LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS DEL SEGUNDO WITTGENSTEIN

Alejandro Tomasini Bassols
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

En este trabajo empiezo por presentar y explicar las nociones clave de la filosofía del Wittgenstein maduro y que son las que le permiten articular su nueva concepción de las matemáticas ("juego de lenguaje", "criterio", "gramática" y "semejanzas de familia", básicamente). Acto seguido reconstruyo los puntos de vista desarrollados por Wittgenstein sobre los que son los temas primordiales en su meditación, como la peculiar naturaleza de las proposiciones matemáticas, el análisis del concepto de número, el carácter decisivo de las demostraciones, el rechazo del fundacionalismo y en general de la metamatemática, la cuestión de lo que es aplicar una regla y el tema general de las contradicciones. Si mi exposición es fiel y acertada, emerge de la exposición un cuadro de las matemáticas original y del cual quedaron excluidos los errores de las escuelas tradicionales de filosofía de las matemáticas.

Palabras clave: *regla, número, demostración, contradicción, fundamentación.*

Recibido: junio 9 de 2014 - Aprobado: octubre 5 de 2014

ISSN (I): 0120-4688 / ISSN (D): 2389-9387

THE LATER WITTGENSTEIN'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Abstract

In this paper I start off by presenting and explaining the mature Wittgenstein's key notions thanks to which he is in a position to develop his new conception of mathematics (basically, "language-game", "criterion", "grammar" and "family resemblances"). I then reconstruct Wittgenstein's views concerning the fundamental themes in his meditation like the peculiar nature of mathematical propositions, the analysis of the concept of number, the decisive character of proofs, the rejection of foundationalism and more generally of metamathematics, the issue of applying a rule and the general subject of contradictions. If my exposition is both faithful and correct, an original picture of mathematics emerges out of these considerations in which the usual mistakes of traditional schools of philosophy of mathematics are systematically excluded.

Keywords: *rule, number, proof, contradiction, foundation.*

Alejandro Tomasini Bassols. Profesor del Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM. Doktorat Nauk Humanistycznych, Universidad de Varsovia. Entre sus publicaciones recientes se encuentra: (2013) *Pecados Capitales y Filosofía*, México: Plaza y Valdés; (2014) *Tópicos Wittgensteinianos,* México: Edere. Su área de interés filosófico se centra en: Wittgenstein, filosofía de la mente, filosofía del lenguaje, filosofía de la religión

Dirección electrónica: altoba52@gmail.com

LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS DEL SEGUNDO WITTGENSTEIN

Alejandro Tomasini Bassols
Universidad Nacional Autónoma de México

Introducción

Como era de esperarse, el cambio operado por Wittgenstein en el terreno de la filosofía del lenguaje desde principios de los años 30 del siglo pasado acarreó drásticas modificaciones en su concepción de las matemáticas. Dichas modificaciones no se operaron abruptamente, pero de todos modos sí se efectuaron con sorprendente rapidez. En efecto, en el curso de unos cuantos años, menos de un lustro, Wittgenstein transformó dramáticamente quizá no su concepción global de las matemáticas, pero ciertamente sí su forma de dar cuenta de ellas. El cambio en cuestión representó el abandono, primero gradual y luego acelerado, del paradigma lógico defendido en el *Tractatus* en favor del paradigma que por el momento llamaré 'praxiológico'. Es en las *Investigaciones Filosóficas* en donde se puede encontrar, de manera sumamente comprimida, la destrucción de los supuestos fundamentales del modo de pensar tractariano. Sin entrar en detalles, quizá sea útil decir en unas cuantas palabras en qué consistió dicha "destrucción". La situación es básicamente la siguiente: a través de diversas aclaraciones y experimentos de pensamiento, Wittgenstein desmantela la teoría agustiniana del lenguaje, lo cual incluye la teoría de los nombres, la teoría estándar de los predicados y la idea de que decir algo es ante todo enunciar una proposición, esto es, una "entidad" cuyo rasgo esencial es ser verdadera o falsa. En realidad, es el todo de la concepción usual del lenguaje, la que aunque con variantes importantes es la compartida por prácticamente todos los filósofos, lo que Wittgenstein echa por tierra. Lo que en su lugar elabora es una concepción del lenguaje contemplado desde la perspectiva del uso que de él hacen los hablantes y de la utilidad que presta, para lo cual tiene que ser visto en términos de lo que Wittgenstein denominó ‘juegos de lenguaje’ y ‘formas de vida’.

