

**Propagación de las incertidumbres  
en las mediciones aplicada a la  
identificación en el dominio de  
la frecuencia de matrices de inercia,  
rigidez y amortiguación de  
sistemas mecánicos**

Propagation of uncertainty in  
measurements applied to  
frequency-domain identification  
of mass, stiffness and damping  
matrices for mechanical systems

Luis U. Medina\*

Sergio E. Díaz\*\*

*Universidad Simón Bolívar, Venezuela*

---

\* Doctor en Ingeniería, Universidad Simón Bolívar (USB). Profesor Titular adscrito a la sección de Mecánica y Dinámica de Máquinas del Departamento de Mecánica de la usb. Miembro del Grupo de Investigación Dinámica de Sistemas Mecánicos (GID-48) del Decanato de Investigación y Desarrollo de la USB. *lmedina@usb.ve*

\*\*\* Ph.D. en Ingeniería Mecánica, Texas A&M University. Profesor Titular adscrito a la sección de Mecánica y Dinámica de Máquinas del Departamento de Mecánica de la usb. Miembro del Grupo de Investigación Dinámica de Sistemas Mecánicos (GID-48) del Decanato de Investigación y Desarrollo de la USB. *sdiaz@usb.ve*

**Correspondencia:** Luis U. Medina. Departamento de Mecánica, Universidad Simón Bolívar, Apartado 89000, Caracas 1080-A, Venezuela. Tel.: +58-212-9064060/4061. *lmedina@usb.ve*

## Resumen

En la identificación de sistemas mecánicos la atención se ha concentrado en formular y evaluar métodos robustos frente a la presencia de mediciones contaminadas con "ruido", de modo que se relega el estudio de la influencia de la incertidumbre experimental en los parámetros identificados del sistema. Esta investigación presenta una formulación general para la estimación de los errores vinculados con la identificación de las matrices de inercia, rigidez y amortiguación viscosa de sistemas mecánicos linealizados. Se realiza la propagación de las incertidumbres experimentales a través de la función de respuesta en frecuencia, de lo que se obtiene una expresión genérica para el cálculo de su incertidumbre, luego de recurrir a propiedades del producto de Kronecker y del cálculo matricial. Se ilustra la formulación mediante la caracterización experimental de un sistema mecánico simple con el empleo de dos métodos de identificación: mínimos cuadrados y variable instrumental. La validación de la metodología se realiza mediante comparación de los resultados obtenidos con las desviaciones estándares de las muestras disponibles de cada parámetro identificado. La comparación revela coincidencia en orden de magnitud para la mayoría de las incertidumbres de los parámetros estimados, lo que confirma la consistencia de la formulación presentada para la propagación de las incertidumbres experimentales de las mediciones en la identificación de sistemas.

**Palabras clave:** Identificación de matriz de amortiguación viscosa, identificación de matriz de inercia, identificación de matriz de rigidez, propagación de incertidumbre experimental.

## Abstract

In the parameter identification of mechanical systems, the accuracy on the parameter estimates is limited since they are obtained by processing the excitation and response system measurements which are inherently linked to experimental errors. A general formulation to estimate the uncertainty on the estimated mass, stiffness and damping matrices for linear mechanical systems is presented in this article. Pursuing applicability, the proposed methodology is formulated as an extension of the accepted practice to determine uncertainty propagation for multidimensional measurand. The approach can be applied to identification of linear mechanical systems in frequency domain, independently of the algorithm considered for estimating the system parameters. The limitations of the proposed formulation are also discussed and an experimental example is provided to illustrate the suggested methodology by means of two identification methods: ordinary least squares and instrumental variable methods. The comparison of parameters' variability, obtained from the propagation of random uncertainties, with the one generated by direct computation, *i.e.* from a sample of estimates of parameters, reveals the matching orders of magnitude for most of the uncertainties of the parameter estimates, confirming the consistency of the formulation in order to propagate random and systematic measurement uncertainties in the identification of the system parameters.

**Keywords:** Identification of damping matrix, identification of mass matrix, identification of stiffness matrix, measurement uncertainties, system identification, uncertainty propagation.

Fecha de recepción: 28 de abril de 2017  
Fecha de aceptación: 10 de septiembre de 2017

## I. INTRODUCCIÓN

El tratamiento de la incertidumbre en la identificación de sistemas es aún objeto de estudio. Al respecto, la literatura técnica reciente es profusa y diversa, de modo que evidencia la vigencia del interés en la formulación y la evaluación de diferentes métodos de identificación y contempla la incertidumbre en un contexto estadístico [1]-[3].

La incertidumbre en la identificación de parámetros de sistemas mecánicos puede tener diferentes fuentes. En general, la incertidumbre puede ser atribuida al proceso de generación del modelo, al proceso de medición requerido para la identificación, o bien a una combinación de ambas contribuciones de error. No suele discriminarse la incertidumbre conforme a sus diversas fuentes; la atención se concentra, mayoritariamente, en asegurar y demostrar la robustez de la identificación ante la presencia de una incertidumbre genérica o total, comúnmente asumida como un ruido gaussiano.

