

Aproximación de la ley de Torricelli con el método de Euler y un tanque de agua instrumentado con sensor ultrasónico

Approximation of Torricelli's law with Euler's method and a water tank equipped a with ultrasonic sensor

Edgar Serrano-Pérez¹

¹Universidad Tecnológica de México - UNITEC MÉXICO - Campus Atizapán edgar_serrano@my.unitec.edu.mx

Recibido: 20 de noviembre 2020. Aceptado: 14 de diciembre de 2020

Resumen– En este trabajo se presenta el desarrollo de un sistema informático, que posee como núcleo de procesamiento una tarjeta basada en Arduino Nano, el cual colecta y procesa las señales de un sensor ultrasónico de bajo costo. El sistema informático permite monitorear la evolución en el tiempo, de la altura del agua dentro de un contenedor una vez que comienza a vaciarse a través de una perforación en el fondo del contenedor, revisitando así la ley de Torricelli con un enfoque tecnológico, a través de un contenedor instrumentado por un sistema informático de procesamiento y captura de datos electrónico. En el trabajo se presentan los diagramas de conexión eléctrica para interconectar la tarjeta con microcontrolador y el sensor ultrasónico, así como también el código fuente utilizado para la adquisición y procesamiento de datos. Se comparan los resultados experimentales con los resultados que se obtienen al utilizar la solución analítica particular para el problema y con los resultados obtenidos de implementar el método de Euler en una solución numérica aproximada. El sistema informático presentado fue modificado y adaptado con diversos fines académicos, educativos y de investigación en los diversos ámbitos de la ingeniería, sistemas computacionales y mecatrónica.

Palabras clave– Plataformas de cómputo; aprendizaje y material; aplicaciones y desarrollos de sensores.

Abstract– In this work, the development of a computer system that has as processing core, an Arduino Nano based board, that collects and processes the

signals of a low-cost ultrasonic sensor is presented. The computer system allows monitoring the evolution over time of the height of the water into a container once it begins to empty through a hole in the bottom of it, thus revisiting Torricelli's law with a technological approach using a instrumented container by a computerized electronic data capture and processing data system. The work presents the electrical connection diagrams to interconnect the microcontroller based board and the ultrasonic sensor, as well as the source code used during data acquisition and processing. A comparison of the experimental results is made with results obtained when using the particular analytical solution for the problem, also with the results obtained from implementing the Euler method in obtaining an approximate numerical solution. The presented computer system can be modified and adapted for various academic, educational and research purposes in the various fields of computer engineering, computer systems and mechatronics.

Keywords– Computing platforms; learning and material; Sensor applications and deployments

1. INTRODUCCIÓN

El problema de calcular la evolución en el tiempo del nivel de agua dentro de un contenedor es quizá uno de los problemas modelo más comunes de aplicación que se presentan a los estudiantes de diversas ramas de ingeniería. El problema es frecuentemente abordado durante los cursos de física universitaria, donde el enfoque se centra en

Citar este artículo como: Serrano-Pérez E. Aproximación de la ley de Torricelli con el método de Euler y un tanque de agua instrumentado con sensor ultrasónico. *ITECKNE*, 18(1), 2021 pp. 52 -56. DOI: <https://doi.org/10.15332/iteckne.v18i1.2540>

obtener la ley de Torricelli a partir de la ecuación de Bernoulli [1]. Para la asignatura de ecuaciones diferenciales, el caso de estudio se aborda en la introducción al tema [2] y para el caso de los métodos numéricos en el tema de ecuaciones diferenciales ordinarias [3]. Generalmente, durante la asignatura de métodos numéricos, el estudio de casos de aplicación se desarrolla de manera teórica, sin la posibilidad de contrastar resultados obtenidos numéricamente con resultados experimentales. Esta situación se acentúa por la dificultad para reproducir físicamente casos prácticos que en su mayoría implican el uso de máquinas o instalaciones complejas, ya sea por sus dimensiones o por la necesidad de contar con sistemas de medición y adquisición de datos avanzados que son difíciles de adquirir y resultan costosos [4]. Para contrarrestar esta situación y abordar el tema introductorio de métodos numéricos utilizados para aproximar ecuaciones diferenciales, la ley de Torricelli presenta distintas ventajas desde una perspectiva tecnológica. El experimento puede ser reproducido y monitoreado únicamente a través del monitoreo de la variable de nivel y su evolución en el tiempo. Además, en su estructura no implica el uso de elementos móviles o compuestos y reacciones químicas que añadan complejidad o peligrosidad al experimento. Además, al introducir el caso de estudio, este puede ser presentado como una analogía para distintos eventos y circunstancias que suceden en la vida cotidiana, por ejemplo, al llenar una cubeta a través de una válvula ubicada en el fondo de un tanque de almacenamiento.