Apoyada entonces por un nuevo aparato conceptual y toda una batería de estrategias para enfrentar los enigmas de la filosofía es que hace su aparición una nueva filosofía del lenguaje en la que el eje de las reflexiones lo constituye el uso de las expresiones y no las categorías y la estructura de la gramática superficial. Probablemente no sería inapropiado proclamar que el gran giro operado por Wittgenstein consistió en aprender a examinar los signos en acción, no meras oraciones muertas, para lo cual se requiere aprender a dejar de ocuparse de su orden aparente, de las distinciones puramente formales, como lo son las gramaticales (sujeto, predicado, oración, afirmar, negar, etc.) y las que de éstas de una u otra forma se derivan, como las lógicas (argumento, función, proposición y demás). De ahí que no sea factible comprender y apreciar el pensamiento del así llamado ‘segundo Wittgenstein’ si uno no se ha familiarizado, aunque sea mínimamente, con su terminología, su enfoque y sus ejercicios filosóficos. Así, pues, aunque no nos propongamos hacer una exposición detallada de este marco general del nuevo modo de pensar wittgensteiniano es ineludible no decir unas cuantas palabras al respecto.

El aparato conceptual del segundo Wittgenstein es totalmente original. Dicho aparato constituye el apero o instrumental que le permitirá efectuar lo que quedó categorizado como “análisis gramaticales”. Ejemplos de nociones conformadas por Wittgenstein para desarrollar su neo-filosofía son las bien conocidas de “semejanza de familia”, “ver como” y “forma de vida”. Sin embargo, para nuestros propósitos, las cruciales o decisivas son las de gramática y regla gramatical, juego de lenguaje, criterio y semejanzas de familia. Al aplicar estas nociones, Wittgenstein puede dar cuenta de las diversas cuestiones que va enfrentando gracias a lo cual poco a poco emerge una concepción realmente esclarecedora de las matemáticas en su conjunto. Muy rápidamente diré unas cuantas palabras acerca de cada una de ellas sin adentrarme mayormente en la cuestión de su justificación filosófica.

Juego de lenguaje. En su lucha contra las concepciones puramente formales del lenguaje, las cuales se sirven de grandes clasificaciones (afirmar/negar, sujeto/predicado, nombrar/adscribir, descripción/evaluación, etc.), Wittgenstein se ve llevado a promover una concepción del lenguaje en la que éste es considerado desde la perspectiva de su aplicación o empleo por parte de los hablantes y por consiguiente de la utilidad que efectivamente presta. Dicha utilidad, naturalmente, está vinculada a las actividades de los usuarios del lenguaje. Desde esta perspectiva praxiológica, lo que cuenta es lo que los hablantes de hecho *hacen* con las palabras, pero eso es algo que las palabras por sí solas no indican: para saber qué quiso decir el hablante se requiere ver en conexión con qué actividades fueron empleadas así como tener una idea del contexto de la emisión. A las actividades, socialmente reconocidas como tales, asociadas con las palabras las llama Wittgenstein 'formas de vida'. Desde este punto de vista, lo humano se manifiesta o toma cuerpo a través de dichas actividades y es en conexión con ellas que brota el significado de nuestras palabras. El significado de lo que decimos no puede quedar establecido *a priori*, puesto que sólo puede emerger cuando el hablante manifiesta lingüísticamente lo que quiere y eso dependerá de factores empíricos, como son lo que haga y sus circunstancias. El significado no es, por así decirlo, un derecho natural de las palabras, algo que ellas tengan *per* se, por el mero hecho de ser signos, sino que éstas se vuelven significativas en la medida en que son útiles y son útiles cuando son empleadas en conexión con alguna actividad socialmente discernible, esto es, con una forma de vida. El significado proviene del uso de las palabras y éste es de lo más variado, por la sencilla razón de que las actividades humanas son de lo más variado. De ahí que un juego de lenguaje sea básicamente un conjunto de palabras **y** la actividad en conexión con la cual son empleadas. Así contempladas las cosas, resulta obvio que el significado no puede estar, por así decirlo, pre-establecido. Quizá valga la pena ilustrar esto rápidamente.

