	14	67	60	46	67		83	75	38	77	48	81	120	143	126	108	137	102	161	136	122	145	114	111	96	113	64	81	46	110	102	78	55	85	115	38	75	100
22	108	141	99	172	143	98	55	91	125	37	118	32	50	113	24	96	149	23	128	150	83		158	120	14	131	169	202	226	209	191	219	185	244	219	205	228	197	194	196	196	147	164	129	211	185	161	137	168	216	120	157	201
23	87	18	71	14	27	60	187	70	45	134	60	140	120	57	182	101	21	148	44	8	75	158		55	152	40	49	73	96	79	61	89	55	114	89	75	98	67	64	39	39	51	43	30	46	26	24	32	39	59	38	41	35
24	32	37	30	69	68	22	149	32	50	84	6	102	70	39	144	51	59	98	11	46	38	120	55		114	56	61	128	151	134	116	144	110	169	144	130	153	122	119	70	90	40	89	27	85	77	77	36	91	90	19	82	74
25	102	135	93	166	137	98	35	85	119	31	117	17	44	107	38	90	144	37	128	149	77	14	152	114		125	163	197	220	203	185	214	179	238	214	199	222	191	188	191	190	141	158	84	205	179	155	92	162	210	120	151	195
26	74	38	31	41	13	34	160	45	6	94	54	107	80	17	154	62	30	108	58	52	48	131	40	56	125		76	72	95	78	60	89	54	113	88	74	97	66	63	66	66	86	34	59	73	53	31	53	38	86	50	27	62
27	108	24	75	35	63	70	198	81	81	128	67	142	114	93	189	96	56	142	51	34	81	169	49	61	163	76		70	93	76	59	87	52	112	87	73	95	64	62	10	29	17	44	36	37	16	38	39	40	29	45	51	14
28	145	90	103	59	59	106	232	116	77	166	133	179	152	89	226	134	65	180	113	81	120	202	73	128	197	72	70		23	6	12	17	18	42	18	11	25	20	20	93	71	87	38	110	79	58	48	101	34	111	105	44	89
29	168	113	126	82	82	129	255	140	100	189	156	203	175	112	249	157	88	203	137	104	143	226	96	151	220	95	93	23		30	35	7	41	17	41	34	6	43	43	116	94	110	61	133	102	81	72	125	57	134	129	68	112
30	151	97	109	65	65	112	238	123	84	172	139	186	158	95	232	140	71	186	120	87	126	209	79	134	203	78	76	6	30		18	23	24	48	24	18	31	26	15	100	77	93	44	116	85	65	55	108	40	117	112	51	96
31	133	79	91	47	47	94	220	105	66	154	122	168	141	77	215	122	53	168	102	69	108	191	61	116	185	60	59	12	35	18		28	6	53	29	16	37	14	8	82	60	75	26	98	67	47	37	90	22	99	94	33	78
32	161	107	120	75	75	123	249	133	94	183	150	196	169	106	243	150	82	197	130	98	137	219	89	144	214	89	87	17	7	23	28		35	25	34	28	8	36	37	110	88	104	55	127	96	75	65	118	51	128	122	61	106
33	127	72	85	41	41	88	214	99	60	148	115	162	134	71	208	116	47	162	96	63	102	185	55	110	179	54	52	18	41	24	6	35		59	34	20	43	12	13	76	53	69	20	92	61	40	31	84	16	93	88	27	72
34	185	132	145	100	100	147	273	158	119	207	175	221	194	131	268	175	106	222	155	123	161	244	114	169	238	113	112	42	17	48	53	25	59		59	53	17	61	56	135	113	129	80	151	120	100	90	143	75	153	147	86	131
35	162	107	120	75	75	122	248	133	94	183	150	196	169	106	243	150	81	197	130	98	136	219	89	144	214	88	87	18	41	24	29	34	34	59		14	43	22	31	110	88	104	55	126	95	75	65	118	51	128	122	61	106
36	149	93	106	61	61	108	234	119	80	168	136	182	155	92	229	136	67	183	116	84	122	205	75	130	199	74	73	11	34	18	16	28	20	53	14		36	8	24	96	74	90	41	112	81	61	51	104	37	114	108	47	92