Se han reportado referentes al estudio de este clásico problema con la finalidad de promover el uso de diversos elementos físicos accesibles para los estudiantes en sesiones de laboratorio, por ejemplo, utilizando contenedores plásticos [5], [6], [7]. En favor de automatizar los procesos de adquisición de datos, es decir, la medición del nivel del líquido durante el proceso de vaciado de un tanque a través de un orificio, se desarrolló un sensor de nivel con componentes electrónicos [8]. Recientemente se utilizó un sensor de presión diferencial [9], mostrando las bondades de digitalizar el experimento al utilizar dispositivos electrónicos. Con el crecimiento y expansión de las tarjetas con microcontrolador y el *software* libre pueden adaptarse distintos sensores, dispositivos electrónicos y actuadores de bajo costo en distintas aplicaciones en ingeniería [10], [11], [12], incluso en contextos educativos [13]. Esto brinda la oportunidad de utilizar *hardware* y *software* libre en la instrumentación y recreación de fenómenos físicos a fin de observar y estudiar su comportamiento en el tiempo, dotando así a los estudiantes de herramientas tecnológicas a su alcance que les permitan generar una discusión sobre los distintos resultados obtenidos. El curso de métodos numéricos forma parte de las asignaturas iniciales de las distintas carreras de ingeniería, es común que algunos alumnos no cuenten con experiencia previa en el armado de circuitos electrónicos, situación que podría distraer el enfoque de su atención hacia el método numérico. El uso de un sensor ultrasónico como elemento de medición de nivel, ha mostrado ser una alternativa eficaz frente a otro tipo de tecnologías. Por ejemplo, es posible la obtención de mediciones precisas en un rango de hasta 3 metros, sin que el sensor tenga contacto alguno con el líquido [14], [15], [16]. Además, para la conexión entre la tar-

jeta con microcontrolador y la tarjeta con sensor ultrasónico únicamente se requieren 4 cables conductores, sin tener que realizar ninguna conexión adicional, lo que permite contar rápidamente con un sistema compacto para desarrollar el experimento caracterizado por su simpleza de conexión, confiabilidad y un bajo costo.

En este trabajo se utilizó, como núcleo del sistema informático, una tarjeta con microcontrolador de diseño compacto, fácil y económica adquisición, así como amigable en su manipulación y programación, características presentes en la tarjeta basada en Arduino Nano. Al comunicar el microcontrolador con una computadora personal, se creó un sistema de adquisición de datos flexible para monitorear la distancia entre el ultrasónico HC-SR04 y la superficie del agua. El monitor serial con el que cuenta el programa Arduino permitió tanto el despliegue de datos provenientes del sensor ultrasónico, como el despliegue del tiempo en el que se realiza cada una de las mediciones. Se obtuvo así la relación que existe entre cada fracción de tiempo y la medición de la altura para el contenedor, una vez que ha comenzado a drenarse el agua. La información apareció encapsulada en forma de columnas a través de la interfaz del monitor serial, permitiendo el traslado de los datos hacia una hoja de cálculo, donde se realizó una comparativa, entre los distintos resultados obtenidos. El procesamiento de los datos provenientes del sistema informático creado a partir de la tarjeta con microcontrolador permitió verificar de manera gráfica y visual la continuidad y tendencia de los datos.

La ley de Torricelli permite el cálculo de la velocidad de un líquido que sale por el orificio de un tanque abierto, bajo la influencia de la gravedad, tal y como lo expresa la Ecuación (1).