Consideremos una expresión simple como 'La ciudad de México está sobrepoblada'. ¿Qué quiere decir esto? En la concepción tradicional habría que decir que la oración tiene como sentido una proposición, la cual se compone de un sujeto, a saber, la ciudad de México, del cual predicamos una propiedad particular, *viz*., la de estar sobrepoblada. Esto, obviamente, no es más que una transcripción del lenguaje coloquial a la jerga filosófica y no explica absolutamente nada. Adoptando la perspectiva wittgensteiniana, preguntémonos nosotros: ¿qué significa esa oración? La respuesta es simple: no lo podemos determinar de antemano. Necesitamos conocer su aplicación. Por ejemplo, podemos conferirle, en función de la actividad desplegada por los hablantes que la emplean, por lo menos los siguientes sentidos:

1. Es una descripción que un lugareño le da a un turista
2. Es parte de una respuesta de un alumno durante un examen
3. Es una advertencia que alguien le hace a un político que pretende tomar una determinada decisión

4. Es una insinuación para los ejecutivos de un laboratorio que quiere probar ciertos medicamentos en un centro urbano con determinadas características
5. Puede ser la oración inicial de un novela cuyo tema se desarrolla en o es la ciudad de México
6. Puede ser una información en clave que un espía le proporciona a otro

y así indefinidamente. Lo más absurdo, por consiguiente, que podría hacerse sería pretender determinar el sentido de la oración apelando a clasificaciones puramente formales. Una vez que se entiende cómo se conectan palabras y acciones, semejante aspiración resulta simplemente risible.

Como era de esperarse, no hay cabida en la concepción wittgensteiniana del lenguaje para la noción tradicional (fregeano-russelliana) de proposición (*Gedanke*). Ésta es, sin embargo, una noción filosóficamente muy socorrida. ¿Con qué la remplaza Wittgenstein? Con la idea de *movimiento en el juego de lenguaje.* Además de los ejercicios filosóficos, de los análisis, etc., el contraste del lenguaje con el juego de ajedrez resultó aquí particularmente ilustrativo. En efecto, la noción de jugada, que es el movimiento que se hace durante el juego, ayuda a entender la idea de movimiento esta vez no con piezas sino con palabras. Así como no hay un cielo platónico poblado por "jugadas" de ajedrez, así tampoco hay "proposiciones" en un mundo ideal, esperando a ser pensadas. No se requiere ya "postular" nada (entidades abstractas, trascendentales, etc.): con los signos, las actividades, las circunstancias, los objetivos de los hablantes basta.

Obviamente, los juegos de lenguaje son un sinfín, es decir, son anuméricos, como lo eran las formas lógicas en el *Tractatus*. No tiene el menor sentido, y denota una grotesca incomprensión, preguntar '¿cuántos juegos de lenguaje hay?'. La respuesta a una pregunta así tendría que ser: tantos como actividades humanas se reconozcan. O sea: un sinfín. Lo que en cambio sí sabemos es que hay una gama abierta de juegos de lenguaje, que podemos distinguir unos de otros y que en general todos están unificados por las convenciones de la gramática superficial. Es obvio que la diferenciación entre juegos de lenguaje no se efectúa por diferencias físicas entre los signos, es decir, no tiene nada que ver con categorías formales o con reglas de formación, sino por los usos a los que están sometidas las palabras y las clases de acciones con las que están asociados. Por ejemplo, es claro que el español podía haber incluido un signo como 'א' y que éste habría podido estar en lugar de 'Z'. O sea, no es el signo en sí mismo lo que importa para determinar su significado, sino cómo entra en conexión con otros signos y la clase de movimientos lingüísticos que permite realizar. Con base en lo expuesto, podemos quizá ya adivinar que en realidad eso que llamamos 'matemáticas' va a estar compuesto por un sinnúmero de juegos de lenguaje. Como veremos posteriormente, esto aunado a otras consideraciones hace ver que no hay tal cosa como "la matemática", sino que más bien lo que hay es un conglomerado abierto de juegos de lenguaje (los juegos de lenguaje de la aritmética, de la aritmética transfinita, de la geometría euclidiana, del cálculo, de la trigonometría, del álgebra y así indefinidamente), de prácticas simbólicas agrupadas por diversas clases de semejanzas y que conforman eso que llamamos 'matemáticas'. Ciertamente, la filosofía wittgensteiniana de las matemáticas es, entre otras cosas, una reflexión sobre los juegos de lenguaje matemáticos pero, como veremos, no se agota en ello.

