

## MODELO MATEMÁTICO APLICADO A LA CURVA DE LACTANCIA EN GANADO VACUNO DOBLE PROPÓSITO

Luz Botero\*, Melba Vertel.

Universidad de Sucre. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Departamento de Zootecnia. Campus universitario Puerta Roja, Sincelejo, Colombia. \* Correspondencia: luzmbotero@yahoo.es

Recibido: Octubre 12 de 2005; Aceptado: Mayo 25 de 2006

### RESUMEN

**Objetivo.** Seleccionar un modelo matemático para la curva de lactancia de la producción de leche de hembras vacunas. **Materiales y métodos.** Durante 11 meses, se estudió la producción de leche en 500 novillas doble propósito *Bos taurus* x *Bos indicus*, de las sabanas del trópico bajo colombiano. La producción se cuantificó en kilogramos. Se incluyeron los datos de la producción de leche en época (seca-lluviosa) y número de lactancias (primera; segunda y tercera y, más de tres). Los datos hacen parte del archivo de la Ganadería XB, ubicada en las sabanas de Bolívar, Colombia, recopilados desde el año 1990 hasta el 2000. A estos datos se le aplicó los modelos lineal simple, cuadrático, lineal logarítmico, cuadrático logarítmico, gamma incompleto, lineal hiperbólico y polinomial inverso. Los parámetros para los modelos gamma incompleto y polinomial inverso fueron estimados, a partir del método de "Gauss-Newton", para la regresión no lineal; los demás modelos fueron ajustados por regresión lineal de las producciones, en función de los meses en lactancia, por el método de los cuadrados mínimos. **Resultados.** En los modelos propuestos, se observó que el modelo polinomial inverso es el que mejor caracteriza la curva de lactancia por presentar los mayores valores para el estadístico Durbin-Watson y coeficiente de determinación ( $R^2$ ) y sobre dicho modelo existe información necesaria para obtener parámetros prácticos calculados a partir de la ecuación de la curva de lactancia. **Conclusión.** El modelo matemático polinomial inverso se constituye en una excelente herramienta para aplicar en la administración y toma de decisiones en el manejo de hatos del sistema de doble propósito.

**Palabras clave:** Lactancia, modelos matemáticos, polinomial inverso, ganado doble propósito.

## MATHEMATICAL MODEL APPLIED TO LACTATION CURVE IN LIVESTOCK BOVINE DOUBLE PURPOSE

### ABSTRACT

**Objective.** To select a mathematical model for the lactation curve of milk production in bovine females. **Materials and methods.** During 11 months, the production of milk was studied in 500 bovine females double purpose *Bos taurus* x *Bos indicus*, at the Savannas of the Colombian Low Tropic. Production was quantified in kilograms. Data of milk production were included in time (dry-rainy) and number of lactations (first; second and third and, more than three). Data make part of the Cattle raising XB file, located in Bolívar's Savanna, Colombia, gathered from the year 1990 up to the 20000. The lineal simple, quadratic,

lineal logarithmic, quadratic logarithmic, incomplete gamma, lineal hyperbolic and inverse polynomial models were applied to these data. nursings (first; second and third and, more than three). The data make part of the file of the Cattle raising XB, located in Bolívar's Savannas, Colombia, gathered from the year 1990 up to the 2000. The parameters for the incomplete gamma and inverse polynomial models were estimated starting from the "Gauss-Newton" method to non lineal regression; the other ones were adjusted by lineal regression of the productions in function of the months in lactation by the minimum squares method. **Results.** It was observed that the inverse polynomial model is the one that better characterizes the lactation curve, presenting the biggest values for the Durbin-Watson statistic and the coefficient of determination ( $R^2$ ) and about this model necessary information exists to obtain practical parameters from the lactation curve equation. **Conclusion.** The mathematical polynomial model inverse is an excellent tool to approach the administration and desicions management of cattle double purpose.