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \quad (1)$$

Donde $h(t)$ es la altura en el tiempo t y g es la constante de gravedad. Considerando el área del orificio de escape y el área del contenedor, es posible utilizar la Ecuación (2) para calcular la altura del líquido en cualquier instante de tiempo [17].

$$\frac{dh}{dt} = -0.6 \frac{A_h}{A_w} \sqrt{2gh(t)} \quad (2)$$

Donde A_h representa el área de la perforación por donde escapa el agua del contenedor y A_w representa el área de la sección transversal de dicho contenedor. De la Ecuación (2) se puede observar la relación que existe entre el área de la sección transversal del contenedor y el área de la perforación. Se consideró un factor de contracción de 0.6 debido a que el área del orificio por donde escapa el líquido es mucho menor que área del contenedor. En este trabajo se complementó el estudio teórico con desarrollo experimental, integrando elementos de *software* y *hardware* de bajo costo.

2. METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó una geometría cilíndrica, la cual se generó a través de un tubo de alu-

minio con una tapa de nylon a fin de crear un contenedor abierto. La tapa contó con una perforación roscada donde se aloja un tornillo de 0.76 centímetros de diámetro a manera de tapón removible. El contenedor de agua utilizado tiene un diámetro interno de 12.75 cm. La altura interna medida desde la superficie de la tapa de nylon con la perforación hasta el borde superior del cilindro de aluminio fue de 15.9 centímetros. El montaje físico del experimento con el sensor ultrasónico HC-SR04 y la conexión hacia la tarjeta basada en Arduino Nano se puede observar en la Fig. 1.

Fig. 1. MONTAJE FÍSICO DEL CONTENEDOR DE AGUA INSTRUMENTADO CON UN SENSOR DE DISTANCIA ULTRASÓNICO

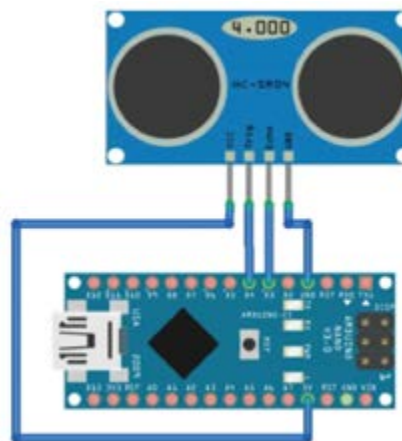


Fuente: Los autores.

La conexión física entre los pines de la tarjeta con microcontrolador y el sensor ultrasónico de distancia se realizó de forma sencilla y solo requiere de 4 conductores de cobre para su implementación. Para el desarrollo de este sistema informático, se utilizó la fuente de alimentación de 5 volts propia de la tarjeta basada en Arduino Nano. A través del pin 4 de la tarjeta con microcontrolador se conectó la terminal del envío de pulsos del sensor. Por su parte, el pin 3 de la tarjeta con microcontrolador se conecta al pin que recibe la señal de eco. De esta manera con un reducido conjunto de conexiones físicas, fue posible obtener un sistema informático de medición de altura para el contenedor, tal y como se muestra en la Fig. 2.

Una vez establecida la conexión física, fue necesario programar el dispositivo, a fin de generar una rutina automatizada de adquisición de datos con el sistema informático propuesto. Se utilizó el lenguaje Arduino propio de la tarjeta con microcontrolador. A través del código fuente del programa se definieron los pines físicos que fueron utilizados, tanto el pin de entrada, que recibió la señal de eco, como también el pin de salida que envió un pulso ultrasónico con una duración de 10 μ s. Se habilitó la comunicación serial para permitir el despliegue de información en la interfaz de comunicación del mismo programa, a través del monitor serial.

Fig. 2. DIAGRAMA DE CONEXIÓN FÍSICO ENTRE EL SENSOR ULTRASÓNICO Y LA TARJETA CON MICROCONTROLADOR



Fuente: Los autores.

Resultó de gran utilidad la función del monitor serial para recuperar las mediciones de altura en cada instante de tiempo. El monitor serial cuenta con una casilla de habilitación para desplegar el tiempo en que ocurre cada uno de los eventos, con lo cual se puede recuperar la variable de tiempo para cada uno de los datos del sensor en forma tabulada. Para el cálculo de la altura se consideró que la velocidad del sonido es de 343 m/s, además que la duración del pulso se dividió entre dos, considerando el tiempo que tarda la señal en viajar y regresar al chocar con la superficie [18]. Cada una de las mediciones se realizó aproximadamente cada 0.1 segundo, tal y como se observa en el código fuente utilizado para la aplicación y que se muestra en la Fig. 3.

