# CARACTERIZACIÓN DEL GRADO DE COMPLEJIDAD DEL SISTEMA SOLAR MEDIANTE LA LEY DE ZIPF/MANDELBROT

# CHARACTERIZATION OF THE DEGREE OF COMPLEXITY OF THE SOLAR SYSTEM THROUGH ZIPF/MANDELBROT'S LAW

**Jairo J. Jattin-Balcázar, Javier O. Rodríguez-Velásquez, Signed E. Prieto-Bohórquez, Sandra C. Correa-Herrera, Cesar A. Valdés-Cadena**

Grupo Insight. Insight Research Group SAS. Bogotá, Colombia

(Recibido: 07/2021. Aceptado: 10/2021)

## Resumen

La ley de Zipf/Mandelbrot ha permitido caracterizar fenómenos con una organización hiperbólica en las ciencias biomédicas y los lenguajes naturales, entre otros; sin embargo, su aplicación podría extenderse a estudiar características planetarias. Por tanto, el objetivo de esta investigación consiste en aplicar la ley de Zipf/Mandelbrot para caracterizar el grado de complejidad del período orbital, la velocidad orbital media planetaria y la distancia media al sol de los planetas del sistema solar. Para ello, se tomaron los valores del período orbital, la velocidad orbital media y la distancia media al sol de los planetas del sistema solar para evaluar su distribución hiperbólica. Posteriormente, se aplicó la ley de Zipf/Mandelbrot para calcular la dimensión fractal de ambas variables. Se comprobó que los valores del período orbital, la velocidad orbital y la distancia media planetaria se distribuyen jerárquicamente, lo cual permitió calcular los valores de dimensión fractal, que fueron 0.28, 0.88 y 0.42, con coeficientes R2 de 0.92, 0.87 y 0.92, respectivamente. Lo anterior sugiere que la aplicación de

Javier O. Rodríguez-Velásquez: grupoinsight2025@gmail.com doi: 10.15446/mo.n64.97365

la ley de Zipf/Mandelbrot revela la existencia de órdenes matemáticos no descritos en la cinemática celeste al encontrar un mayor grado de complejidad de la velocidad media orbital con respecto a la distancia media planetaria al sol y el período orbital, de donde se puede inferir que los parámetros de análisis de los sistemas planetarios podrían complementarse con este enfoque.

**Palabras clave:** velocidad orbital, sistema solar, fractal.

**Abstract**

The Zipf/Mandelbrot law has allowed to characterize phenomena with a hyperbolic organization in biomedical sciences and natural languages, among others; however, its application could be extended to study planetary characteristics. Therefore, the objective of this research is to apply the Zipf/Mandelbrot law to characterize the degree of complexity of the orbital period, the planetary mean orbital velocity, and the mean distance to the sun of the planets of the solar system. For this purpose, the values of the orbital period, the mean orbital velocity, and the mean distance of the planets of the solar system to the sun were taken to evaluate their hyperbolic distribution. Subsequently, the Zipf/Mandelbrot law was applied to calculate the fractal dimension of both variables. The values of orbital period, orbital velocity and planetary mean distance were found to be hierarchically distributed, which allowed the fractal dimension values to be calculated. These values were 0.28, 0.88 and 0.42, with R2 coefficients of 0.92, 0.87 and 0.92, respectively. The above suggests that the application of the Zipf/Mandelbrot law reveals the existence of undescribed mathematical orders in the celestial kinematics by finding a greater degree of complexity of the mean orbital velocity with respect to the mean planetary distance to the sun and the orbital period, implying that the analysis parameters of planetary systems could be complemented with this approach.

**Keywords:** orbital velocity, solar system, fractal.

## Introducción

En lingüística, se ha descubierto que la ocurrencia de las palabras de los lenguajes naturales sigue una distribución de frecuencias jerárquica. Esto quiere decir que, dentro de un texto, son muy pocas las palabras que se repiten con alta frecuencia, mientras que son muchas las palabras que se repiten con una baja frecuencia. Esta distribución ha sido descrita matemáticamente bajo la ley de Zipf [1–3].

Posteriormente, Mandelbrot derivó una generalización de la ley de Zipf, denominada ley de Zipf/Mandelbrot, para que la primera se ajustara más precisamente a la frecuencia de distribución de las palabras al desplazar los rangos de la ley de Zipf por una cantidad $\beta$ [1]. Esta generalización, además de su aplicación lingüística, permite calcular la dimensión fractal de fenómenos que relacionen variables repetitivas con una distribución hiperbólica [4, 5], como los fractales estadísticos [6].