En particular, el análisis modal operacional se ocupa de la incertidumbre vinculada al proceso de medición, cuando es atribuida a la falta de información medible debido a la limitación, o a la imposibilidad de medir las fuerzas de excitación “ambientales”, así como durante la condición de operación del sistema mecánico a identificar [4]. Aun cuando las mediciones de excitación y respuesta se puedan obtener, una contribución importante de incertidumbre seguirá siendo inherente al proceso de medición. Toda medición realizada estará vinculada a una incertidumbre cuya cuantificación debe entenderse como un indicador necesario de la calidad de la medición realizada. En metrología, la metodología para la caracterización y propagación de las incertidumbres experimentales, es decir, aquellas que derivan del proceso de medición, se encuentra bien establecida, e incluso ha sido divulgada, promovida y actualizada por diversas asociaciones profesionales y científicas reconocidas internacionalmente [5], [6]. En conformidad con la revisión bibliográfica de rigor, resulta escasa la evidencia de la aplicación de esta metodología para la caracterización de incertidumbre experimental en la identificación de sistemas. Por consiguiente, esta investigación no concentra su atención en la formulación o evaluación comparada de un nuevo método de identificación robusto, sino pretende contribuir con el estudio aplicado de la incertidumbre cuyo origen específico es metrológico, y sobre cómo tal incertidumbre se propaga en la identificación de parámetros físicos de sistemas mecánicos linealizados.

La contribución del presente trabajo consiste en establecer una formulación general para el cálculo de la incertidumbre de los parámetros físicos identificados cuando están disponibles las mediciones de excitación y respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia. Se limita esta investigación a la propagación de incertidumbre que tiene origen experimental, pero contempla fuentes de error sistemáticas y aleatorias en la identificación de sistemas lineales o linealizados. Es por medio del algoritmo de identificación mediante el cual se propagan las incertidumbres de origen metrológico. La forma explícita del algoritmo está sujeta al método propuesto para la determinación de los parámetros (e. g. mínimos cuadrados ordinarios, variable instrumental, y basados en formulación bayesiana). Si las incertidumbres en las mediciones son conocidas, el error experimental en los parámetros será determinado a partir de la propagación de las incertidumbres en las mediciones de excitación y respuesta.

Es condición necesaria para la metodología propuesta la disponibilidad de muestras de mediciones repetidas de excitación y respuesta del sistema objeto de estudio, aspecto que, en la práctica, no representa limitación alguna, dado que mediciones repetidas suelen realizarse en todo procedimiento regular de identificación de sistemas. La formulación aborda el problema de estimación de incertidumbre de los parámetros del sistema al considerarlo un problema de propagación de incertidumbre para varios mensurandos (esto es, problema multidimensional [5]). Se recurre a fundamentos de estadística multivariada [7] para la determinación de incertidumbre en los parámetros del sistema.

## II. METODOLOGÍA

Para sistemas mecánicos linealizados es conocida que la relación entre la respuesta medida en el punto  $i$  del sistema mecánico,  $X_i$ , y la respectiva excitación  $F_j$ , medida y aplicada en el punto  $j$  del mismo sistema, está dada en el dominio de la frecuencia, mediante la función de respuesta en frecuencia (FRF)  $H_{ij}$  [8]:

$$X_i(\omega) = H_{ij}(\omega) \cdot F_j(\omega) \quad (1)$$

Esta relación debe extenderse para el conjunto de excitaciones y correspondientes respuestas, para todos los puntos de medición seleccionados en la estructura o sistema:

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{F}(\omega) \quad (2)$$

Siendo  $\mathbf{H}(\omega)$  una matriz  $n \times n$ , con  $n$  denotando los grados de libertad asociados a los puntos de medición seleccionados para la identificación del sistema.

La estimación del error en el cálculo de la FRF puede hallarse a partir de la aplicación del diferencial a la definición de la FRF [9], [10], esto es:

$$\partial \mathbf{H} = \partial (\mathbf{X} \mathbf{F}^{-1}) = \partial \mathbf{X} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{X} \partial \mathbf{F}^{-1} \quad (3)$$

La expresión anterior puede desarrollarse al ser vectorizada mediante el operador  $vec(\ )$  [11]:

$$vec(\partial \mathbf{H}) = vec(\partial \mathbf{X} \mathbf{F}^{-1}) - vec(\mathbf{X} \mathbf{F}^{-1} \partial \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) \quad (4)$$

Empleando la nomenclatura  $\mathbf{x} = vec(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{f} = vec(\mathbf{F})$  y  $\mathbf{h} = vec(\mathbf{H})$ , la variabilidad de la FRF vectorizada vendrá dada por  $E\{\partial \mathbf{h} \partial \mathbf{h}^H\}$ , reconociendo a  $E\{\ }$  como el operador esperanza y a  $(\ )^H$  como la matriz hermitiana. De forma que, al invocar propiedades del producto de Kronecker [9], definido con la típica simbología  $\otimes$ , así como propiedades del cálculo matricial, resulta [12]:

$$\partial \mathbf{h}^H = \partial \mathbf{x}^H \left[ (\mathbf{F}^{-T})^H \otimes \mathbf{I}_n \right] - \partial \mathbf{f}^H \left[ (\mathbf{F}^{-T})^H \otimes (\mathbf{F}^{-1})^H \mathbf{X}^H \right] \quad (5)$$

Los errores de las mediciones de las matrices de excitación y respuesta pueden discriminarse en dos claras contribuciones: las de origen sistemático, asociadas a los transductores y la instrumentación empleados, y aquellas de origen aleatorio, atribuidas al procedimiento del registro de la medición. En la práctica, la medición de la excitación y las respectivas respuestas del sistema mecánico bajo ensayo se efectúan, de forma típica, mediante transductores independientes (e. g. celda de carga en martillo de impacto calibrado para la excitación y acelerómetros instalados superficialmente en el sistema mecánico a identificar para la medición de las respuestas). Los transductores en las mediciones de excitación y respuestas se calibran de forma independiente, con lo cual la correlación de errores sistemáticos, atribuible a un procedimiento común de calibración, se descarta [13]. No obstante, en la instrumentación típica para la identificación de sistemas mecánicos la eventual correlación entre tales errores puede provenir de la

etapa común de conversión analógica-digital que, con la instrumentación adecuada y moderna (es decir, analizador de espectro) para el registro y procesamiento inmediato (esto es, *in situ*) de las mediciones, presenta una contribución de error despreciable frente a las contribuciones de error sistemáticas de los transductores utilizados. Bajo este argumento se considera que los errores en las mediciones de respuesta y excitación no están correlacionados, y la variabilidad de la FRF se reduce a [12]:

$$E\{\partial \mathbf{h} \partial \mathbf{h}^H\} = (\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{I}_n) E\{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^H\} (\mathbf{F}^{-*} \otimes \mathbf{I}_n) + \dots \quad (6)$$

$$\dots + (\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{X} \mathbf{F}^{-1}) E\{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}^H\} (\mathbf{F}^{-*} \otimes \mathbf{F}^{-H} \mathbf{X}^H)$$

