

La ϕ -ecuación de Tricomi

Diego A. Castro G.¹ y Alexander Gutiérrez G.²

Recepción: 15-11-2017 | Aceptación: 06-06-2018 | En línea: 15-06-2018

MSC: 34C25, 34D45, 34D20

doi:10.17230/ingciencia.14.27.1

Resumen

En este artículo se estudia una ecuación diferencial no lineal autónoma que modela el movimiento de un ϕ -péndulo amortiguado con forzamiento constante. En el caso disipativo se presentan dos resultados, por un lado, usando la aplicación de Poincaré y funciones de energía, se establece un criterio suficiente para determinar la existencia, unicidad y estabilidad asintótica de una solución periódica de segunda clase y por otro lado, se presenta un criterio con el que se estima analíticamente la cuenca de atracción de un equilibrio asintóticamente estable con ayuda del principio de invarianza de Lasalle. Mientras que en el caso conservativo se dan condiciones necesarias para que la imagen de la función periodo esté definida en un intervalo no acotado. Los resultados obtenidos en el caso disipativo son una generalización de los establecidos por Tricomi en el caso newtoniano.

Palabras clave: Soluciones periódicas; atractores; estabilidad.

¹ Universidad Tecnológica de Pereira, xandercastro@utp.edu.co, Risaralda, Colombia.

² Universidad Tecnológica de Pereira, alexguti@utp.edu.co,
<https://orcid.org/0000-0002-7228-8168>, Risaralda, Colombia.

Tricomi's ϕ -equation

Abstract

In this paper we study an autonomous nonlinear differential equation that models the movement of a damped ϕ -pendulum with constant forcing. In the dissipative case, two results are presented, on the one hand, using the application of Poincaré and energy functions, a sufficient criterion is established to guarantee the existence, uniqueness and asymptotic stability of a periodic solution of the second kind and on the other hand, a criterion is presented with which the basin of attraction of an asymptotically stable equilibrium is estimated analytically with the help of the Lasalle's invariance principle. While in the conservative case there are necessary conditions for range of the period function to be defined in an unbounded interval. The results obtained in the dissipative case are a generalization of those established by Tricomi in the newtonian case.

Keywords: Periodic solutions; attractors; stability.

1 Introducción

La ecuación del péndulo forzado juega un papel muy importante en el desarrollo del análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales no lineales, pues surge en forma natural en varias aplicaciones de ingeniería, ver [1],[2] y porque es un paradigma en la teoría del caos [3]. Una recopilación actualizada de resultados globales y algunos datos históricos se puede consultar en [4].

Más concretamente nuestro interés se centra en la ecuación del péndulo forzado de la forma:

$$x'' + cx' + a \operatorname{sen}(x) = b, \quad (1)$$

donde b, a son constantes positivas y c es una constante no negativa, que se conoce como la ecuación de Tricomi, debido a los trabajos que él hizo sobre la sincronización de motores eléctricos [5],[6]. Un cálculo sencillo muestra que (1) tiene dos, una o ninguna solución de equilibrio dependiendo si $b < a$, $b = a$ o $b > a$ respectivamente. Además, cuando $b > a$ no existen órbitas heteroclinas, sin embargo, existe una solución periódica de segunda clase, es decir, una solución de la forma $x(t) = \pm t + \varphi(t)$ donde φ es una función 2π -periódica, estas soluciones también son conocidas como

rotaciones. En los artículos [7],[8] se estudia la existencia y estabilidad de rotaciones. De otro lado, si $b \leq a$, existe $c_0(a, b) > 0$ tal que si $c > c_0(a, b)$ entonces (1) tiene dos órbitas heteroclinas pero no rotaciones, mientras que si $c \leq c_0(a, b)$ (1) tiene una rotación y una órbita heteroclina. Estimar $c_0(a, b)$ es un problema muy importante y delicado como los siguen los trabajos [9],[10].

La generalización de la ecuación (1) que se estudiará, y que en adelante se llamará la ϕ -ecuación de Tricomi, es:

$$(\phi(x'))' + cx' + a \operatorname{sen}(x) = b, \tag{2}$$

donde $a > 0, c, b \geq 0, I, J$ son intervalos en $\mathbb{R}, 0 \in I, \phi: I \rightarrow J$ un difeomorfismo creciente tal que $\phi(0) = 0$. La ecuación (2) aparece en varios contextos: en flujos relativistas con la ecuación de Klein-Gordon no lineal amortiguada [11], cuando $\phi(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, en procesamiento de señales [12], cuando $\phi(y) = |y|y^{p-1}$ con $p > 1$ o en modelos de epidemiología con retraso [13], entre otras. En particular, son de interés los siguientes tipos de operadores:

1. $\phi(y)$ es *singular*, es decir, $I = (y_1, y_2)$, donde $y_1 < 0 < y_2$ y $\lim_{y \rightarrow y_i} \phi(y) = \pm\infty, i = 1, 2$.
2. $\phi(y)$ es *regular no acotado*, es decir $I = \mathbb{R}$ y $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \phi(y) = \pm\infty$.
3. $\phi(y)$ es *regular acotado*, es decir $I = \mathbb{R}$ y $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \phi(y) \in \mathbb{R}^\pm$.