Gramática y proposición gramatical. La noción de gramática es la sucesora de la noción de lógica, por lo que es innegable que hay ciertas similitudes entre ellas, pero es igualmente obvio que hay también entre ellas inmensas diferencias. Para empezar, la lógica es formal, en tanto que las reglas gramaticales no son formales; en segundo lugar, la lógica para el autor del *Tractatus* es trascendental, en el sentido de que sobre su naturaleza última no se puede decir nada, en tanto que de las reglas de la gramática podemos tener una representación perspicua, enunciarlas y contrastarlas con, por ejemplo, las aseveraciones filosóficas de manera que podamos detectar y señalar dónde y cómo se produjo un error conceptual; tercero, las leyes de la lógica son *a priori*, en tanto que hay un sentido al menos en el que las reglas de la gramática no lo son: no lo son en el sentido de que, aunque nosotros no podamos visualizar lo que sería que nuestro lenguaje estuviera regido por otra gramática, la posibilidad de que lo estuvieran no es lógicamente imposible. En ese sentido no son *a priori*. Pudiera haber un lenguaje en el que 'yo' operara de un modo diferente a como funciona el pronombre tal como lo conocemos, pero cómo sería un lenguaje así no tenemos la menor idea. Sin embargo, hay otro sentido en el que también las reglas de la gramática son *a priori para nosotros*, los usuarios de este que es nuestro lenguaje, puesto que son necesarias, pero sólo contingentemente, por lo que acabamos de decir. En cuarto lugar, la lógica fija los límites de la significatividad en tanto que la gramática más bien *constituye* la significatividad. Para expresar la idea metafóricamente: las leyes de la lógica son como diques proposicionales, en tanto que las reglas gramaticales están entremezcladas con ellas. Finalmente, las leyes de la lógica son eternas, en tanto que las reglas gramaticales son en principio mutables, puesto que son *reglas de uso* y es un hecho que los usos se van modificando con el tiempo. Cuando hablo de "usos" no hablo de fenómenos lingüísticos superficiales, como por ejemplo lo sería que una determinada comunidad lingüística decidiera expulsar el 'usted' y quedarse exclusivamente con el 'tú'. Tengo en mente más bien las reglas que rigen la significatividad de nuestras aseveraciones, como por ejemplo las reglas de acuerdo con las cuales tiene decir 'me robaste mi diente', pero no tiene sentido decir 'me robaste mi recuerdo'.

Estas aclaraciones sirven para ir acotando nuestro terreno porque, como veremos, las matemáticas son básicamente sistemas de reglas gramaticales. En matemáticas se articulan conceptos en un sistema que se expande indefinidamente. El que ello sea así es lo que va a explicar su carácter normativo y, algo muy importante, su carácter sintético porque, como veremos, las mal llamadas 'proposiciones matemáticas' son, como bien lo vislumbró Kant, sintéticas *a priori*.

***Criterio*.** La filosofía del Wittgenstein de la madurez no se presta al fácil juego de la elucubración filosófica. Wittgenstein, por ejemplo, no habría podido quedar contento con una "hipótesis plausible" referente al significado o a los estados mentales de otros. Por lo que allí donde otros especulan, teorizan o infieren, Wittgenstein aplica su importante noción de criterio y el misterio se desvanece. Esta noción no es una noción epistemológica, una noción que apliquemos cuando queremos justificar nuestras pretensiones de conocimiento. Es una noción de gramática en profundidad y por lo tanto es una noción que apunta a conexiones conceptuales, al sentido de nuestras expresiones. Por ejemplo, nadie puede ver lo que pasa dentro del cuerpo de otra persona, pero podemos legítimamente decir 'él tiene un dolor inmenso en el oído'. ¿Por qué podemos hacer aseveraciones como esa? Porque gozamos de criterios: lo que la persona dice, su comportamiento físico, sus quejas, la enfermedad que le diagnosticaron, las medicinas que toma, etc., y todo ello nos autoriza a hablar significativamente de lo que en general se toma como sus "estados internos". Estos criterios están debidamente contextualizados y recurrimos a ellos de diferente modo, jerarquizándolos de manera diferente según las circunstancias. También un mentiroso puede tener un terrible dolor de muelas, pero podemos no creerle si lo único que está en juego es lo que nos lo dice. Claro que si además de lo que dice lo vemos que trata de arrancarse la muela, que pide a gritos que lo lleven con un dentista, etc., entonces podremos adscribirle un dolor, puesto que su conducta es para nosotros el criterio que nos permite adscribirle un dolor. Podríamos entonces decir lo siguiente: allí donde los filósofos adivinan e inventan, los hablantes normales simplemente se sirven de criterios y en general eso basta para la comunicación.