**Key words:** Lactation, mathematical models, inverse polinomial, double purpose cattle.

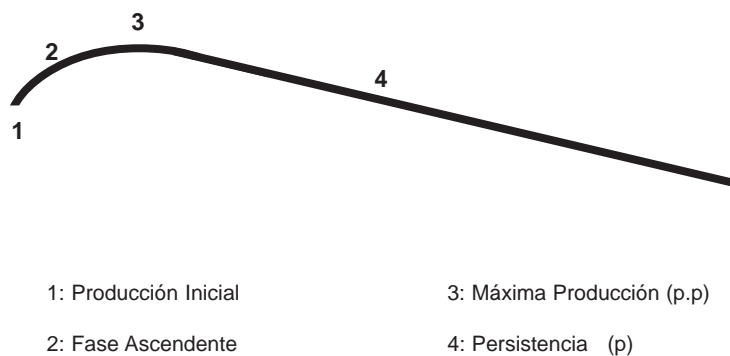
## INTRODUCCIÓN

La ganadería vacuna en el sistema de producción doble propósito es una respuesta productiva en regiones tropicales, alejadas de los grandes centros de consumo, con baja infraestructura, forrajes abundantes de regular calidad nutricional, alta incidencia de parásitos y condiciones ambientales adversas. Varios autores han conceptuado que en el trópico bajo, los sistemas integrados de producción brindan la mejor respuesta a la combinación de tierra, capital y mano de obra poco capacitada (1, 4).

La producción lechera en Colombia para el año 2001 fue de 5.579 millones de litros (5); se ordeñan alrededor de 3'608.800 vacas de las cuales el 67% está conformado por el hato mestizo manejado bajo el sistema doble propósito, que a su vez aporta el 47% de la producción láctea

nacional (6), estos datos magnifican la importancia económica y social de este sistema ganadero, por lo que se hace necesario determinar y evaluar adecuadamente la producción de leche.

La representación gráfica de la producción de leche en función del tiempo es denominada "Curva de Lactancia" de acuerdo con lo propuesto por varios autores (8,9,10) como se puede observa en la figura 1. Cuando una función algebraica es usada para describir una curva de lactancia, la producción de leche puede ser prevista en cualquier período de esta (producción inicial, duración de la fase ascendente, etapa de máxima producción, etapa de persistencia y etapa de descenso) bajo circunstancias ambientales estables y condiciones normales (7). Estos factores o periodos han sido bien estudiados en las razas europeas por varios autores.



**Figura 1.** Curva de Lactancia de la Producción de Leche en hembras vacunas en el Sistema Doble Propósito

En Colombia son pocos los trabajos desarrollados para determinar el modelo matemático que caracterice la curva de lactancia de hembras vacunas mestizas en el sistema productivo doble propósito, a pesar de que son estos animales los que más contribuyen a la generación de empleo rural y a la producción de leche y carne a nivel nacional. Con el conocimiento del comportamiento de la curva de lactancia en este sistema de producción, se podría planificar el manejo nutricional, reproductivo, sanitario y administrativo de la unidad productiva hembra-cría durante la etapa de lactancia para lograr incrementar la productividad del sistema buscando de esta manera una mayor eficiencia y competitividad del mismo.

El presente estudio tuvo como objetivo establecer un modelo matemático aplicable a la lactancia de hembras vacunas de doble propósito asociado a las diferentes etapas de la producción en el trópico bajo de Colombia.

## MATERIALES Y MÉTODOS

El proyecto se realizó en la empresa ganadera XB, ubicada en la región Caribe, sur del departamento de Bolívar, subregión depresión Momposina, tierras planas aluviales, serranías y colinas de relieve quebrado a ondulado. El suelo es clase III pobre en materia orgánica y elementos menores, la precipitación anual promedio es de 1.300 mm, con un período mas lluvioso en los meses de agosto a noviembre, con predominio de clima cálido tropical y temperatura promedio anual de 28°C, humedad relativa del 75%, formación vegetal bosque seco tropical (bs-T) (11,12).