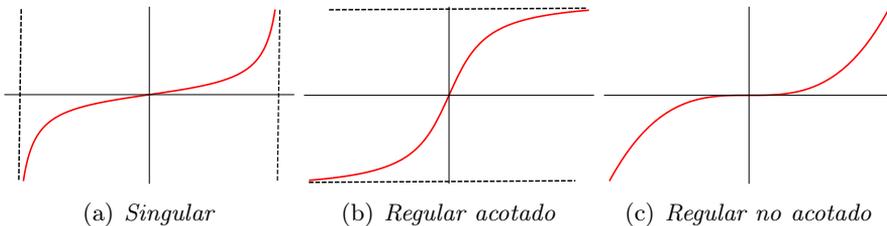


Figura 1: Algunos tipos de operadores.

La existencia de soluciones periódicas de ecuaciones del tipo ϕ -laplaciano, con ϕ singular, regular acotado o regular no acotado, ha sido ampliamente estudiada por varios autores, por ejemplo [14],[15],[16],[17],[18],[19]. Sin embargo, es menos frecuente estimar en forma analítica cuencas atractivas o determinar la existencia de soluciones periódicas de segunda clase, ver [4],[20]. Motivados por este hecho se presentan dos resultados principales asociados a (2) con disipación: el Teorema 3.2 en donde se estima en forma analítica la cuenca de atracción de una solución de equilibrio siempre que $b < a$, con ayuda del principio de invarianza de Lasalle, y por otro lado, el Teorema 3.4 en donde se demuestra la existencia y estabilidad asintótica de una única solución periódica de segunda clase, cuando $b > a$.

Otros resultados notables son: el Teorema 2.2, que muestra la no existencia de rotaciones en el caso conservativo no homogéneo, la clasificación de la solución de equilibrio degenerada siempre que $a = b$, Teoremas 2.3 y 3.3, en el caso conservativo y disipativo, respectivamente. Finalmente, en el caso conservativo y $b < a$, el Teorema 2.1 garantiza la existencia de la función periodo, asociada a ϕ , cuya imagen es un subconjunto no acotado de \mathbb{R} . Es de anotar que en el Teorema 2.1 se establece la hipótesis (H) con la finalidad de asegurar la existencia de las dos órbitas homoclinas en función de ϕ y este hecho juega un papel muy importante a la hora de demostrar los Teoremas 3.2 y 3.4. Obsérvese que la hipótesis (H) se cumple en forma natural cuando ϕ es regular no acotada como sucede en (1), pero cuando ϕ es regular acotada la hipótesis (H) se hace necesaria como ilustra el Ejemplo 2.1. Una expresión similar a (5), fue obtenida en [21] para otro tipo de ecuaciones con ϕ -laplaciano.

El artículo está estructurado de la siguiente forma: después de la introducción, en la sección 2 se estudia el caso conservativo donde se hace un análisis cualitativo de la ecuación (2) estableciendo una clasificación, en términos de los parámetros a, b , de las posibles dinámicas del sistema y finalmente, en la sección 3, se estudia el caso disipativo y se demuestran los resultados principales.

2 Caso conservativo

En esta sección se considera el caso conservativo, es decir, cuando en (2) no hay disipación. La ecuación (2) se puede reescribir como:

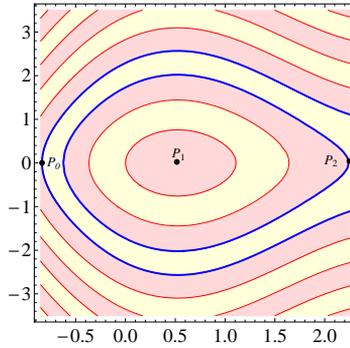


Figura 2: Curvas de nivel de la energía $E(x, y)$ cuando $b < a$. En azul curva de nivel $E(x, y) = F(q) - F(\pi - q)$ asociada a la homoclina.