Fig. 3. CÓDIGO FUENTE PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA INFORMÁTICO DE ADQUISICIÓN DE DATOS DE ALTURA A TRAVÉS DEL SENSOR ULTRASÓNICO Y LA TARJETA CON MICROCONTROLADOR

```
#define sendpulse 4
#define receivepulse 3
float height;
long pulseduration;

void setup()
{
  Serial.begin(9600);
  pinMode(sendpulse, OUTPUT);
  pinMode(receivepulse, INPUT);
}

void loop()
{
  digitalWrite(sendpulse, HIGH);
  delayMicroseconds(10);
  digitalWrite(sendpulse, LOW);
  pulseduration = pulseIn(receivepulse, HIGH);
  height = (pulseduration/2) * 0.0343;
  Serial.println(height);
  delay(100);
}
```

Fuente: Los autores.

3. RESULTADOS

Al obtener los datos experimentales se alcanzaron los valores de tiempo y altura correspondientes a cada una de las mediciones que se realizaron durante el drenado de agua a través de la perforación con la que cuenta en el fondo del contenedor. La altura registrada entre la superficie de la tapa del contenedor vacío y el sensor ultrasónico fue de 16.19 centímetros, lo que implicó que el sensor se ubicara a 0.29 centímetros por encima del límite del borde superior del contenedor. Dicha altura se tomó como referencia para conocer la evolución de la altura en el tiempo. Dado que el sensor ultrasónico hizo la medición entre el emisor de la onda ultrasónica y la superficie del agua, fue necesario restar la altura máxima del contenedor de la medición obtenida con el sensor. De esta manera fue posible obtener la altura del nivel del agua para cada instante de tiempo. El contenedor de aluminio fue llenado con agua hasta una altura de 13 centímetros, momento en el cual, con el registro activo de los datos de la tarjeta basada en Arduino Nano, se procedió a remover el tapón de forma manual. La operación de remover el tapón inicialmente generó movimiento en el contenedor, lo cual produjo oscilaciones en la superficie que se vieron reflejadas en las mediciones obtenidas con el sensor. El sistema se estabilizó a una altura registrada de 9.6 centímetros, punto que fue considerado como la altura inicial del experimento. La obtención de datos experimentales de altura durante el primer segundo de la prueba se puede observar en la Tabla I.

TABLA I.
RESULTADOS OBTENIDOS EN LA MEDICIÓN DE ALTURA DURANTE EL
PRIMER SEGUNDO DE DESCARGA

Tiempo (s)	Medición con sensor ultrasónico (cm)	Altura del líquido (cm)
0.000	6.59	9.6
0.100	6.59	9.6
0.199	6.65	9.54
0.299	6.52	9.67
0.399	6.59	9.6
0.498	6.72	9.47
0.598	6.76	9.43
0.698	6.79	9.4
0.797	6.69	9.5
0.897	6.76	9.43
0.997	6.86	9.33
1.096	6.89	9.3

Fuente: Los autores.

Una vez que el contenedor comenzó a vaciarse totalmente, el goteo y la interrupción del flujo constante generó oscilaciones en la superficie, por lo cual se consideró que el final de las mediciones confiables se produjo a una altura registrada de 1.44 centímetros. El proceso de vaciado entre

los límites definidos de 9.6 centímetros y 1.44 centímetros de altura se produjo experimentalmente a los 42.8 segundos.

Con los datos de tiempo obtenidos a partir de la adquisición de datos con el sensor y la tarjeta basada en Arduino Nano, se procedió al cálculo mediante la solución analítica [17], sustituyendo los datos físicos del experimento y la condición inicial de 9.6 cm, con lo que se obtuvo la Ecuación (3):

$$h(t) = (\sqrt{9.6} - 0.047185101114956t)^2 \quad (3)$$

El cálculo y tabulación, tanto de los datos experimentales como de los obtenidos mediante la solución analítica del problema, se realizó utilizando la hoja de cálculo de OpenOffice Calc que se puede adquirir y utilizar de manera libre. Se manejaron los mismos datos de tiempo experimental del sistema informático creado con la tarjeta basada en Arduino Nano, para calcular la altura en cada instante de tiempo utilizando la Ecuación (3); este proceso representó la solución analítica del problema. Para implementar el método de Euler y obtener de manera aproximada la evolución de la altura respecto al tiempo, fue necesario sustituir los valores físicos del contenedor en la Ecuación (2), con lo que se obtuvo la Ecuación (4) de vaciado del contenedor:

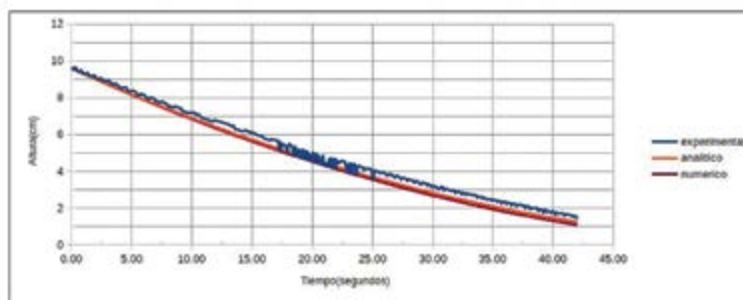
$$\frac{dh}{dt} = 0.094429473213462\sqrt{h} \quad (4)$$

El método de Euler es uno de los primeros métodos que se analizan en el contenido temático de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para la materia de métodos numéricos. Se considera como un primer punto de partida hacia la obtención de soluciones más exactas a través del uso de los diferentes métodos de Runge-Kutta. De esta manera, se ha seleccionado el método de Euler como herramienta de cálculo aproximado para un primer acercamiento hacia la obtención de una solución aproximada de la Ley de Torricelli. Al tratarse de un método simple, pero efectivo, pudo ser implementado con relativa facilidad en una hoja de cálculo, sin el uso de programas matemáticos adicionales.

La integración numérica de la Ecuación (4) se llevó a cabo desde el tiempo $t=0$ segundos hasta $t=42$ segundos, considerando un tamaño de paso $h=3$ para la implementación del método de Euler. El cálculo se puede refinar utilizando un tamaño de paso menor, pero también implica incrementar el número de iteraciones que deben realizarse. En este caso, con solo 14 iteraciones fue posible alcanzar resultados muy cercanos a los obtenidos experimentalmente y a los resultados de la solución analítica. Una mayor descripción del algoritmo de implementación del método de Euler puede consultarse en literatura clásica [3]. Con los datos experimentales, analíticos y numéricos se creó un gráfico de datos que permite visualizar los resultados a manera de comparación, tal y como se muestra en la Fig. 4.

Puede observarse en la Fig. 4 que, tanto la solución analítica como la numérica se aproximan en gran medida a los datos que se obtuvieron de manera experimental, utilizando un sensor ultrasónico de bajo costo.

Fig. 4. COMPARATIVA DE RESULTADO DE DATOS EXPERIMENTALES (AZUL), ANALÍTICOS (ROJO) Y NUMÉRICOS (NEGRO)



Fuente: Los autores.

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Las variaciones que se observan durante la obtención de datos experimentales en la Fig. 4, se debieron principalmente a disturbios en el entorno del contenedor. Ondas sonoras y vibraciones mecánicas se transmitieron hasta la superficie del agua, generando pequeñas oscilaciones durante la captura de datos. Se debe tener cuidado de aislar en la mayor medida posible el contenedor durante la prueba, a fin de evitar que los disturbios externos afecten la medición, utilizando el sistema informático presentado. De manera general, se observa que el sensor de bajo costo y la tarjeta con microcontrolador, lograron capturar y registrar eficientemente el comportamiento de la altura en el tiempo. El reducido número de componentes electrónicos, así como la simpleza para conectarlos, permitió integrar en conjunto un sistema informático de bajo costo y de alta disponibilidad. El desarrollo electrónico educativo presentado permitió englobar comparativamente el uso del método de Euler, para aproximar un experimento simple descrito a través de la ley de Torricelli y su solución analítica. Esta situación ha permitido ganar en entendimiento sobre el estudio de la dinámica de un sistema real, a través de modelos matemáticos y sistemas físicos de captura de datos en el marco de una asignatura tan importante, como son los métodos numéricos.