En la ecuación previa la nomenclatura  $(\ )^*$  denota conjugada de la matriz. Si  $\mathbf{U}_h$  define a la incertidumbre, o estimación de la variabilidad de la FRF (es decir,  $\mathbf{U}_h \approx E\{\partial \mathbf{h} \partial \mathbf{h}^H\}$ ), entonces a partir de la expresión anterior puede obtenerse [12]:

$$\mathbf{U}_h = (\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{U}_x (\mathbf{F}^{-*} \otimes \mathbf{I}_n) + (\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{X} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{U}_f (\mathbf{F}^{-*} \otimes \mathbf{F}^{-H} \mathbf{X}^H) \quad (7)$$

La incertidumbre en la medición de respuesta,  $\mathbf{U}_x$ , puede ser discriminada en dos contribuciones de errores:

$$\mathbf{U}_x = \mathbf{B}_x + \mathbf{S}_x \quad (8)$$

La contribución  $\mathbf{S}_x$  representa la estimación a la covarianza de la muestra de mediciones repetidas de respuesta, de tamaño  $N$ , y calculada según:

$$\mathbf{S}_x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}^i - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}^i - \bar{\mathbf{x}})^H \quad (9)$$

La contribución  $\mathbf{B}_x$  se refiere a la estimación de  $E\{\partial \mathbf{x}_B \partial \mathbf{x}_B^H\}$ , y representa la estimación del error — de origen sistemático — de la medición de respuesta,  $\partial \mathbf{x}_B$ . Puede estar basado en la calibración del sistema de instrumentación empleado, realizada de forma previa a la identificación, o según información suministrada por el proveedor de los transductores e instrumentación utilizada. De forma general, este término incluye otras estimaciones de contribuciones de error no asociadas a la variabilidad estimada a partir de las mediciones repetidas. Por extensión, la incertidumbre asociada con la medición de la excitación,  $\mathbf{U}_f$ , puede discriminarse de forma similar a las definidas para la respuesta tal como se sugiere en la ecuación 8.

El resultado mostrado en la ecuación 7 expresa el cálculo de la incertidumbre en la FRF como producto de la propagación de las incertidumbres en las mediciones de respuesta y excitación. Esta expresión varía al considerar un estimador de la FRF distinto al formulado en el presente desarrollo, el cual corresponde al caso de una excitación determinística [14]. No obstante, es posible obtener expresiones similares utilizando el mismo análisis de sensibilidad para otro estimador de FRF formulado.

### A. Estimación de la incertidumbre de la rigidez dinámica

De acuerdo con la formulación de la identificación de las matrices de inercia, rigidez y amortiguación viscosa equivalentes, puede ser conveniente propagar la incertidumbre experimental del recíproco de la FRF: la rigidez dinámica, denotada como  $\mathbf{D}(\omega)$ .

Para un sistema lineal, la rigidez dinámica expresada como función de las matrices de inercia, amortiguación y rigidez, la rigidez dinámica corresponde a [8]:

$$\mathbf{D}(\omega) = \begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{I} & i\omega \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (10)$$

La estimación de la variabilidad de la rigidez dinámica,  $\mathbf{U}_d \approx E\left\{ \mathbf{d} \mathbf{d} \mathbf{d}^H \right\}$ , puede hallarse al realizar un análisis de sensibilidad similar al desarrollado para la FRF, y a partir de la relación entre la rigidez dinámica y la FRF (véase [12]):

$$\mathbf{U}_d = \left( \mathbf{H}^{-T} \otimes \mathbf{D} \right) \mathbf{U}_h \left( \mathbf{H}^{-*} \otimes \mathbf{D}^H \right) \quad (11)$$

Por simplicidad en la notación, en la expresión previa no se presenta, de forma explícita, la dependencia de las matrices respecto a la frecuencia.

El resultado señalado por la ecuación 11 indica que la incertidumbre vinculada a la rigidez dinámica puede obtenerse al propagar la incertidumbre de la FRF,  $\mathbf{U}_h$ . Esta incertidumbre es también función de la frecuencia  $\omega$ .

Tal como se ha referido previamente, la necesidad de calcular  $\mathbf{U}_d$  está sujeta a la formulación para estimar las matrices de inercia, rigidez y amortiguación: si se plantea el cálculo de tales matrices en función de la rigidez dinámica o,

de manera análoga, en términos de  $\mathbf{H}^{-1}$ . En la siguiente sección se extiende el análisis de sensibilidad para la determinación de las incertidumbres de los parámetros del sistema.

## B. Estimación de la incertidumbre en los parámetros del sistema

El problema de estimación de las matrices de inercia, amortiguación y rigidez para un sistema linealizado, en el dominio de la frecuencia, puede generalizarse como se plantea a continuación:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{h}) \quad (12)$$

La función  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{h})$  corresponde a la expresión explícita (o algoritmo utilizado) para el cálculo de las matrices del sistema. La variable  $\boldsymbol{\omega}$  denota el vector que agrupa el conjunto de  $k$  frecuencias para las cuales se han medido las respectivas funciones de respuesta en frecuencia del sistema,  $\mathbf{H}(\omega)$ , expresada en su forma vectorizada,  $\mathbf{h}$ , en la ecuación 12.