Se consideró un universo de 20.000 hembras vacunas mestizas resultantes del cruce de *Bos*

*taurus x Bos indicus* con un alto componente de las razas cebuinas, que se ordeñan diariamente. Se utilizaron 500 vacas como muestra. Las lactancias fueron clasificadas por Época (1: seca: diciembre a abril; 2: lluviosa: mayo a noviembre), y Número de lactancias (1: hembras de primera; 2: hembras de segunda y tercera, y, 3: hembras de más de tres). Esta clasificación estuvo orientada a mantener controlados factores que pudieran afectar la interacción genético-ambiental. Resultaron 5.000 datos analizados en el programa estadístico SAS (13) correspondientes a pesajes de leche mensual realizados desde el año 1990 al 2000 y tomados al azar de la base de datos.

La producción de leche por hembra vacuna ( $Y_t$ ) se pesó una vez al mes ( $t$ ), en una báscula mecánica de 25 Kg., de capacidad, el ordeño se efectuó una vez al día en la mañana, teniendo la presencia de la cría; estos datos se sistematizaron en el programa Ganadero (14), considerando para el estudio sólo la cantidad de leche ordeñada.

En que  $Y$  es la producción de leche (Kg) en función del tiempo (meses)  $t$ ;  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , son constantes características de cada modelo;  $t$  es el período de tiempo desde el parto hasta la fecha del último ordeño;  $y$  e es el error asociado a cada observación.

El examen de los efectos de los factores de medio ambiente sobre los componentes de la curva de lactancia se efectuó por análisis de los cuadrados mínimos. Para los modelos matemáticos, el pico de producción (p.p.) se obtuvo resolviendo las ecuaciones para ( $t$ ) mediante la resolución de derivadas. Las persistencias ( $p$ ) en los modelos fueron dadas directamente por los coeficientes de regresión. Para la selección de la curva que mejor se ajusta a las lactancias de hembras vacunas en el sistema de producción doble propósito, se

*Modelos matemáticos.* Se estimaron los siguientes modelos estadísticos para determinar cual explica mejor la curva de lactancia.

Lineal Simple (M1):	$Y_t = b_0 + b_1 t + e$
Cuadrático (M2):	$Y_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + e$
Lineal Logarítmico (M3):	$Y_t = b_0 + b_1 t + b_2 \ln(t) + e$
Cuadrático logarítmico (M4):	$Y_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 \ln(t) + e$
Gamma Incompleto (M5):	$Y_t = A t^B e^{-Ct}$
Lineal Hiperbólico (M6):	$Y_t = b_0 + b_1 t + b_2 (1/t) + e$
Polinomio inverso (M7):	$Y_t = t (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)^{-1}$

consideró la estadística de Durbin-Watson (16) y el coeficiente de determinación ( $R^2$ ).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con la información recolectada, se utilizaron los datos de 500 lactancias completas y construyó una curva de lactancia uniando consecutivamente los puntos resultantes de la producción de leche (Kg) pesada once veces mes a mes y anotados en el eje Y, en función del tiempo (meses) representada en el eje X, la cual se ajusta a la definición de varios autores (8,9,10) quienes conceptúan que la curva de lactancia es la representación gráfica de la producción de leche de una hembra en función del tiempo, observándose una fase ascendente hasta el pico de producción (p.p), con una pequeña meseta denominada persistencia (p), seguida por un descenso relativamente consistente hasta el 10° mes aproximadamente. A pesar, que la curva de lactancia está influenciada por el cruce, edad, año y época de parto, factores que son responsables de "mudanzas" en el pico de producción, persistencia y pendiente, pero no alterando la función algebraica. Del total de lactancias, el 24.7% resultaron atípicas en este estudio y por lo tanto, fueron excluidas. En otros estudios se han reportado rangos de lactancias atípicas tan altas como del 26 % (15) e inferiores de 10.6% (7).