$$\begin{cases} x' = -\frac{d}{dy}G(y) \\ y' = \frac{d}{dx}F(x), \end{cases} \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} F(x) &= bx + a \cos(x) \\ G(y) &= -\int_0^y \phi^{-1}(s) ds, \end{aligned}$$

y el hamiltoniano asociado es $H(x, y) = F(x) + G(y)$. Ahora como ocurre en el caso newtoniano si $b < a$ entonces (3) tiene dos soluciones de equilibrio geoméricamente diferentes que están dadas por:

$$p_1 = (q, 0), \quad p_2 = (\pi - q, 0), \quad q = \arcsen(b/a)$$

donde p_1 es un centro no lineal y $p_0 = (-\pi - q), p_2$ son sillas, ver Figura 2. Si $b \geq a$ entonces (3) tiene o bien un único punto crítico cúspide, $p_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, cuando $b = a$ o no tiene puntos críticos ni rotaciones cuando $b > a$

2.1 Función periodo y no existencia de rotaciones ($b < a$)

Con la idea de establecer propiedades de la función periodo y clasificar los diferentes tipos de soluciones periódicas en el cilindro $\mathcal{C} = S^1 \times \text{Im}(\phi)$, pasamos a definir la función energía:

$$E(x, y) = -F(x) - G(y) + F(q) \quad (4)$$

Entonces la órbita que pasa por $(l, 0)$ con $q < x(0) = l < \pi - q$, es una curva de Jordan que rodea a p_1 y corresponde a la solución periódica de (3) y se llaman libración en \mathcal{C} . Más aún l es la amplitud máxima de solución periódica de (3), mientras que m_l es la amplitud mínima, donde m_l también es solución de $E(x, 0) = F(q) - F(l) > 0$, de otro lado, el valor máximo y mínimo de y debe satisfacer

$$G(y) = F(l) - F(q),$$

como G es una función no positiva que pasa por cero y monótona en los intervalos $\text{Im}(\phi) \cap \mathbb{R}^+$ y $\text{Im}(\phi) \cap \mathbb{R}^-$, tiene sentido denotar por

$$(G^{-1}(m))^\pm = \{y \in \text{Im}(\phi) \cap \mathbb{R}^\pm : G(y) = m\}.$$

Así una condición necesaria y suficiente para la existencia de la órbita cerrada es que $G^{-1}(F(l) - F(q))^-$ y $G^{-1}(F(l) - F(q))^+$ sean no vacías. Si

$$l^* = \max_{l \in]q, \pi - q[} \{\text{Im}(\phi) \cap G^{-1}(F(l) - F(q))^\pm \neq \emptyset\},$$

entonces para cada $q < l < l^*$ la función periodo esta dada por:

$$T_{a,b}(l) = \int_{m_l}^l \frac{dx}{\phi^{-1}((G^{-1}(F(l) - F(x)))^+)} - \int_{m_l}^l \frac{dx}{\phi^{-1}((G^{-1}(F(l) - F(x)))^-)}. \quad (5)$$

Usando la observaciones anteriores se presenta un resultado sobre algunas propiedades de la función periodo:

Teorema 2.1. *Si ϕ satisface la hipótesis:*

$$(H) \text{Im}(\phi) \cap G^{-1}(F(\pi - q) - F(q))^\pm \neq \emptyset,$$

entonces la función periodo $T_{a,b}(l)$, definida en (5), satisface:

$$\lim_{l \rightarrow q^+} T_{a,b}(l) = \frac{2\pi\sqrt{\phi'(0)}}{(a^2 - b^2)^{1/4}}, \quad \lim_{l \rightarrow (\pi - q)^-} T_{a,b}(l) = +\infty.$$

Nota 2.1. El límite de la izquierda dice que la función periodo se puede aproximar con el periodo de la linealización de (2) alrededor de p_1 , claramente no depende de la hipótesis (H), mientras que la existencia de la homoclina $E(x, y) = F(q) - F(\pi - q)$ depende de ϕ . Así que cuando ϕ es o bien singular o regular no acotada, es decir, $\text{Im}(\phi) = \mathbb{R}$, se garantiza la existencia de la homoclina, pues la hipótesis (H) se satisface naturalmente, mientras que si ϕ es acotada regular o $\text{Im}(\phi) \neq \mathbb{R}$, se debe imponer (H) para garantizar la existencia de la homoclina.