Para la estimación de la variabilidad en los parámetros identificados, contenidos en la matriz de parámetros  $\mathbf{P}$ , se requiere la forma vectorial dada por la ecuación 12, esto es:

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{h}) \quad (13)$$

En la expresión anterior se ha utilizando la siguiente nomenclatura para las formas vectoriales  $\mathbf{p} = \text{vec}(\mathbf{P}^T)$  y  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{h}) = \text{vec}(\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{h})^T)$ .

Mediante desarrollo en serie de Taylor de primer orden puede determinarse la sensibilidad de los parámetros estimados a los errores en frecuencia y a los errores de la FRF:

$$\Delta \mathbf{p} \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right|_{\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{h}_0} \Delta \boldsymbol{\omega} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{h}_0} \Delta \mathbf{h} \quad (14)$$

La aproximación dada por la ecuación 14 se realiza respecto a las mediciones promedios de FRF, obtenidas para las  $k$  frecuencias seleccionadas, esto

es:  $\omega_0 = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k]^T$ ). Acotando que, siendo válida la linealización de la dinámica del sistema, entonces  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}(\omega_0)$ .

La variabilidad del vector de parámetros,  $\mathbf{p}$ , resulta al estimar la esperanza del producto  $\Delta \mathbf{p} \Delta \mathbf{p}^T$ :

$$E\left\{\Delta \mathbf{p} \Delta \mathbf{p}^T\right\} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0} E\left\{\Delta \omega \Delta \omega^T\right\} \left. \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \omega} \right)^T \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0} + \dots \quad (15)$$

$$\dots + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0} E\left\{\Delta \mathbf{h} \Delta \mathbf{h}^T\right\} \left. \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right)^T \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0} + \mathbf{L}(\Delta \omega, \Delta \mathbf{h})$$

El término  $\mathbf{L}(\Delta \omega, \Delta \mathbf{h})$  agrupa al siguiente desarrollo:

$$L(\Delta \omega, \Delta \mathbf{h}) = 2 \mathit{herm} \left( \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0} E\left\{\Delta \mathbf{h} \Delta \omega^T\right\} \left. \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \omega} \right)^T \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0} \right) \quad (17)$$

En la ecuación 17 el operador  $\mathit{herm}(\cdot)$  corresponde a  $\mathit{herm}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^H)/2$ , siendo  $\mathbf{A}$  una matriz cuadrada.

En concordancia con el contexto estándar de propagación de incertidumbre experimental [5], los denominados “coeficientes de sensibilidad” corresponden a  $\boldsymbol{\theta}_\omega = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0}$  y  $\boldsymbol{\theta}_h = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\omega_0, \mathbf{h}_0}$ , que pueden ser determinados de forma numérica.

Por consiguiente, la matriz de incertidumbre de los parámetros,  $\mathbf{U}_p \approx E\left\{\Delta \mathbf{p} \Delta \mathbf{p}^T\right\}$ , puede calcularse mediante:

$$\mathbf{U}_p \approx \boldsymbol{\theta}_\omega \mathbf{U}_\omega \boldsymbol{\theta}_\omega^T + 2 \mathit{herm}\left(\boldsymbol{\theta}_h \mathbf{U}_{h\omega} \boldsymbol{\theta}_\omega^T\right) + \boldsymbol{\theta}_h \mathbf{U}_h \boldsymbol{\theta}_h^T \quad (18)$$

El término  $\mathbf{U}_{h\omega}$  define la estimación de la matriz de correlación entre los errores de frecuencia y los de las FRF medidas. Su estimación está limitada a la información con la cual se cuente sobre los errores de frecuencia y los de las FRF medidas. En la práctica, se esperaría que solo exista correlación

entre errores de frecuencia y los de la FRF estimada en la misma componente frecuencial. Esto es, se asume que no existe correlación entre el error vinculado a la componente frecuencia  $\omega_j$  y el error asociado a  $\mathbf{H}(\omega_k)$ , con  $\omega_j \neq \omega_k$ .

En el caso de la frecuencia medida, la resolución en frecuencia del dispositivo empleado (e. g. analizador de espectro) para el registro de los spectra de excitación y respuesta, constituye una referencia para la estimación del error sistemático vinculado con cada componente de frecuencia. Para la matriz de incertidumbres  $\mathbf{U}_h$  se tiene que si la excitación es aplicada de forma no permanente, y en distintos puntos del sistema mecánico (e. g. mediante martillo de impacto instrumentado), resulta razonable considerar que no existe correlación entre los errores asociados a cada componente de las FRF estimadas [15].