La noción de criterio es de una inmensa utilidad y tiene una obvia aplicación en el contexto de la filosofía de la mente, pero también es de gran ayuda en el terreno de la filosofía de las matemáticas. Por ejemplo, para hablar de la corrección de una inferencia o de secuencia de las transiciones que hay que efectuar para resolver una ecuación disponemos de criterios. En este como en cualquier otro contexto, el recurso a "lo interno" es inservible. La corrección de un razonamiento no es un asunto de inspiración, divina u otra, sino que simplemente disponemos de criterios para determinar si una regla fue aplicada o no correctamente. Así, aunque por sí sola es insuficiente para ello, la noción de criterio ciertamente contribuye a crear el marco de objetividad que cualquier filosofía de las matemáticas sana requiere para dar cuenta de la verdad matemática.

Semejanzas de familia. La crítica wittgensteiniana en contra de la idea tradicional de los predicados y las relaciones culmina en un violento ataque en contra del esencialismo. A través de ejemplos, Wittgenstein hace ver que nuestro uso normal tanto de nombres comunes como de adjetivos o expresiones relacionales de hecho nunca depende de que en todos los casos de aplicación esté presente uno y el mismo elemento, sea el que sea. Más bien, la situación es la siguiente: se introduce un término en relación con algo que funciona como el caso paradigmático (de tigre, de mango, de auto, etc.) y posteriormente el rango de aplicación del término en cuestión se va ampliando en función no de un elemento que esté presente en todos los casos, sino porque se van dando relaciones de semejanza entre los objetos de modo tal que nos permiten seguir aplicando el mismo término. Naturalmente, quien fija hasta dónde se da dicha semejanza (esto es, semejanza en relación con la aplicación del término) somos nosotros, los hablantes pero, y esto es importante, lo hacemos con base en consideraciones de orden práctico: cuando ya un determinado objeto no nos resulta lo suficientemente semejante a otros a los que sí se aplica el término en cuestión o cuando seguir llamándolo así tiene implicaciones lingüísticas contraproducentes, entonces sencillamente dejamos de llamarlo o calificarlo de ese modo e introducimos un nuevo término. 'Coyote', 'lobo' y 'perro', por ejemplo, podrían servir para ilustrar este fenómeno lingüístico.

El concepto de semejanzas de familia es obviamente útil en el contexto de la filosofía de las matemáticas, porque nos permitirá comprender por qué Wittgenstein habla de los números como unidos entre sí por semejanzas de familia. O sea, llamamos a algo 'un número' si se conduce de manera lo suficientemente similar a eso que llamamos 'números'. El concepto de número es, en este sentido, un concepto abierto. Así, llamamos a $\aleph_0$ un "número", porque ‘$\aleph_0$’ entra en los juegos de lenguaje matemáticos de una manera muy similar (mas no idéntica) a como lo hace, digamos, el 3 (o ‘3’). Así, pues, la utilidad explicativa de esta noción wittgensteiniana salta a la vista.