Ejemplo 2.1. Al considerar la función regular no acotada $\phi(y) = \exp(y) - 1$, se tiene $\text{Im}(\phi) =] - 1, \infty[$ y

$$\lim_{y \rightarrow -1^+} G^-(y) = -1, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} G^+(y) = -\infty.$$

Además $F(\pi - q) - F(q) = b(\pi - q) - 2\sqrt{a^2 - b^2}$. Tomando $b/a \ll 1$, entonces la homoclina no existe, pues $\text{Im}(\phi) \cap G^{-1}(F(\pi - q) - F(q))^- = \emptyset$, mientras si $b/a \approx 1$, $\text{Im}(\phi) \cap G^{-1}(F(\pi - q) - F(q))^- \neq \emptyset$, lo que asegura la existencia de la homoclina, ver Figura 3.

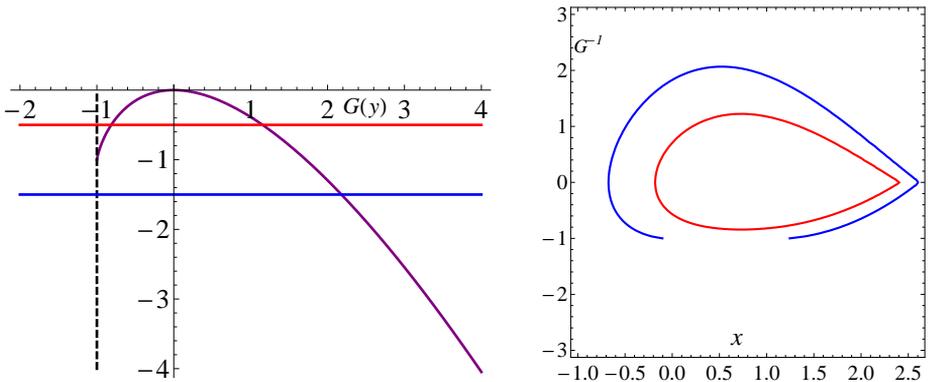


Figura 3: La función G definida en el ejemplo 2.1 (izquierda). Órbita homoclina asociada a $E(x, y) = E(p_2)$, en azul cuando $b/a \ll 1$ y en rojo cuando $b/a \approx 1$ (derecha).

De otro lado, aunque las rotaciones también son curvas cerradas en el cilindro \mathcal{C} no son homotópicamente equivalentes a las libraciones, debido a que las libraciones son homotópicamente equivalentes a un punto, mientras

que las rotaciones no. Un cálculo sencillo muestra que (3) tiene rotaciones si se satisface la hipótesis (H) y $b = 0$.

Ahora, mostremos que si $b \neq 0$ no existen rotaciones en el cilindro \mathcal{C} . Es suficiente mostrar que la variedad inestable asociada a p_2 en el cilindro no está acotada. En efecto, bajo la hipótesis (H), se deben encontrar los elementos $y \in \text{Im}(\phi)$ tales que

$$E(p_2 + (2\pi k, y)) = F(q) - F(\pi - q), \quad k \in \mathbb{Z}$$

que después de algunos cálculos, se llega a las siguientes ecuaciones

$$y = (G^{-1}(\mp 2k\pi b))^{\pm}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En cualquier caso $y \in \partial \text{Im}(\phi)$, lo que implica que la variedad inestable asociada a p_2 no está acotada. Queda demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *El sistema (3) no tiene rotaciones cuando $b \neq 0$ y ϕ satisface la hipótesis (H).*

Teniendo en cuenta la observación 2.1, el Teorema 2.2 se satisface en particular si ϕ es o bien singular o regular no acotada.

Corolario 2.1. *El sistema (3) no tiene rotaciones cuando $b \neq 0$ y ϕ es o bien singular o acotada regular.*

2.2 Casos $b \geq a$

Como se dijo al inicio de esta sección, si $a = b$ el hamiltoniano asociado a (3) tiene un único punto fijo que se denota por $p_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ cuya matriz jacobiana es:

$$J(p_4) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\phi'(0)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que $J(p_4)$ no es idénticamente cero y tiene valores propios cero. Se usara [22, Teorema 3, p. 151] para mostrar que p_4 es un punto cúspide, ver Figura 4.

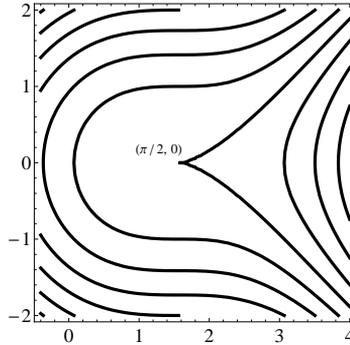


Figura 4: p_4 es una cúspide para (3) cuando $a = b$.

Teorema 2.3. Si ϕ es una función analítica en una vecindad de cero entonces $p_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ es una cúspide para (3) si $a = b$.