La matriz  $\mathbf{U}_p$  no solo contiene las estimaciones de los errores vinculados a las matrices de inercia, amortiguación y rigidez determinadas, sino también las correlaciones entre tales errores. Por definición de la variabilidad de cantidades vectoriales [7] la matriz  $\mathbf{U}_p$  es simétrica. Su estructura luce como se indica a continuación:

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} U_{mm} & U_{mc} & U_{mk} \\ & U_{cc} & U_{ck} \\ sim. & & U_{kk} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Al ser de interés las estimaciones de los errores de cada parámetro identificado, entonces las incertidumbres de cada valor de inercia, amortiguación y rigidez están presentes en la diagonal de la matriz  $\mathbf{U}_p$ , esto es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ sim. & & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \cdot diag(\mathbf{U}_p) \quad (20)$$

En la expresión anterior  $\mathbf{I}_n$  y  $\mathbf{0}_n$  identifican a las matrices identidad y nula, respectivamente, cada una de orden  $n \times n$ . Finalmente, las estimaciones de variabilidad de las matrices de parámetros identificadas vienen dadas por:

$$E\left\{(\mathbf{m} - E(\mathbf{m}))(\mathbf{m} - E(\mathbf{m}))^T\right\} \approx \mathbf{u}_m \quad (21)$$

$$E\left\{(\mathbf{c} - E(\mathbf{c}))(\mathbf{c} - E(\mathbf{c}))^T\right\} \approx \mathbf{u}_c \quad (22)$$

$$E\left\{(\mathbf{k} - E(\mathbf{k}))(\mathbf{k} - E(\mathbf{k}))^T\right\} \approx \mathbf{u}_k \quad (23)$$

En las ecuaciones antes presentadas las matrices de los parámetros identificados han sido vectorizadas, esto es  $\mathbf{m}=\text{vec}(\mathbf{M})$ ,  $\mathbf{c}=\text{vec}(\mathbf{C})$ , y  $\mathbf{k}=\text{vec}(\mathbf{K})$ .

En la siguiente sección se ilustra la aplicación de la formulación general propuesta, al emplear un modelo experimental caracterizado mediante dos métodos de identificación.

### III. MONTAJE EXPERIMENTAL

La Fig. 1 corresponde al banco experimental e instrumentación utilizada. Los componentes empleados para la configuración del sistema mecánico se identifican en la señalada figura.

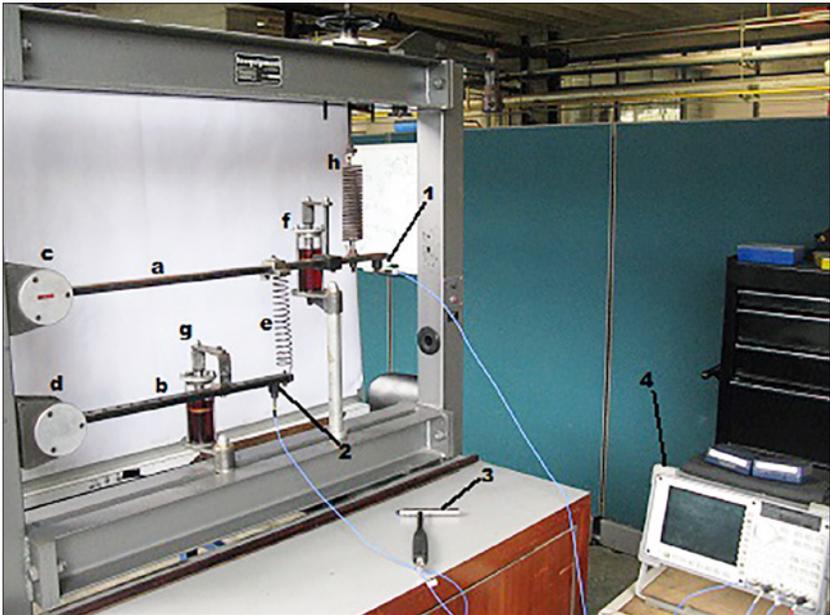


Figura 1. Montaje experimental

El montaje experimental consiste en un arreglo de vigas (a y b en la figura), de sección rectangular, vinculadas entre sí y a un bastidor o marco rígido. Cada viga está articulada en uno de sus extremos al bastidor (c y d), vinculadas entre sí mediante un resorte (e) ligero y flexible. Dos amortiguadores viscosos (f y g) vinculan a cada viga al bastidor del banco. Además, un resorte (h) une a la viga superior (a) al referido bastidor, tal como se muestra en la Fig. 1.

La respuesta del sistema se registra mediante dos acelerómetros piezoeléctricos (1 y 2) fijados magnéticamente, localizados cada uno en puntos de medición sobre las vigas.

La masa incorporada al sistema por cada acelerómetro, junto con su respectiva base para la fijación magnética, es menor al 0,05 % de la masa de la viga más liviana.

La excitación al sistema la produce un martillo de impacto calibrado (3), utilizado para producir impactos sobre las mismas posiciones longitudinales en las cuales se ubican cada uno de los acelerómetros en las respectivas vigas. Detalles de las incertidumbres de origen sistemático, vinculadas a la instrumentación empleada, se encuentran disponibles en [12].

Para asegurar una desviación típica no superior al 5 % del valor promedio tanto en amplitud como en fase, fue necesario realizar un total de 10 mediciones (es decir, 10 excitaciones con sus correspondientes respuestas), las cuales se obtuvieron para cada configuración de excitación.

La primera configuración para las mediciones corresponde a las obtenidas mediante impacto en el punto donde se ubica el acelerómetro 1, mientras que la segunda configuración resultó al aplicar el impacto en la posición del acelerómetro 2.

Tanto las respuestas como las correspondientes excitaciones fueron procesadas por un analizador de espectro (esto es 4 en Fig. 1) de cuatro canales.

El registro de las mediciones de excitación y respuestas se realizó al configurar una ventana de tiempo rectangular de duración de ocho segundos, suficiente para la captura total de las respuestas subamortiguadas del sistema, medidas en los dos puntos indicados.