En la época 1 (seca), y teniendo en cuenta los órdenes 1, 2 y 3 se encontraron diferencias en la producción inicial de leche, ya que a medida que se aumenta el número de partos hay un incremento en la producción inicial de leche, teniendo en cuenta que la repetibilidad es baja para esta característica (17) y se encontró que la producción

máxima inicial la tienen las hembras a partir del tercer parto. Se ha comunicado que vacas de primer parto tienen un 12% menor en producción de leche comparada con la producción de hembras multíparas (18). Los valores de producción máxima se presentaron en los ordenes 1 y 2, contrario con lo reportado por Cordeiro (19), no obstante concuerdan con los encontrados por Charles y Gardner (20), ya que son mayores del 15% de la producción inicial de leche, similar a lo reportado por Botero y Vásquez (21), hallando a su vez que el número de partos influyó notoriamente en el tiempo en alcanzar el pico de producción, pero la persistencia de la lactancia no fue significativa para ordenes en estudio (Tabla 1). Las hembras con alto mestizaje *Bos indicus*, tuvieron una menor producción láctea comparadas con las hembras con alto mestizaje *Bos taurus*, pero las primeras tuvieron una mayor persistencia. Este resultado coincide con el de otros autores (21), quienes además afirman que el manejo es un factor que afecta ostensiblemente las variables de la curva de lactancia.

En la época 2 (lluviosa), ordenes 1, 2, 3, se encontraron diferencias en la producción inicial de leche igual que en el mes que se presenta el pico de producción, lo que indica que a medida que se aumenta el número de partos hay un incremento en la producción inicial y, el pico de producción se presenta alrededor del tercer mes, que se incrementa paulatinamente a medida que aumenta el número de partos (Tabla 1).

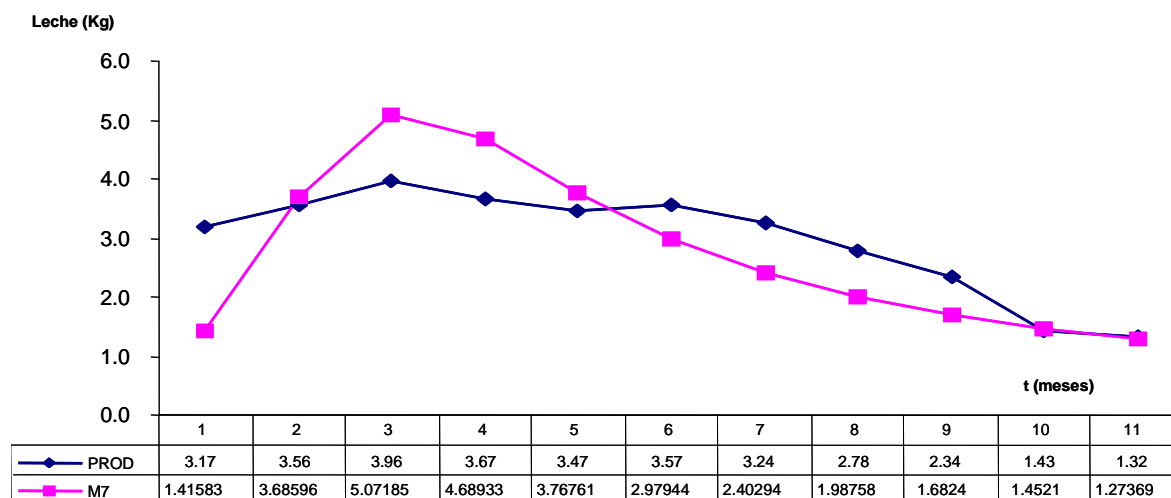
La comparación de la curva de lactancia graficada con los datos de producción de leche (Kg) en función del tiempo (meses), respecto a las ecuaciones ajustadas de los modelos lineal simple (M1), cuadrático (M2), lineal logarítmico (M3), cuadrático

**Tabla 1.** Valores de los factores de la curva de lactancia en las hembras mestizas de acuerdo con la época y el orden.