Prueba 2.1. Lo primero es escribir la serie de Taylor del sistema (3) alrededor de p_4 :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\phi'(0)}y + o(y^2) \\ y' = \frac{a}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + o((x - \pi/2)^4). \end{cases}$$

Ahora usando el cambio de variable $x = x - \frac{\pi}{2}$ y $y = \frac{1}{\phi'(0)}y$ se tiene que la forma normal es:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{a}{\phi'(0)}x^2. \end{cases} \tag{6}$$

Como la segunda ecuación de (6) es par entonces de [22, Teorema 3 p.151] se sigue que p_4 es un punto cúspide.

Finalmente, si $b > a$ el sistema (3) no tiene soluciones periódicas, en efecto, $\text{div } y \left(-\frac{d}{dy}G(y), \frac{d}{dx}F(x) \right) = (b - a \text{sen } x) > 0$, así el criterio de Dulac garantiza la no existencia de soluciones periódicas.

3 Caso disipativo

El sistema asociado a la ecuación (2) es

$$\begin{cases} x' = \phi^{-1}(y) \\ y' = b - a \operatorname{sen}(x) - c\phi^{-1}(y), \end{cases} \quad (7)$$

y en esta sección se estudiará el sistema (7) en términos de los parámetros a, b . Si $b < a$, las soluciones de equilibrio p_0 y p_2 seguirán siendo sillas, como ocurre en el caso conservativo, mientras que p_1 pasará de ser un centro no lineal, en el caso conservativo, a un sumidero espiral.

Mientras que si $b = a$ la solución de equilibrio p_4 es un nodo-silla, ver Figura 6, finalmente si $b > a$ no existen soluciones de equilibrio pero sí existe una única rotación asintóticamente estable.

3.1 Cuenca de atracción ($b < a$)

Pasamos a estimar la cuenca atractiva para la solución de equilibrio p_1 del sistema (7), usando el principio de invarianza de Lasalle:

Teorema 3.1 (Principio de invarianza de Lasalle [3]). *Supóngase u_0 una solución de equilibrio del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $L: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Lyapunov en u_0 , \mathcal{U} un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y \mathcal{Q} un subconjunto cerrado, acotado contenido en \mathcal{U} tal que $u_0 \in \mathcal{Q}$. Entonces, si \mathcal{Q} es positivamente invariante y no existen soluciones enteras en $\mathcal{Q} - \{u_0\}$ para las cuales L sea constante, entonces u_0 es asintóticamente estable y \mathcal{Q} esta contenido en la cuenca de atracción de u_0 .*

Ahora presentamos el primer resultado principal, Teorema 3.2, donde estimamos la cuenca atractiva de la solución de equilibrio p_1 , como se ilustra en la Figura 5 cuando ϕ es regular acotada. En conveniente un poco de notación antes de presentar la demostración, denotamos con $m_{\pi-q}$ al número real que satisface $E(m_{\pi-q}, 0) = F(q) - F(\pi - q)$ tal que $-\pi - q < m_{\pi-q} < q$, donde E es la función de energía definida en (4).

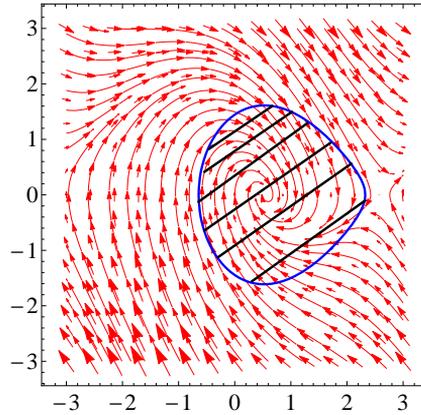


Figura 5: Ilustración de la cuenca atractiva de p_1 en el caso disipativo de la ϕ -ecuación de Tricomi y $b < a$.

Teorema 3.2. Si ϕ satisface la hipótesis (H) entonces la solución de equilibrio $p_1 = (\arcsen(b/a), 0)$ de (7) tiene al conjunto

$$Q = \{(x, y) : E(x, y) < E(m_{\pi-q}, 0), m_{\pi-q} < x < \pi - q\}$$

como cuenca de atracción.

Prueba 3.1. Se demostrará primero que E es una función de Lyapunov, en efecto, $E(p_1) = 0$ y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x, y) &= -\frac{\partial H}{\partial x}x' - \frac{\partial H}{\partial y}y' \\ &= -\frac{d}{dx}F(x)\phi^{-1}(y) - \frac{d}{dy}G(y)(b - a\sen x - c\phi^{-1}(y)) \\ &= -c(\phi^{-1}(y))^2 \leq 0, \end{aligned}$$

y además $E(x, y)$ es positiva en $Q - \{p_1\}$. Ahora, para estimar la cuenca de atracción asociada a p_1 tómesese r tal que $0 < r < E(m_{\pi-q}, 0)$ y defina:

$$Q_r = \left\{ (x, y) : E(x, y) \leq r \text{ y } m_{\pi-q} < x < \pi - q \right\}.$$

Entonces $p_1 \in Q_r$ para todo $0 < r < F(q) - F(\pi - q)$.