## IV. RESULTADOS

Con el objeto de validar la formulación planteada mediante la identificación del montaje experimental descrito, solo se contempló la propagación de incertidumbres de origen aleatorio, calculadas a partir de las mediciones de excitación y respuesta. Por consiguiente, para efectos comparativos, las incertidumbres asociadas a los parámetros identificados se obtuvieron mediante: (1) la propagación de las incertidumbres a través de la formulación previamente descrita, que será denotada como “Método Propagado”; y (2) la estimación directa de las desviaciones estándar, obtenidas de la muestra de parámetros identificados al procesar cada par de mediciones de excitación y respuesta repetidas. A fin de diferenciarlo de los resultados obtenidos mediante el “Método Propagado”, este último conjunto de valores de incertidumbres será denotado como “Método Directo”. En este método se procesó una muestra de 10 mediciones repetidas, lo que generó muestras –de igual tamaño– de estimaciones de matrices de inercia, rigidez y amortiguación.

### A. Estimación de parámetros e incertidumbres asociadas

Los respectivos spectra promedios son el resultado del procesamiento del conjunto de mediciones repetidas de excitación y respuestas, en un rango de frecuencia igual a 3 a 15,5 Hz, utilizando una resolución igual a 0,0625 Hz. Se realizó la identificación del montaje experimental mediante dos métodos de identificación: mínimos cuadrados ordinarios y variable instrumental.

Las figuras 2 y 3 muestran la comparación gráfica entre las amplitudes y fases de la matriz FRF media, o promedio (“mean” en las figuras 2 y 3), y las estimadas según mínimos cuadrados ordinarios (“lsm” en las figuras 2 y 3), y variable instrumental (“ivm” en las figuras 2 y 3).

Debido a la sensibilidad inherente del método de mínimos cuadrados ordinarios a la configuración de los puntos seleccionados para el ajuste, fue necesario ensayar diferentes arreglos de puntos seleccionados en las FRF medidas, con el propósito de realizar el ajuste hasta obtener el resultado mostrado en las respectivas gráficas. De la comparación gráfica se evidencia una convergencia satisfactoria a los valores promedios de las FRF medidas para ambos métodos.

Los resultados de los parámetros estimados se resumen en las tablas 1 y 2, ordenados de acuerdo con el método de identificación utilizado.

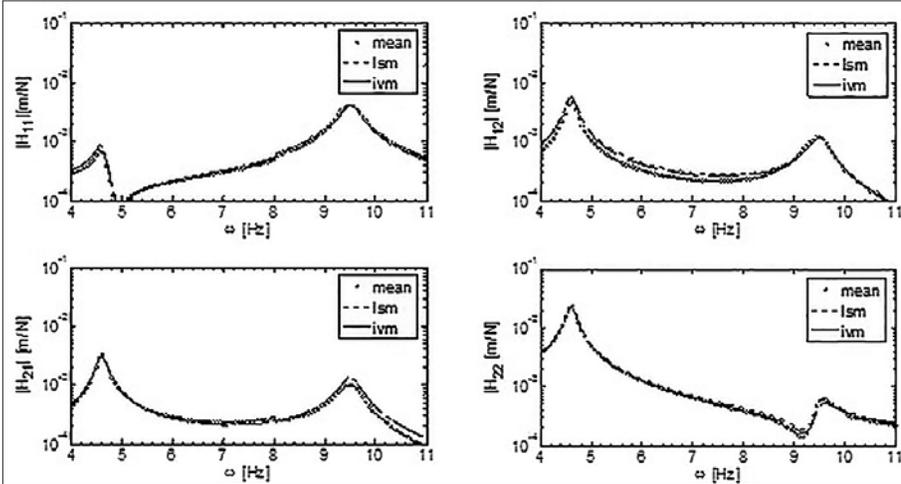


Figura 2. Amplitudes de frf media y de las estimadas según lsm e ivm

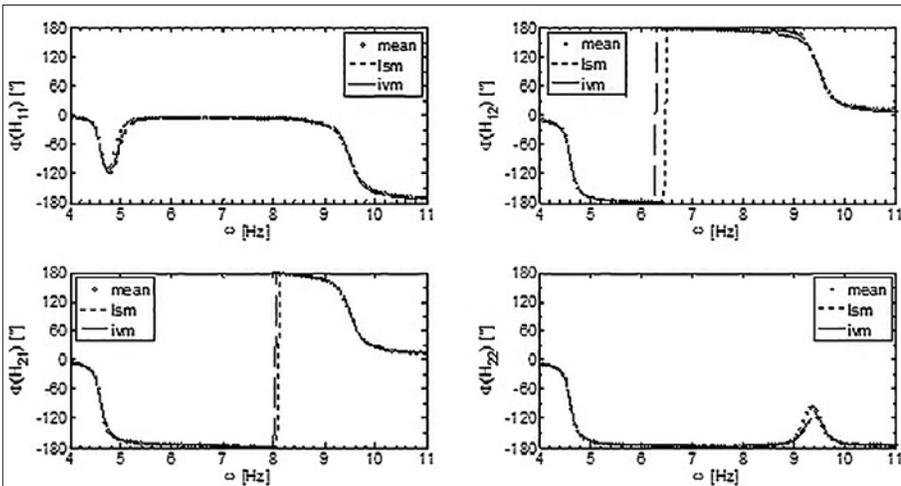


Figura 3. Fases de frf media y de las estimadas según lsm e ivm

La Tabla 1 reporta los resultados obtenidos cuando el método de identificación empleado es el de mínimos cuadrados ordinarios.