5. AGRADECIMIENTOS

Se agradece de sobremano los comentarios y sugerencias de los evaluadores anónimos, quienes con su atinada revisión han permitido mejorar la calidad del presente trabajo.

6. REFERENCIAS

- [1] H.D. Young, R.A. Freedman (contributing author, A. Lewis Ford), "Sears and Zemansky's," *University physics: with modern physics*, 13th ed. Pearson, p. 388, 2013.
- [2] D.G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 11th ed. Cengage Learning, p. 26, 2016.
- [3] S.C. Chapra, R.P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 5th ed. McGraw-Hill, Inc, p. 725, 2005.
- [4] HERCEG and D. HERCEG, "Arduino and Numerical Mathematics," *Inform. Educ.*, vol. 19, no. 2, pp. 239–256, 2020, DOI: <https://doi.org/10.15388/infedu.2020.12>
- [5] D. Guerra, A. Plaisted and M. Smith, "A Bernoulli's Law Lab in a Bottle," *Phys. Teach.*, vol. 43, no. 7, pp. 456–459, Sep. 2005, DOI: <https://doi.org/10.1119/1.2060646>
- [6] L. F. Plata Gálvez, "Modelamiento Matemático para vaciado de Tanques," *Sci. Tech. Vol 22 (1)*, mar, 2017 DOI: <https://doi.org/10.22517/23447214.9185>
- [7] H. G. R. Rotgé, A. I. O. Arias and J. E. C. Hernández, "Flujo de agua en botellas como experimento," *Lat.-Am. J. Phys. Educ.*, vol. 5, no. 1, p. 24, 2011.
- [8] H. M. Aguilar, "Level sensor for hydrodynamics experiments," *Phys. Educ.*, vol. 43, no. 1, p. 46, Jan. 2008, DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-9120/43/01/003>
- [9] K. Atkin, "Investigating the Torricelli law using a pressure sensor with the Arduino and MakerPlot," *Phys. Educ.*, vol. 53, no. 6, p. 065001, Aug. 2018, DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aad680>
- [10] C. Román-Herrera, D. Loza-Matovelle, L. Segura and R. Dabirian, "The construction of an open source based low cost turbidity sensor," *ITECKNE Vol 13 No 1 2016 17-22*, Apr. 2016, DOI: <https://doi.org/10.15332/iteckne.v13i1.1431>
- [11] K. C. Ramos-Castañeda, J. J. Gil-Peláez, J. F. Panesso-Narváez and R. Claros-Lamus, "Design of a measurement equipment of the unevenness in a railway line," *ITECKNE*, vol. 12, no. 2, Nov. 2015, DOI: <https://doi.org/10.15332/iteckne.v12i2.1243>
- [12] V. P. Jiménez, A. R. Fonseca and D. Amaya, "Diseño y construcción de un sensor capacitivo de nivel," *ITECKNE*, vol. 7, no. 2, Dec. 2010.
- [13] M. El-Abd, "A Review of Embedded Systems Education in the Arduino Age: Lessons Learned and Future Directions," *Int J Eng Pedagog*, vol. 7, pp. 79–93, 2017.
- [14] S. L. Mohammed, A. Al-Naji, M. M. Farjo and J. Chahl, "Highly Accurate Water Level Measurement System Using a Microcontroller and an Ultrasonic Sensor," *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 518, p. 042025, Jun. 2019, DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/518/4/042025>
- [15] K. E. Supriya and K. R. R. lowast Nbsp, "IoT based real time water level monitoring using Texas instruments' CC3200," *Indian J. Sci. Technol.*, vol. 13, no. 17, pp. 1720–1729, Jun. 2020, DOI: <https://doi.org/10.17485/IJST/v13i17.295>
- [16] C. J. Jeswin, B. Marimuthu and K. Chithra, "Ultrasonic water level indicator and controller using AVR microcontroller," in *2017 International Conference on Information Communication and Embedded Systems (ICICES)*, Feb. 2017, pp. 1–6, DOI: <https://doi.org/10.1109/ICICES.2017.8070773>
- [17] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th Edition. Wiley, pp. 16–17, 2011.
- [18] R. Santos, "18+ Arduino Projects", 2 Ed. Disponible: https://www.robkalmeijer.nl/techniek/computer/arduino/18_arduino_projects_ebook.pdf