Q_r es positivamente invariante: en efecto, supóngase que $(x(t), y(t))$ es solución de (7) tal que $(x(0), y(0)) \in Q_r$. Si $x(t) \geq \pi - q$ o $m_{\pi-q} \leq x(t)$, entonces deben existir $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = \pi - q$ o $x(t_1) = m_{\pi-q}$, en consecuencia, para $i = 0, 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} E(x(t_i), y(t_i)) &= -F(x(t_i)) + F(q) - G(y(t_i)), \\ &= E(m_{\pi-q}, 0) - G(y(t_i)) \geq E(m_{\pi-q}, 0), \end{aligned}$$

la última desigualdad se obtiene debido a que la función $G(y)$ es no positiva para $y \in \text{Im}(\phi)$. Sin embargo, $E(x(0), y(0)) \leq r < E(m_{\pi-q}, 0)$ y $\frac{d}{dt}E(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in Q_r$ lo que contradice la existencia de t_0 o t_1 . Por consiguiente Q_r es positivamente invariante.

En Q_r solo hay una solución entera: si existiera una solución entera $(x(t), y(t))$ diferente de p_1 en Q_r entonces $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) \equiv 0$, lo que implica $\phi^{-1}(y(t)) = 0$, y de la hipótesis sobre ϕ se sigue que $y(t) \equiv 0$. De otro lado, la primera ecuación de (7) satisface $x' \equiv 0$, lo que implica que $x(t)$ es constante. Por consiguiente, de la construcción de Q_r , se tiene que la solución entera debe ser p_1 .

Q_r es cerrado: suponga que $(x_0, y_0) \in \overline{Q_r}$, entonces existe una sucesión $\gamma_i = (x_i, y_i)$ en Q_r , tal que

$$\lim_i \gamma_i = (x_0, y_0),$$

de la continuidad de E y del hecho que $\gamma_i \in Q_r$ se sigue

$$E(x_0, y_0) = E(\lim_i \gamma_i) = \lim_i E(\gamma_i) \leq r,$$

lo que implica que $(x_0, y_0) \in Q_r$. Así se tiene que Q_r cumple las condiciones del Teorema 3.1, Q_r esta en la base de atracción de p_1 . Por consiguiente,

$$Q = \cup_{0 < r < E(m_{\pi-q}, 0)} Q_r = \{(x, y) : E(x, y) \leq r, \quad m_{\pi-q} < x < \pi - q\}.$$

3.2 Caso $a \leq b$.

Con la ayuda de [22, Teorema 1 p 151] se demostrará que $p_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ es un punto silla-nodo, ver Figura 6.

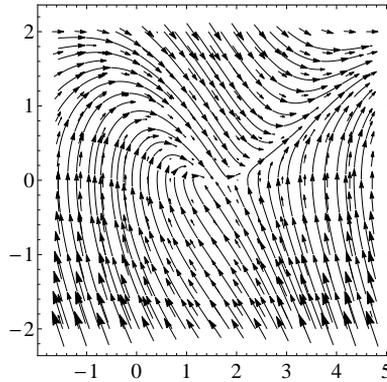


Figura 6: p_4 es un punto silla-nodo en ϕ -ecuación de Tricomi disipativa cuando $b = a$.

Teorema 3.3. *Si ϕ es una función analítica en una vecindad de cero entonces $p_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ es silla-nodo para (7) cuando $a = b$.*

Prueba 3.2. Otra vez siguiendo [22, Teorema 1 p 151.], se reescribe (7) en la forma normal:

$$\begin{cases} x' = p(x, y) \\ y' = y + q(x, y), \end{cases} \tag{8}$$

donde $p(x, y) = \phi^{-1}(y)$, $q(x, y) = a(1 - \text{sen } x) - c\phi(y) - y$, obsérvese que:

$$y = \pi(x) := \phi\left(\frac{a}{c}(1 - \text{sen } x)\right),$$

es solución de $y + q(x, y) = 0$. Ahora se define $\psi(x) := p(x, \pi(x))$ y al hacer la serie de Taylor alrededor de p_4 , se tiene

$$\frac{a}{c} \left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots \right), \tag{9}$$

como el primer término de (9) es par entonces de [22, Teorema 1 p 151.], se concluye que p_4 es silla-nodo.