Antes de abordar propiamente hablando nuestro tema, quisiera hacer una aclaración derivada de un recordatorio. Como todos sabemos, para Wittgenstein la filosofía no puede, tanto porque no está en su naturaleza como porque no tiene la capacidad para ello, alterar ningún aspecto de la realidad del cual se ocupe. La filosofía de la música puede hacernos entender lo que es la música, la composición musical, la relación entre la música y las matemáticas, la música y los sentimientos, etc., pero no puede modificar las corrientes musicales, la creación musical. En palabras de Wittgenstein, la filosofía deja todo tal como está (Wittgenstein, 1974). Ahora bien, esto se aplica por igual a la filosofía de las matemáticas y tiene una implicación interesante que bloquea multitud de malos entendidos en relación con Wittgenstein. Me refiero al hecho de que si hay algo declaradamente absurdo es calificar a Wittgenstein como un “revisionista” en matemáticas, como si él estuviera interesado en interferir en la investigación matemática, poner en cuestión resultados matemáticos, demostrar nuevos teoremas, etc. Sostener algo así es dar claras muestras de no haber entendido en lo más mínimo la perspectiva wittgensteiniana. El teorema de Gödel, por ejemplo, ilustra bien el caso: Wittgenstein explícitamente dice que no es su función determinar la validez o invalidez del teorema mismo, sino cuestionar lo que los matemáticos (Gödel incluido) *dicen* sobre el resultado de la prueba. Son dos cosas distintas y lógicamente independientes. Se puede aceptar la prueba y rechazar su interpretación usual, inclusive si es del autor de la prueba. De hecho, la historia parece darle la razón a Wittgenstein dado que si hay algo en lo que los científicos se equivocan es en dar cuenta de sus propios resultados, en su interpretación de sus propios resultados. Sobre esto quizá digamos algo posteriormente.

Con esto terminamos nuestra presentación elemental de algunos de algunas de las nociones que posteriormente utilizaremos. Debemos ahora pasar ya a la tarea de reconstruir los puntos de vista más importantes y representativos de la filosofía de las matemáticas del segundo Wittgenstein desde luego teniéndolas presente.

Filosofía de las Matemáticas

Filosofía tradicional de las matemáticas. Como en cualquier otra rama de la filosofía, en filosofía de las matemáticas un simple punto de partida equivocado, generado por una concepción ingenuamente errónea de la proposición, se convierte rápidamente en el suelo en donde habrán de germinar los más variados puntos de vista, esto es, las más variadas filosofías de las matemáticas. Y, como veremos en un momento, el punto de partida errado en cuestión en general es simplemente el resultado de una interpretación fácil, aparentemente transparente e inocua, de expresiones y formas de hablar normales en el contexto de las matemáticas. Por ejemplo, se dicen cosas como 'dos más dos *son* cuatro' o 'es verdad que "2 + 2 = 4"'. En casos así, lo espontáneo es ver en estas expresiones afirmaciones de exactamente la misma índole que afirmaciones empíricas, del lenguaje coloquial o de las ciencias naturales o sociales. Ahora bien, esta lectura inocente pero errada de las expresiones matemáticas trae aparejada consigo la idea de que dichas "proposiciones", justamente por ser verdaderas, proporcionan o transmiten conocimiento, en cuyo caso lo más probable es que éste sea de una clase especial. Aquí el razonamiento parecería ser el siguiente: no puede ser el caso que tengamos una expresión verdadera y que no obstante ésta no transmita ningún conocimiento. El problema está en que, si es así como se interpretan las matemáticas, automáticamente se abre la posibilidad lógica del error y entonces entra en escena el escepticismo filosófico. ¿Qué se requiere para neutralizarlo o anularlo? Fundamentar las matemáticas. Hay desde luego otras razones por las cuales se pensó que la fundamentación de las matemáticas era una tarea insoslayable, pero para los efectos de esta exposición llamar la atención sobre esta línea de reconstrucción es suficiente.

El escepticismo filosófico, como es natural, representa una amenaza potencial en el todo de la filosofía, es decir, su espectro puede hacer su aparición en cualquier ámbito en el que pretendamos hablar de conocimiento. En el caso del supuesto conocimiento matemático, el problema del escepticismo (asumiendo sin conceder que se trata de un problema legítimo) es particularmente agudo, por la clase especial de conocimiento que supuestamente tenemos en matemáticas. En efecto, el conocimiento matemático es, por así decirlo, superior al conocimiento empírico, por refinado y seguro que éste sea. En terminología filosófica, la diferencia radica en que el conocimiento matemático es *a priori* y necesario. Y a partir de esto empiezan a surgir nuevos enredos y nuevos rompecabezas. Por ejemplo, es normal afirmar que puesto que las proposiciones matemáticas son verdaderas, en matemáticas se habla *de* algo, pues de lo contrario serían vacuas y eso es *prima facie* inaceptable. Pero entonces las proposiciones matemáticas tienen que versar sobre algo, es decir, sobre alguna clase de entidades, y dada la clase de conocimiento que proporcionan no podemos sino pensar que versan sobre entidades en verdad muy extrañas. Y de esta manera, casi sin darnos cuenta, nos encontramos en la vía del platonismo, que es un ruta laberíntica de la que, lo sabemos, una vez adentrados en ella no hay salida. Esta opción, desde luego es una de las múltiples opciones filosóficas que se pueden generar, si bien el resultado es el mismo: los intentos por resolver un problema filosófico lo único que logran es hacer que se ramifiquen y multipliquen y ese proceso no tiene fin.