**Tabla 1.** Incertidumbres en los parámetros (mínimos cuadrados ordinarios)

Método	$\mathbf{M}, \pm \sqrt{u_{m_{i,j}}}$ [Kg]	$\mathbf{C}, \pm \sqrt{u_{c_{i,j}}}$ [N·s/m]	$\mathbf{K}, \pm \sqrt{u_{k_{i,j}}}$ [N/m]
<i>Directo</i>	$\begin{bmatrix} 1,6309 & -0,0987 \\ 0,1319 & 1,1473 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,5806 & 0,3330 \\ -1,3135 & 1,6963 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,5554 & -1,1919 \\ -0,4709 & 1,1167 \end{bmatrix} \cdot 10^3$
	$\pm \begin{bmatrix} 0,0038 & 0,0045 \\ 0,0010 & 0,0027 \end{bmatrix}$	$\pm \begin{bmatrix} 0,0530 & 0,1254 \\ 0,0065 & 0,0133 \end{bmatrix}$	$\pm \begin{bmatrix} 0,01403 & 0,02279 \\ 0,001131 & 0,004155 \end{bmatrix} \cdot 10^3$
<i>Propagado</i>	$\begin{bmatrix} 1,6327 & -0,0954 \\ 0,1348 & 1,1564 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,5851 & 0,3387 \\ -1,3146 & 1,6951 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6514 & -1,1424 \\ -0,4518 & 1,1801 \end{bmatrix} \cdot 10^3$
	$\pm \begin{bmatrix} 0,0058 & 0,0026 \\ 0,0033 & 0,0021 \end{bmatrix}$	$\pm \begin{bmatrix} 0,0122 & 0,0317 \\ 0,0199 & 0,0056 \end{bmatrix}$	$\pm \begin{bmatrix} 0,01932 & 0,008597 \\ 0,002687 & 0,001707 \end{bmatrix} \cdot 10^3$

Para el caso del “Método Directo”, las matrices de inercia, rigidez y amortiguación reportadas corresponden a los valores medios estimados a partir de la muestra de matrices identificadas a partir del procesamiento de las mediciones repetidas de excitación y respuesta.

Para el “Método Propagado”, las matrices de los señalados parámetros fueron determinadas utilizando las FRF promedios.

Si bien deben esperarse diferencias entre las estimaciones de incertidumbres arrojadas por cada método, puede observarse que, para la mayoría de los parámetros estimados, el orden de magnitud de las incertidumbres obtenidas es el mismo.

En el método de identificación de variable instrumental, los parámetros identificados y sus incertidumbres asociadas se muestran en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Incertidumbres en los parámetros (método de variable instrumental)

Método	$M, \pm \left[ \sqrt{u_{m,i,j}} \right] [\text{Kg}]$	$C, \pm \left[ \sqrt{u_{c,i,j}} \right] [\text{N}\cdot\text{s/m}]$	$K, \pm \left[ \sqrt{u_{k,i,j}} \right] [\text{N/m}]$
<i>Directo</i>	$\begin{bmatrix} 1,6667 & -0,0646 \\ 0,1659 & 1,2270 \end{bmatrix}$ $\pm \begin{bmatrix} 0,0032 & 0,0043 \\ 0,0006 & 0,0012 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,6727 & 0,4519 \\ -1,3315 & 1,6773 \end{bmatrix}$ $\pm \begin{bmatrix} 0,0593 & 0,1385 \\ 0,0067 & 0,0149 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6514 & -1,1428 \\ -0,4518 & 1,1801 \end{bmatrix} \cdot 10^3$ $\pm \begin{bmatrix} 0,01260 & 0,02207 \\ 0,001676 & 0,003517 \end{bmatrix} \cdot 10^3$
<i>Propagado</i>	$\begin{bmatrix} 1,6667 & -0,0645 \\ 0,1659 & 1,2270 \end{bmatrix}$ $\pm \begin{bmatrix} 0,0078 & 0,0022 \\ 0,0039 & 0,0022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,6721 & 0,4492 \\ -1,3316 & 1,6773 \end{bmatrix}$ $\pm \begin{bmatrix} 0,0153 & 0,0338 \\ 0,0203 & 0,0058 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6514 & -1,1428 \\ -0,4518 & 1,1801 \end{bmatrix} \cdot 10^3$ $\pm \begin{bmatrix} 0,02553 & 0,007741 \\ 0,002837 & 0,002070 \end{bmatrix} \cdot 10^3$

Los parámetros del sistema según los métodos “Directo” y “Propagado” se estimaron siguiendo el mismo procedimiento descrito al utilizar como estrategia de identificación el método de mínimos cuadrados. Similar a los resultados presentados para el método de mínimos cuadrados, la mayoría de las incertidumbres dadas por el “Método Directo” y por el “Método Propagado” resultan ser de igual orden de magnitud.

Puede inferirse que la formulación no depende de la estrategia de identificación, luego de verificar su aplicación para un método de identificación directo (mínimos cuadrados ordinarios), y otro iterativo (variable instrumental). No obstante, debe enfatizarse que lo anterior está sujeto a que las incertidumbres vinculadas a las mediciones sean “pequeñas”, de modo que la linealización produzca resultados como los obtenidos en esta validación experimental.

La comparación de los resultados entre los dos métodos aplicados también revela qué incertidumbres son de similar magnitud, las cuales, junto con los valores estimados de los parámetros, confirman la convergencia a la misma solución.

Aunque las incertidumbres sistemáticas asociadas a las mediciones no son propagadas, su inclusión no representa inconveniente alguno en la formulación. Es la disponibilidad de tales incertidumbres lo que puede representar una limitación para su inclusión y, por ende, su propagación en el cálculo de la incertidumbre resultante en los parámetros.

Por otra parte, si bien es cierto que la repetición de mediciones es una práctica común y recomendada en cualquier identificación experimental de sistemas, usualmente suelen registrarse solo los valores promedios de las FRF medidas, lo que limita la disponibilidad de la estimación de la variabilidad de tales FRF medidas.