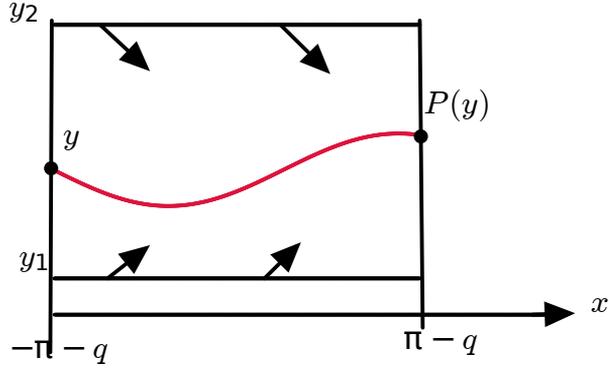


Figura 7: Campo de direcciones del sistema (7) en la banda \mathcal{B} .

Finalmente se presenta el segundo resultado principal, Teorema 3.4, donde se establecen condiciones de existencia y unicidad de la solución periódica de segunda clase siempre que $b > a$.

Teorema 3.4. *Si $b > a$ entonces el sistema (7) tiene una única solución periódica de segunda clase asintóticamente estable siempre que $\frac{b+a}{c}$ esté en el dominio de ϕ .*

Prueba 3.3. Lo primero es definir la banda

$$\mathcal{B} =] - \pi - q, \pi - q[\times] y_1, y_2[,$$

donde $y_1 = \phi\left(\frac{b-a}{c} - \delta\right)$, $y_2 = \phi\left(\frac{b+a}{c} + \delta\right)$, $0 < \delta \ll 1$, $\frac{b+a}{c} + \delta \in \text{Dom}(\phi)$ y observar que la y -nulclinal de (7) está contenida en \mathcal{B} , como se ilustra en la Figura 7. Ahora bien, el campo vectorial asociado a (7) en \mathcal{B} tiene siempre primera componente positiva, mientras que la segunda componente es o bien positiva sobre (s, y_1) o bien negativa en (s, y_2) para $-\pi - q < s < \pi - q$.

Al denotar $(x(t, y_0), y(t, y_0))$ a la única solución de (7) cuya condición inicial es:

$$x(0, y_0) = -\pi - q, \quad y(0, y_0) = y_0,$$

con $y_0 \in]y_1, y_2[\subset \text{Im}(\phi) \cap \mathbb{R}^+$, entonces la trayectoria de la solución, en el tiempo $t(y_0)$, tiene primera coordenada $x(t(y_0), y_0) = \pi - q$.

Existencia: Se define el operador continuo

$$\mathcal{P} :]y_1, y_2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}(y_0) := y(t(y_0), y_0), \quad y_0 \in]y_1, y_2[,$$

y gracias a la dirección del flujo se tiene $\mathcal{P}(y_1) > y_1$ y $\mathcal{P}(y_2) < y_2$, en consecuencia, el teorema del valor medio garantiza la existencia de un $y^* \in]y_1, y_2[$ tal que $\mathcal{P}(y^*) = y^*$. Por lo tanto, (7) tiene al menos una rotación.

Unicidad: supongamos que existen dos soluciones de $\mathcal{P}(y) = y$ en $]y_1, y_2[$, que se denotarán con $y_L(x), y_U(x)$ tales que $y_L(x) < y_U(x)$. Si $\mathcal{P}(y) = y$ en $]y_1, y_2[$, entonces $y(-\pi - q) = y(\pi - q)$ y usando la función de energía (4) se tiene

$$-2\pi b = \Delta E = E(\pi - q, y(\pi - q)) - E(-\pi - q, y(-\pi - q)) = \int_{-\pi - q}^{\pi - q} \frac{dE}{dx} dx, \tag{10}$$

y como $\frac{dE}{dx} = -c\phi^{-1}(y)$, entonces al reemplazar en (10) y simplificar se llega a que

$$\int_{-\pi - q}^{\pi - q} \phi^{-1}(y) dx = \frac{2\pi b}{c},$$

del hecho que $0 < y_U(x) < y_L(x)$ se tiene que $0 < \phi^{-1}(y_U(x)) < \phi^{-1}(y_L(x))$, lo que implica

$$\frac{2\pi b}{c} = \int_{-\pi - q}^{\pi - q} \phi^{-1}(y_U(x)) dx < \int_{-\pi - q}^{\pi - q} \phi^{-1}(y_L(x)) dx = \frac{2\pi b}{c},$$

lo cual es contradictorio. Por consiguiente, la solución periódica de segunda clase es única.