37	170	115	128	84	84	131	257	142	102	191	158	205	177	114	251	159	90	205	139	106	145	228	98	153	222	97	95	25	6	31	37	8	43	17	43	36		45	45	118	96	112	63	135	104	83	73	127	59	136	130	70	114
38	139	85	97	53	53	100	226	111	72	160	127	174	146	83	220	128	59	174	108	75	114	197	67	122	191	66	64	20	43	26	14	36	12	61	22	8	45		22	88	65	81	32	104	73	53	43	96	28	105	100	39	84
39	136	82	95	50	50	97	223	108	69	157	125	171	144	81	218	125	56	172	105	73	111	194	64	119	188	63	62	20	43	15	8	37	13	56	31	24	45	22		85	63	79	30	101	70	50	40	93	25	103	97	36	81
40	118	27	34	25	53	80	207	91	71	160	76	173	146	83	220	109	53	174	60	43	96	196	39	70	191	66	10	93	116	100	82	110	76	135	110	96	118	88	85		22	54	55	45	15	26	36	41	51	20	53	61	4
41	137	56	97	25	53	95	225	105	71	159	114	173	145	82	220	125	59	173	79	47	113	196	39	90	190	66	29	71	94	77	60	88	53	113	88	74	96	65	63	22		46	41	64	8	13	35	60	37	42	73	48	18
42	95	29	57	45	73	49	176	59	72	110	49	124	97	65	171	79	46	125	29	42	64	147	51	40	141	86	17	87	110	93	75	104	69	129	104	90	112	81	79	54	46		61	18	68	33	103	14	57	74	27	68	58
43	107	59	64	29	20	67	193	78	39	127	87	140	113	50	187	95	27	141	75	49	81	164	43	89	158	34	44	38	61	44	26	55	20	80	55	41	63	32	30	55	41	61		70	49	28	19	83	4	75	67	6	51
44	72	12	39	44	50	30	118	41	53	92	127	105	78	47	152	61	44	106	15	21	46	129	30	27	84	59	36	110	133	116	98	127	92	151	126	112	135	104	101	45	64	18	70		59	51	54	9	76	65	8	64	49
45	132	42	48	32	60	94	222	105	78	174	90	188	161	90	235	124	66	189	74	55	110	211	46	85	205	73	37	79	102	85	67	96	61	120	95	81	104	73	70	15	8	68	49	59		21	43	39	45	34	68	55	11
46	124	44	94	12	40	96	213	86	58	147	83	158	131	70	205	112	40	158	67	34	102	185	26	77	179	53	16	58	81	65	47	75	40	100	75	61	83	53	50	26	13	33	28	51	21		22	76	24	45	60	35	22
47	104	42	62	10	18	64	190	75	36	124	82	138	110	47	185	92	18	138	66	33	78	161	24	77	155	31	38	48	72	55	37	65	31	90	65	51	73	43	40	36	35	103	19	54	43	22		118	14	55	58	25	32
48	81	15	48	46	53	39	127	50	62	136	136	114	87	56	161	70	46	115	23	24	55	137	32	36	92	53	39	101	125	108	90	118	84	143	118	104	127	96	93	41	60	14	83	9	39	76	118		72	61	17	67	64
49	111	56	69	25	25	71	197	82	43	131	97	145	117	54	192	99	32	145	81	47	85	168	39	91	162	38	40	34	57	40	22	51	16	75	51	37	59	28	25	51	37	57	4	76	45	24	14	72		70	73	10	47
50	138	47	54	45	73	100	227	110	91	180	96	193	166	103	240	129	73	194	79	63	115	216	59	90	210	86	29	111	134	117	99	128	93	153	128	114	136	105	103	20	42	74	75	65	34	45	55	61	70		73	81	24
51	51	20	31	52	47	22	149	33	45	84	24	102	70	39	144	51	41	98	8	29	38	120	38	19	120	50	45	105	129	112	94	122	88	147	122	108	130	100	97	53	73	27	67	8	68	60	58	17	73	73		61	57
52	100	52	58	42	14	61	186	71	32	121	81	134	107	44	181	88	20	135	69	43	75	157	41	82	151	27	51	44	68	51	33	61	27	86	61	47	70	39	36	61	48	68	6	64	55	35	25	67	10	81	61		57
53	122	31	38	21	62	84	211	95	157	164	80	177	150	79	224	113	49	178	64	44	100	201	35	74	195	62	14	89	112	96	78	106	72	131	106	92	114	84	81	4	18	58	51	49	11	22	32	64	47	24	57	57	