## V. CONCLUSIONES

La formulación presentada en este trabajo permite estimar las incertidumbres de los parámetros identificados a partir de la discriminación de las contribuciones de incertidumbres de origen metrológico en sistemáticas y aleatorias, conforme al análisis general de propagación de incertidumbre experimental en metrología. El objeto de esta investigación se concentró en el empleo de la información disponible sobre incertidumbre en las mediciones de excitaciones y respuestas, a fin de cuantificar sus contribuciones en la incertidumbre final de las matrices de inercia, rigidez y amortiguación viscosa en un sistema mecánico linealizado.

Se han obtenido expresiones generales (y compactas) para determinar la incertidumbre asociada tanto a la matriz de función de respuesta en frecuencia como su recíproco (rigidez dinámica). Aunque las expresiones obtenidas se limitan a la definición de la matriz de función de respuesta en frecuencia cuando la excitación es determinística, la metodología es la misma si se proponen otros estimadores de FRF.

El valor agregado de la formulación expuesta proviene de la posibilidad de incluir la incertidumbre asociada a la instrumentación empleada (incertidumbre de origen sistemática) y, por ende, su propagación y contribución en el cálculo de la incertidumbre de los parámetros del sistema. La formulación está basada en la práctica aceptada y recomendada para la propagación de incertidumbre experimental en metrología, la cual resulta de utilidad inmediata al investigador que no necesariamente está familiarizado con otras técnicas de análisis estocástico para el estudio de variabilidad.

La evaluación experimental reveló la consistencia de la formulación propuesta para la propagación de incertidumbres estimadas en función de la dispersión de las mediciones procesadas. Las incertidumbres sistemáticas vinculadas a las mediciones realizadas, aunque no fueron contempladas en esta evaluación, serían propagadas a través de los mismos coeficientes

de sensibilidad determinados para la propagación de las incertidumbres de origen aleatorio.

Independiente del tipo de incertidumbre propagada, la mayor limitación de la formulación está en el modelo del sistema a identificar: se asume lineal, o linealizabile en las condiciones de operación para las cuales se realiza la identificación.

Próximos trabajos pueden orientarse a la aplicación de la metodología en la identificación de parámetros modales (frecuencias naturales, coeficientes de amortiguación y constantes modales); esto es, otra alternativa para la caracterización dinámica de sistemas mecánicos. También puede extenderse este procedimiento al tratamiento de incertidumbres experimentales en el contexto del análisis modal operacional, es decir, en métodos de identificación de sistemas sin la medición explícita de la excitación.

Finalmente, con el desarrollo y la divulgación de este trabajo se pretende enfatizar la necesidad de integrar el análisis metrológico de incertidumbre experimental con la identificación de sistemas. Es una vinculación que, según la evidencia de la literatura técnica disponible, ha sido tratada de forma escasa o difusa en el área de identificación robusta.

## Agradecimientos

Los autores manifiestan su reconocimiento al apoyo brindado por el Laboratorio de Dinámica de Máquinas de la Universidad Simón Bolívar para la realización de esta investigación.

## REFERENCIAS

- [1] E. Reynders, K. Maes, G. Lombaert, G. De Roeck, "Uncertainty quantification in operational modal analysis with stochastic subspace identification: Validation and applications," *Mechanical Systems Signal Processing*, vol. 66, pp. 13-30, enero 2016. doi:10.1016/j.ymssp.2015.04.018
- [2] Y. Huang, J. L. Beck, H. Li, "Bayesian system identification based on hierarchical sparse Bayesian learning and Gibbs sampling with application to structural damage assessment," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 318, pp. 382-411, 2017.

- [3] N. Dovetta, P. J. Schmid, D. Sipp, "Uncertainty propagation in model extraction by system identification and its implication for control design," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 791, pp. 214-236, marzo 2016. doi:10.1017/jfm.2016.38
- [4] R. Brincker, C. E. Ventura, Introduction to Operational Modal Analysis. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 2015. doi: 10.1002/9781118535141
- [5] I. BIPM, I. IFCC, I. ISO, "IUPAP and OIML, JCGM 102: 2011, Evaluation of measurement data-Supplement 2 to the 'Guide to the expression of uncertainty in measurement'-Extension to any number of output quantities," International Organization for Standardization ISO, 2011.
- [6] P. da S. Hack, C. S. ten Caten, "Measurement uncertainty: literature review and research trends," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 61, n.º 8, pp. 2116-2124, agosto 2012. doi:10.1109/TIM.2012.2193694
- [7] R. Johnson, D. Wichern, Applied multivariate statistical analysis. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2007.
- [8] D. J. Ewins, Modal testing: theory, practice, and application. Research Studies Press, Baldock, Hertfordshire, Inglaterra, 2000.
- [9] W. J. Vetter, "Matrix calculus operations and taylor expansions," *SIAM Review.*, vol. 15, n.º 2, pp. 352-369, abril 1973.
- [10] P. Verboven, "Frecuencia-domain system identification for modal analysis," Vrije Universiteit Brussel Faculteit Toegepaste Wetenschappen, 2002.
- [11] J. Schott, Matrix analysis for statistics. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [12] L. Medina, "Propagación de incertidumbre en la identificación de parámetros de sistemas mecánicos en el dominio de la frecuencia," Tesis Doctoral, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela, 2013.
- [13] H. W. Coleman, W. G. Steele, Experimentation, validation, and uncertainty analysis for engineers. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2009.
- [14] J. S. Bendat, A. G. Piersol, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, 4ª ed. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2010.
- [15] T. De Troyer, P. Guillaume, R. Pintelon, S. Vanlanduit, "Fast calculation of confidence intervals on parameter estimates of least-squares frequency-domain estimators," *Mechanical Systems and Signal Processing.*, vol. 23, n.º 2, pp. 261-273, febrero 2009. doi:10.1016/j.ymssp.2008.04.009