Estabilidad Asintótica: De los razonamientos anteriores y del Teorema de Poincaré-Bendixson se sigue que la rotación es asintóticamente estable en la banda \mathcal{B} .

Agradecimientos

Los autores agradecen a los evaluadores anónimos por sus valiosas sugerencias que ayudaron a mejorar este trabajo. Los autores también agradecen el apoyo institucional de la Universidad Tecnología de Pereira a través de

la Vicerrectoría de Investigación, Innovación y Extensión con el proyecto de investigación: Soluciones periódicas en Modelos AFM código 3-17-4.

Referencias

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books Publishing, 1994. 12
- [2] C. Chicone, *Ordinary Differential equations with Applications*, 3rd ed., Springer, Ed. Springer, 2006. 12
- [3] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems An Introduction to Chaos*, 3rd ed. Elsevier, 2004. 12, 20
- [4] J. Mawhin, *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential equations*. Elsevier, 2004, vol. 1, ch. Global Results for the Forced Pendulum Equation, pp. 533–589. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1874572500800085> 12, 14
- [5] F. Tricomi, “Integrazione di un’equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica,” *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa- Classe di Scienze*, vol. 2, pp. 1–20, 1933. 12
- [6] —, “Sur une équation différentielle de l’électrotechnique,” *Comptes Rendus Mathématique Academie des Sciences, Paris.*, vol. 193, pp. 635–636, 1931. 12
- [7] R. Martins, “The effect of inversely unstable solutions on the attractor of the forced pendulum equation with friction,” *Journal of Differential Equations*, vol. 212, pp. 351–365, 2005. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039604002657> 13
- [8] —, “The attractor of an equation of tricomi’s type,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 342, 2008. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X08000371> 13
- [9] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, Ed. Springer, 1997. 13
- [10] M. Levi, F. C. Hoppensteadt, and W. L. Miranker, “Dynamics of the josephson junction,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 36, pp. 167–198, 1978. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/43636917> 13

- [11] G. Carapella, G. Costabile, N. Martucciello, M. Cirillo, R. Latempa, A. Polcari, and G. Filatrella, “Experimental realization of a relativistic fluxon ratchet,” *Physica C*, vol. 382, pp. 337–341, 2002. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921453402012327> 13
- [12] A. Kuijper, “ p -laplacian driven image processing,” *2007 IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 5, pp. V–257–V–260, Septiembre 2007. 13
- [13] J. Tomeček, “Periodic solution of differential equation with ϕ -laplacian and state-dependent impulses,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 450, pp. 1029–1046, 2017. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X17300781> 13
- [14] J. Burkotová, I. Rachůnková, M. Rohleder, and J. Stryja, “Existence and uniqueness of damped solutions of singular ivps with phi-laplacian,” *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, vol. 121, pp. 1–28, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.121> 14
- [15] Z. Došlá, M. Cecchi, and M. Marini, “Asymptotic problems for differential equations with bounded ϕ -laplacian,” *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, no. 9, pp. 1–18, 2009. 14
- [16] H. D. R and P. Radu, “Existence, localization and multiplicity of positive solutions to ϕ -laplace equations and systems,” *Taiwanese Journal Of Mathematics*, vol. 20, no. 1, pp. 77–89, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.11650/tjm.20.2016.5553> 14
- [17] U. Kaufmann and L. Milne, “Positive solutions for nonlinear problems involving the one-dimensional φ -laplacian,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 461, no. 1, pp. 24–37, mayo 2018. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X17311447> 14
- [18] S. Pérez-González, J. Torregrosa, and P. J. Torres, “Existence and uniqueness of limit cycles for generalized ϕ -laplacian liénard equations,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 439, no. 2, pp. 745–765, 2016. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X16002225> 14
- [19] P. J. Torres, “Nondegeneracy of the periodically forced liénard differential equation with φ -laplacian,” *Communications in Contemporary Mathematics*, vol. 13, no. 2, pp. 283–292, 2011. [Online]. Available: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219199711004208> 14

- [20] J. A. Wright, J. H. Deane, M. Bartucelli, and G. Gentile, “Basins of attraction in forced systems with time-varying dissipation,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 29, no. 1-3, pp. 72–87, 2015. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570415001471> 14
- [21] A. Cabada and F. A. Fernández, “Periodic solutions for some phi-laplacian and reflection equations,” *Boundary Value Problems*, vol. 2016, no. 1, p. 56, Feb 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1186/s13661-016-0565-z> 14
- [22] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, 1991. 18, 19, 22, 23