Se ha demostrado la existencia de órdenes matemáticos mediante la ley de Zipf/Mandelbrot en varios fenómenos, como en la distribución de las frecuencias cardíacas fetales recolectadas mediante el monitoreo fetal [7], en los repertorios inmunes B a partir de modelos murinos [8], en los repertorios T contra alergenos como el PoaP9 [9], en los lenguajes [10] e incluso en la distribución de los ingresos en una sociedad, entre otros [11]. Estos ejemplos sugieren que la aplicación de la ley de Zipf/Mandelbrot puede extenderse a describir fenómenos con distribuciones hiperbólicas de otras ciencias, como los sistemas planetarios de la astrofísica, aunado a que anteriormente se ha propuesto el estudio de la luminosidad de las estrellas visibles a simple vista con la ley de Zipf [12].

Algunos de los componentes habitualmente estudiados de los sistemas planetarios son la velocidad orbital, el período orbital y la distancia media a una estrella. La velocidad orbital hace referencia a la dinámica de un cuerpo astronómico al pasar a través de un campo gravitacional [13]. El período orbital comprende el tiempo que requiere un cuerpo para recorrer la totalidad de su órbita [14].

Por su parte, la distancia media al sol de los planetas expresa la longitud del semieje mayor de la órbita de los planetas. Si bien se han definido fórmulas matemáticas que permiten el cálculo preciso de estas variables en el sistema solar, estas no explican su progresión ni establecen relaciones entre las mismas. Una notable excepción es la ley de Titius-Bode [15], la cual determina, mediante una serie matemática progresiva, el radio orbital de los planetas, sugiriendo así la existencia de un orden en la aparición de los planetas en los sistemas planetarios, aunque no hay una teoría física que la respalde.

Considerando lo anterior, el propósito de esta investigación es aplicar la ley de Zipf/Mandelbrot al período orbital, la velocidad media orbital y la distancia media al sol de los planetas para caracterizar el grado de complejidad fractal de estas variables en el sistema solar.

## Metodología

### Definiciones

**Dimensión fractal estadística**: se refiere al grado de complejidad fractal de las variables analizadas, es decir, el período orbital, la velocidad media orbital y la distancia planetaria media al sol. Su cálculo se realizó a través de la ecuación 1, así:

$$D = \frac{log(\sigma + V)}{Log(F/P)} \tag{1}$$

Donde D es la dimensión fractal estadística; V es la relación de las frecuencias medidas, expresada así: $V = 1/N - 1$ (donde N el número de frecuencias medidas); $\sigma$ es el rango asumido para cada frecuencia; P es la frecuencia de ocurrencia de los rangos y F corresponde a un cofactor secundario en el proceso de linealización.

## Procedimiento

Inicialmente, se tomaron los valores del período orbital, la velocidad media orbital y la distancia planetaria media al sol del sistema solar en términos de años, Km/h y Km, respectivamente, reportados por la NASA [16] para Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Aunque esta lista incluye los datos de Plutón, este astro fue excluido al considerarse un planeta enano [17].

Posteriormente, se organizaron estos valores para cada planeta jerárquicamente, los cuales a su vez se asociaron a un rango según su ocurrencia. Por ejemplo, los valores del período orbital se organizaron ubicando la cifra de mayor magnitud con el primer rango y a la cifra de menor magnitud, al último rango. Este mismo procedimiento se realizó con las dos variables analizadas restantes. Luego, se generaron diagramas de dispersión con los cuales se comprobó que los datos tuviesen un comportamiento hiperbólico jerárquico de los datos para aplicar la ley de Zipf/Mandelbrot.

Ulteriormente, se realizó una linealización logarítmica mediante el método de mínimos cuadrados con el propósito de obtener la recta de mejor ajuste a la dispersión de puntos obtenida para cada una de las variables estudiadas. Finalmente, se calculó la dimensión fractal estadística del período orbital, la velocidad media orbital y la distancia planetaria media al sol mediante la **ecuación 1**.

## Resultados

En la **tabla 1**, se ubicaron jerárquicamente los valores del período orbital, la velocidad media orbital y la distancia planetaria media al sol del sistema solar reportados por la NASA [16]. Posteriormente, se comprobó que los datos poseen una distribución hiperbólica jerárquica al generar los diagramas de dispersión para cada variable (**figura 1**) asociando las cifras máximas y mínimas al primer y último rango, respectivamente.