Uno de los retos para Wittgenstein en este contexto es dar cuenta de las matemáticas *in toto* (sus expresiones, sus métodos, su conexión con experiencia y el conocimiento, etc.) *sin* desarrollar una teoría filosófica. En lo que sigue, trataré de hacer ver que Wittgenstein logra salir adelante frente al reto en cuestión, pero antes quisiera decir unas cuantas palabras acerca del carácter general de su filosofía de las matemáticas.

Rasgos generales de la filosofía de las matemáticas según Wittgenstein. Como es bien sabido, para Wittgenstein los problemas filosóficos son el resultado de incomprensiones y son, por lo tanto, pseudo-problemas. Tenemos, por lo tanto, dos clases de filósofos: el filósofo creador de mitos y el filósofo destructor de mitos. Se sigue que la filosofía liberadora sólo puede ser una *reacción.* No crece espontáneamente, sino que nace como un requerimiento urgente generado por un descontento intelectual ante los notables fracasos, las notorias falacias, las palpables incongruencias, las aseveraciones incomprensibles de la filosofía tradicional. La concepción liberadora de las matemáticas, por lo tanto, se va conformando paulatinamente a partir de la lucha en contra de multitud de tesis de filosofía de las matemáticas convencional. Así, Wittgenstein, a través de concienzudos análisis gramaticales, va desechando todo lo que es inservible en los diversos programas de filosofía de las matemáticas y a partir de sus discusiones se va delineando poco a poco la concepción correcta. En este como en otros casos, el ideal del *Tractatus* sigue vigente: de lo que se trata es de acceder a la visión correcta de las cosas *sin* para ello elaborar una nueva doctrina filosófica.

Lo anterior explica por qué de hecho Wittgenstein polemiza con tantos filósofos de las matemáticas y con tantas posiciones: él, en efecto, se enfrenta a logicistas, platonistas, intuicionistas, gödelianos, formalistas, teórico-conjuntistas y así sucesivamente, pero la explicación de ello salta a la vista: por una parte, todos ellos abordan temas importantes en relación con las matemáticas pero, por la otra, todos ellos son al mismo tiempo creadores de mitos filosóficos (referentes a los números, el espacio, el infinito, a la objetividad de las matemáticas, y así sucesivamente). Esto echa luz tanto sobre la complejidad como sobre la riqueza de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein. De hecho, podemos abordarla prácticamente desde cualquier perspectiva, dado que paulatina pero indefectiblemente terminaremos por abordar las restantes. Mi elección de punto de partida serán algunos argumentos que Wittgenstein elabora en contra de la idea logicista de que las matemáticas están necesitadas de una fundamentación.

Wittgenstein y las Matemáticas

***Juegos y matemáticas*.** Quizá debamos empezar trayendo a la memoria un contraste que Wittgenstein traza y que resulta particularmente atinado, a saber, el contraste entre las matemáticas y los juegos. Hay un sentido en el que es obvio que las matemáticas *no* son un juego. Por ejemplo, en las matemáticas no se trata de ganar o perder, así como tampoco podemos hablar de la aplicación de un juego a una teoría científica, como sí podemos hablar de las aplicaciones de las matemáticas. Por otra parte, hay rasgos en común entre las matemáticas y los juegos que dan que pensar. Por ejemplo, si bien tanto en matemáticas como en los juegos se hacen "movimientos" en concordancia con reglas, en ningún caso las reglas apuntan a algo más que las matemáticas o los juegos mismos. Por medio de ellos no se alude a nada. Sin embargo, la verdadera importancia de equiparar los juegos con las matemáticas radica en que hacerlo ayuda a ver que el requerimiento de fundamentar las matemáticas está totalmente fuera de lugar. Si efectivamente las matemáticas y los juegos se parecen en algo es porque es tan chocante la idea de fundamentar las matemáticas como la de fundamentar un juego: la aritmética o la geometría necesitan de fundamentación tanto como el ajedrez o el pókar. Así como los juegos se justifican a sí mismos, las matemáticas se componen de cálculos auto-subsistentes que son ellos mismos su propia justificación. Las matemáticas son también una especie de juego en el sentido de que sus movimientos no se efectúan propiamente hablando por medio de proposiciones. Ciertamente sus expresiones están en conexión con las proposiciones, lo cual es desde luego algo que hay que dilucidar, pero no son estrictamente hablando proposiciones. En este punto, la continuidad con el *Tractatus* es tangible.