Época	Orden	Producción Inicial (Kg/ vaca/ día)	Pico de Producción (mes)	Producción Máxima (Kg/ vaca/ día)
1 (seca)	1	2.57	5	3.45 (34.0% > 1er. Mes)
	2	2.38	5	3.55 (49.0% > 1er. Mes)
	3	3.17	3	3.96 (25.0% > 1er. Mes)
2 (lluviosa)	1	2.62	3	3.22 (22.8% > 1er. Mes)
	2	2.86	4	3.83 (34.2% > 1er. Mes)
	3	3.87	2	4.08 (5.5% > 1er. Mes)

logarítmico (M4), gamma incompleto (M5), lineal hiperbólico (M6) y polinomial inverso (M7) y el análisis de varianza para las regresiones de estos modelos permitió calcular el coeficiente de determinación (R<sup>2</sup>) y la estadística de Durbin – Watson (D W) para poder concluir cual es el mejor modelo

matemático que representa con mayor precisión. La figura 2, muestra la metodología de la regresión ajustada a los datos para el modelo polinomial inverso (M7) y la curva de lactancia (PROD) graficada con los datos recolectados de producción de leche (Kg) en función del tiempo (meses).



**Figura 2.** Curvas de lactancia según los datos recolectados (PROD) para la época 1, orden 3, y para el modelo matemático polinomial inverso (M7).

Para los modelos de regresión en estudio según el orden de lactancia (1, 2, 3) y época (1. seca, 2. lluviosa), se concluyó que el modelo matemático polinomial inverso (M7) tuvo mejor ajuste que los modelos M1, M2, M3, M4, M5 y M6, ya que el coeficiente de determinación (R<sup>2</sup>) y la estadística de Durbin-Watson (D. W.) fue mejor, obteniendo un R<sup>2</sup> 0.60 y D.W. 1.0 considerado como un buen criterio de ajuste. Las observaciones realizadas por Wood (10) no fueron confirmadas en este trabajo, ya que el modelo polinomial inverso tiene mejor ajuste que el modelo gamma incompleto.

La Tabla 2, muestra las diferentes ecuaciones obtenidas, para la curva de lactancia estimada con el modelo polinomial inverso (M7), según el orden de lactancia, en las épocas seca y lluviosa de las hembras vacunas mestizas resultantes del cruce de *Bos taurus x Bos indicus* con un alto componente de las razas cebuinas, además, picos de producción (p), tiempo (meses) en el cuál ocurre los picos de producción (p.p).

**Tabla 2.** Ecuaciones del modelo polinomial inverso (M7), coeficiente de determinación (R<sup>2</sup>), estadística D.W., según el orden y época en hembras mestizas en estudio y las diferentes etapas de la producción de leche.

Época	Orden	Curva de lactancia estimada	R <sup>2</sup>	D.W.	P	p.p
1. Seca	1	$Y_t = t*(0.9332 - 0.2442*t + 0.0725*t^2)^{-1}$	0.52	1.29	3.62	3.59
	2	$Y_t = t*(1.4980 - 0.6866*t + 0.1325*t^2)^{-1}$	0.76	1.64	4.89	3.36
	3	$Y_t = t*(1.0826 - 0.4826*t + 0.1063*t^2)^{-1}$	0.72	1.45	5.11	3.19
2. Lluviosa	1	$Y_t = t*(0.7679 - 0.1681*t + 0.0747*t^2)^{-1}$	0.60	1.12	3.22	3.21
	2	$Y_t = t*(0.6678 - 0.1698*t + 0.0625*t^2)^{-1}$	0.72	0.93	4.19	3.27
	3	$Y_t = t*(0.1979 - 0.0434*t + 0.0485*t^2)^{-1}$	0.55	2.02	4.18	2.02