| **Planeta** | **T (años)** | **V (Km/h)** | **D (Km)** |
|---|---|---|---|
| **Mercurio** | 0,24 | 172,40 | 57 910 000 |
| **Venus** | 0,62 | 126,11 | 108 200 000 |
| **Tierra** | 1,00 | 107,24 | 146 600 000 |
| **Marte** | 1,88 | 86,87 | 227 940 000 |
| **Júpiter** | 11,86 | 47,02 | 778 330 000 |
| **Saturno** | 29,46 | 34,71 | 1 429 400 000 |
| **Urano** | 84,01 | 24,52 | 2 870 990 000 |
| **Neptuno** | 164,80 | 19,55 | 4 504 300 000 |

TABLA 1. *Valores del período orbital (T), la velocidad media orbital (V) y la distancia planetaria media al sol (D) para Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.*

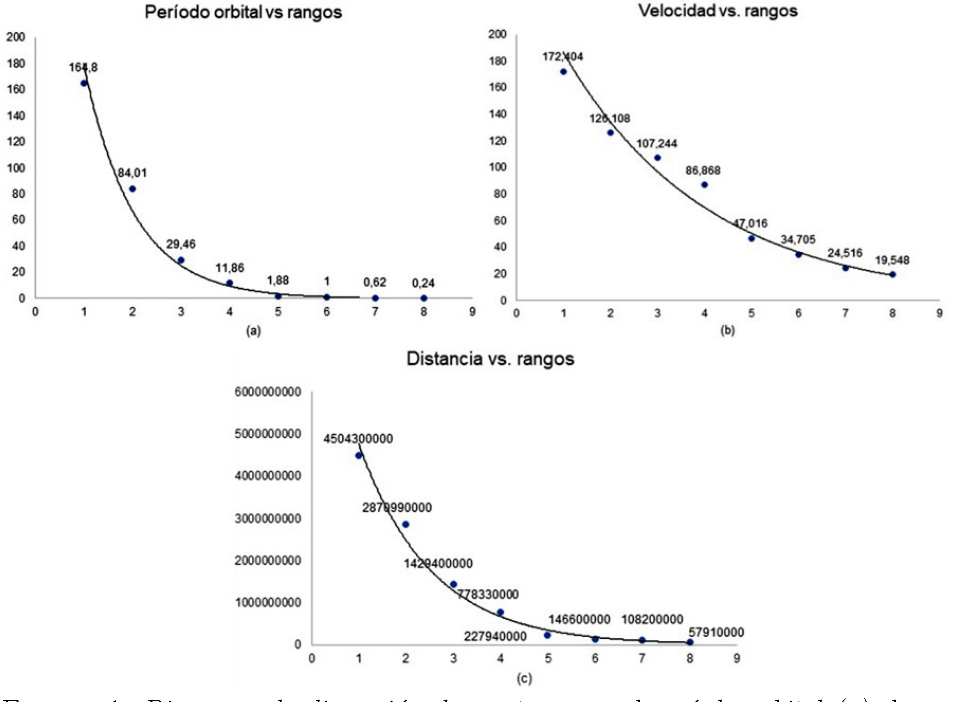


FIGURA 1. *Diagrama de dispersión de puntos para el período orbital (a), la velocidad orbital media (b) y la distancia media al sol (c).*

Al aplicar la ley de Zipf/Mandelbrot para calcular la dimensión fractal, se obtuvieron valores de 0.28, 0.88 y 0.42 (**tabla 2**) con factores de correlación R2 de 0.92, 0.87 y 0.92 (**tabla 2**) para el período orbital, la velocidad media orbital y la distancia planetaria media al sol, respectivamente. Estos resultados indican que la mayor complejidad fractal la representa la velocidad media orbital, mientras que la menor complejidad se relaciona con el período orbital, para finalmente encontrar en medio la distancia planetaria media al sol. Los valores de los coeficientes R2 de la linealización (**figura 2a-c**) con respecto a los datos fueron superiores a 0.87 en todos los casos.

| | **T (Período)** | **Velocidad** | **Distancia** |
|---|---|---|---|
| **P. mín.** | 0,0008 | 0,0316 | 0,0057 |
| **P. máx.** | 0,2859 | 0,2788 | 0,4449 |
| **R+V mín.** | 2,1429 | 1,1429 | 1,1429 |
| **R+V máx.** | 8,1429 | 8,1429 | 8,1429 |
| **Ln mín. (R+V)** | 0,7621 | 0,1335 | 0,1335 |
| **Ln máx. (R+V)** | 2,0971 | 2,0971 | 2,0971 |
| **Ln (P) mín.** | -7,1103 | -3,4543 | -5,1637 |
| **Ln (P) máx.** | -1,2522 | -1,2773 | -0,8098 |
| **Df** | 0,2869 | 0,8807 | 0,4295 |
| **$R^2$** | 0,9203 | 0,8785 | 0,9202 |

Tabla 2. *Valores de dimensión fractal del período orbital, la velocidad media orbital y la distancia planetaria media al sol. Donde P es la probabilidad; Ln el logaritmo natural; Df la dimensión fractal y R2 el coeficiente de correlación.*

## Discusión

Esta es la primera investigación en la cual se caracteriza el grado de complejidad del período orbital, la velocidad media orbital y la distancia planetaria media al sol de los planetas de Mercurio a Neptuno del sistema solar mediante la ley de Zipf/Mandelbrot, comprobando que existen diferencias de complejidad dadas por valores de dimensión fractal estadística de 0.28, 0.88 y 0.42, respectivamente. Esto indica que el fenómeno más complejo del

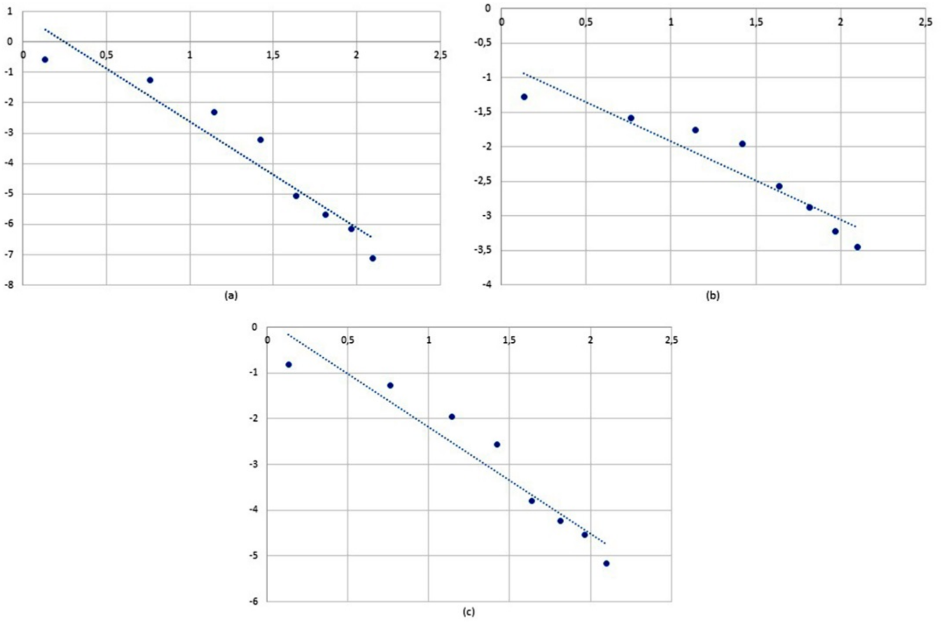


FIGURA 2. *Linealización logarítmica para el período orbital (a), la velocidad orbital media (b) y la distancia media al sol (c).*

sistema solar es la velocidad media orbital, al ser el valor más cercano a 1 y el menos complejo el período orbital.

De esta manera, se proporciona una relación matemática cuantitativa del grado de complejidad de algunos de los parámetros de estudio de la cinemática celeste, por lo cual es posible sugerir al cálculo de la dimensión fractal estadística para ser incorporado al estudio de las características de los sistemas planetarios, complementando los análisis matemáticos y físicos actuales con este enfoque.

Los resultados de este trabajo también evidencian que existen variables del sistema solar que han sido cuantificadas y que poseen un comportamiento hiperbólico jerárquico, lo cual las hace susceptibles de ser caracterizadas por la ley de Zipf/Mandelbrot para valorar su grado de complejidad. En este sentido, será importante explorar otras variables que puedan tener este comportamiento, al igual que evaluar las distribuciones de las características aquí analizadas en otros sistemas planetarios con el propósito de comparar los hallazgos obtenidos, como por ejemplo, en los sistemas que se encuentren en formación o aquellos con diferentes cantidades de planetas.

En astronomía, por medio de teorías físicas y matemáticas, se ha buscado el establecimiento de relaciones que permitan analizar la evolución de los astros [15] y las características mismas entre los elementos que componen los sistemas planetarios. Ejemplo de ello, ha sido el dilucidar la relación de aparición de los planetas en el sistema solar y predecir sus posiciones específicas en el espacio, lo cual se ha logrado con alguna precisión con la ley de Titius-Bode [15]. Esta ley, incluso, ha sido aplicada a algunos sistemas exoplanetarios de más de 4 planetas, donde también se ha sugerido una adecuada precisión para este fin [18].