Finalmente, de acuerdo con los resultados se concluyó que el modelo polinomial inverso fue el que mejor explicó la curva de lactancia de las vacas sometidas a explotaciones de doble propósito. Esta afirmación se basa en que el modelo polinomial inverso tuvo los mejores valores tanto para el estadístico Durbin-Watson, como para el coeficiente de determinación. Por

otra parte, es conocido que sobre éste modelo matemático existe información necesaria para obtener parámetros prácticos calculados a partir de la ecuación de la curva de lactancia, por tanto, dicho modelo se convierte en un excelente instrumento para la toma de decisiones para el manejo del hato.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Arango L. La ganadería de Doble Propósito. En: Coyuntura Agropecuaria. Segundo trimestre, CEGA 1986. Bogotá, Colombia: 131-137.
2. Preston T, Leng L. Matching Ruminant Production System with available resources. Armidale, Australia, penambul 1978; books: 245p.
3. Restrepo J, Murgueito E, Preston T. Feeding Dairy cows in the Tropics. En milk production system in tropical latin-american. A speedy & R. Sansouc (Eds). Rome, Italy. Food and agriculture organization animal production and helth. 1977; Paper No. 86:244.
4. Sere C, Vaccaro Y. Milk production in developing Countries. In: Milk production Systems in Tropical Latin American. A. J. Smith (De), Scotland, 1976; University of Edinburgh Press: 459-475.
5. Federación Colombiana de ganaderos "FEDEGAN". La Ganadería bovina en Colombia 2001-2002. ISBN: 958-33-4109-6. Bogotá-Colombia: 191p.
6. Ministerio de agricultura y desarrollo rural. Estadísticas 2003; Colombia: 6 p. Disponible en: [www.minagricultura.org](http://www.minagricultura.org).
7. Duraes M, Teixeira N, Freitas A. 1991. Curvas de lactação de vacas de raça Holandesa mantidas em confinamento total. Arq Bras Med Vet Zoot 1991; 43: 447-458.
8. Rodríguez Y. Comportamiento de la curva de lactancia de vacas holstein en condiciones tropicales. Revista cubana reproducción animal 1987; 13:103-111.
9. Miller D. Lactation and other production curves as criteria for culling dairy cows. New México. Agr Exp Bull 1975; 632.
10. Wood P. Algebraic model of the Lactation curve in cattle. Nature 1967;216; 164-165.
11. Holdrige R. Life zone Ecology. Tropical Scienc Center 1967; San José de Costa Rica. 206p.
12. Instituto Geográfico Agustín Codazi. IGAC. Estudio General de suelos y zonificación de tierras de agricultura y desarrollo rural. Ministerio de Hacienda y Crédito Público, 1998; Bogotá. 124p.
13. Statistical análisis system "SAS". User' Guide, Versión 5ª Ed. SAS Institute Inc. Cary, 1998; USA.
14. Tatis R. Programa ganadero. Programa sistematizado para el manejo de empresas ganaderas, Unidad de asistencia Técnica Integral Agropecuaria (U.S.A.T.I.). 2000; Cartagena de Indias, Colombia.
15. Shimizu H, Umrod S. An aplicacion of the weight regression procedure for constructing the lactation curve in dairy cattle. Zootec Sci 1976; 27:733.
16. Hofmann R, Vieira S. Teste de Durbin-Watson. In:Analises de regresao; uma introducao a econometria.1987; 2 ed. Sao Paulo, Huditec; 251-256.

17. Ossa G, Torregroza L, Avarado L. Determinación de la curva de lactancia en vacas mestizas de un hato de doble propósito en la región caribe de Colombia. *La Investigación Pecuaria*, 1998; p.71-77.
18. Vaccaro L. Evaluación y selección de bovinos de doble propósito. En: *Bovinos de carne y doble propósito en los trópicos*. 1998; Restom, S. (ed). Cartagena: p.131-145.
19. Cordeiro M, Milagres N, Ferreira A. 1991. Curva de lactacao de vacas de raza holandesa mantidas em confinamiento total. *Revista Brasileira de Medicina Veterinaria y Zootecnia* 1991; 43:450-458.
20. Charles E, Garner D. Dairy production management: an introduction to creation and analysis of lactation curves. En: *Compendium on Continuing for the practicing veterinarian* 1990; 12:277-283.
21. Botero L, Vásquez L. Curva de Lactancia del Ganado doble propósito en Sabanas de Bolívar y Depresión Momposina, Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el título de Zootecnista, Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia, 1997.