Sin embargo, esta ley, como otros modelos matemáticos, puede carecer del sustento físico adecuado que explique los comportamientos observados y predichos en los sistemas planetarios. Además, sus predicciones han presentado porcentajes de error de hasta el 95.75 % en su formulación original y las posiciones en las cuales se encontrarían Neptuno y Plutón presentaron un error de 29.08 % y 95.75 %, respectivamente [15]. En aplicaciones más recientes, se ha tratado de predecir la aparición de planetas extrasolares; sin embargo, tan solo se predijeron las posiciones de 5 planetas entre 96 documentados. Si bien el único fin de esta ley no es el de dilucidar la posición específica de los planetas, deben explorarse otras teorías, como la ley de Zipf/Mandelbrot, en un intento de caracterizar variables de los sistemas planetarios y que posteriormente permitan predecirlos.

Es importante destacar que el tipo de investigación desarrollada en este trabajo ha sido aplicada en otros campos de la ciencia, particularmente en la medicina, con otras teorías de la física moderna y contemporánea. Con lo anterior, se han logrado caracterizar las infecciones asociadas al cuidado de la salud en hospitales [19] y predecir la epidemia de malaria en Colombia

[20], al igual que los recuentos de linfocitos CD4+ en individuos con infección por VIH [21], diagnosticar la dinámica cardíaca [22] y las células de cuello uterino [23], predecir la mortalidad en la unidad de cuidados intensivos [24] y la unión de péptidos al HLA clase II [25], entre otros. Esto demuestra que los enfoques teóricos son multidisciplinarios y aplicables para analizar y predecir los fenómenos complejos.

## Conclusiones

El sistema solar exhibe características fractales estadísticas que pueden ser descritas por medio de la ley de Zipf/Mandelbrot.

## Agradecimientos

Al grupo Insight.

## References

[1] S. T. Piantadosi, Psychon. Bull. Rev. **21**, 1112 (2014).

[2] G. Zipf and G. Miller, *The Psycho-Biology of Language: An Introdution to Dynamic Philology* (MIT Press, 1965).

[3] G. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort: An Introduction to Human Ecology* (Addison-Wesley Press, 1949).

[4] B. Mandelbrot, Information theory and psycholinguistics: a theory of word frequencies, in *Readings in Mathematical Social Science*, edited by P. Lazarsfeld, N. Henry, and S. R. Associates (M.I.T. Press, 1966) pp. 350–368.

[5] B. Mandelbrot, WORD **10**, 1 (1954).

[6] H. Peitgen, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science* (Springer, 1992).

[7] J. Rodríguez Velásquez, S. Prieto Bohórquez, L. Ortíz Salamanca, A. Bautista Charry, P. Bernal, and N. Avilán Vargas, Rev. Fac. Med. **54**, 96 (2006).

[8] J. Burgos, Biosystems **39**, 19 (1996).

[9] J. Rodríguez, Rev. Fac. Med. **53**, 72 (2005).

[10] A. Koplenig, Corpus Linguistics and Linguistic Theory **14**, 1 (2018).

[11] K. Khan, T. Niaz, D. Pecaric, and J. Pecaric, Arab. J. Math. S. **26** (2018).

[12] A. Upgren, American Astronomical Society Meeting Abstracts **203**, 42.06 (2003).

[13] G. Modestino, INFN (2016).

[14] C. Watson and T. Marsh, Mon. Not. R. Astron. Soc. **405**, 2037 (2010).

[15] B. Mancilla, Entretextos **10**, 47 (2019).

[16] D. Williams, Planetary fact sheet - metric (2019) (Consultado el 10 de enero de 2021).

[17] . Library of Congress. Science Reference Section, Why is pluto no longer a planet? (2019) (Consultado el 10 de enero de 2021).

[18] M. Altaie, Z. Yousef, and A. Al-Sharif, Applying titius-bode's law on exoplanetry systems (2016).

[19] J. Rodríguez, S. Prieto, C. Correa, Y. Soracipa, N. Chaves, A. Narváez, J. Mojica, M. Aguilera, D. Tapia, and J. Jattin, Infectio **22**, 70 (2018).

[20] J. Rodríguez, J. Phys. Conf. Ser. **1160**, 012018 (2019).

[21] J. Rodríguez, S. Prieto, C. Pérez, C. Correa, Y. Soracipa, J. Jattin, and A. David, Infectio **24**, 105 (2020).

[22] J. Rodríguez, S. Prieto, and L. Ramírez, Informatics in Medicine Unlocked **15**, 100174 (2019).

[23] S. Prieto, J. Rodríguez, C. Correa, and Y. Soracipa, BMC Med Phys **14** (2014).

[24] J. Rodríguez, J. Med. Med. Sci **6**, 209 (2015).

[25] J. Rodríguez, Inmunología **27**, 151 (2008).