***Proposiciones y reglas*.** Wittgenstein acepta que las expresiones que normalmente identificamos como "proposiciones matemáticas" tienen efectivamente un *status* especial, pero lo que eso sugiere es precisamente que en el fondo *no* son proposiciones. Una oración como 'hace calor' puede ser utilizada hoy para decir algo verdadero, pero su uso mañana puede dar lugar a una falsedad, en tanto que una "proposición matemática", una vez aceptada, ya no se modifica. Una vez establecida, la "archivamos", la metemos en el cajón. Lo que hay que entender es que si no estamos dispuestos a ponerla en tela de juicio es porque nosotros, los usuarios (*i.e.*, la comunidad lingüística), así lo decidimos y por consiguiente inexorablemente la imponemos. Por ejemplo, no hay más que una respuesta a la pregunta '¿cuánto es "2 + 2"?', es decir, no se le permite a ningún niño (mejor dicho, a nadie) dudar de que 2 + 2 = 4. Y es esto lo que explica su carácter de "necesarias". Una vez establecidas, nos dejamos guiar por ellas, es decir, razonamos en concordancia con ellas. El todo de nuestra experiencia queda moldeada por ellas. Las "proposiciones" de las matemáticas son como canales de experiencia; ésta, por así decirlo, fluye a través de ellas. Pero lo que todo esto pone de manifiesto es que en realidad más que proposiciones se trata de reglas de sintaxis lógica o, en terminología wittgensteiniana, de reglas de gramática. Es porque son empleadas en conexión con el lenguaje que se les considera proposiciones, pero esto último es ya una interpretación del simbolismo y desde luego una interpretación no sólo no garantizada, sino simplista y declaradamente desorientadora.

Un ejemplo no estará de más. Consideremos la geometría euclidiana. El matemático común y el filósofo estándar de las matemáticas nos dirá que cualquier teorema es una descripción de entidades abstractas o ideales como lo son los ángulos, las líneas rectas, las superficies, etc., y de relaciones entre ellas. Pero esto es una lectura totalmente gratuita del simbolismo y no sólo poco esclarecedora, sino que complica desmesuradamente el panorama. El contraste con la posición de Wittgenstein es en todo caso muy marcado. El punto de vista de éste consiste en hacer ver que los teoremas de la geometría euclidiana son básicamente "reglas de sintaxis", esto es, "gramaticales", para los enunciados acerca de dimensiones, volúmenes, distancias, áreas, etc., es decir, los teoremas de la geometría le permiten hacer las aseveraciones factuales que requiere. Por ejemplo, si alguien quiere comprar un terreno lo que necesita es saber de cuántos metros cuadrados es. Las mediciones son obviamente empíricas, pero lo que la geometría aporta es la gramática misma de las afirmaciones concernientes a mediciones y gracias a las cuales expresiones como 'la superficie de esta casa es X' *se vuelven significativas.* Las mediciones y los cálculos que se hagan inevitablemente se articulan en términos de las "verdades" de la geometría, pero la geometría misma no describe nada. Aquí lo interesante es notar que es inconcebible que alguien "refute" o "falsifique" empíricamente los teoremas de la geometría euclidiana, por ejemplo, que alguien el día de mañana "descubra" que la superficie de un terreno cuadrado no es l^2, pero decir eso no es más que decir que no se le permitiría hacer un uso diferente de la geometría, puesto que eso alteraría todo nuestro sistema de mediciones y cálculos. Si eso llegara a pasar lo declaramos sin sentido. En condiciones normales, si (supongamos) cada lado mide 100 metros, la superficie es 10,000 metros cuadrados y si alguien da un resultado diferente nosotros sabemos *a priori* que lo que afirma será absurdo, puesto que entrará en conflicto con las reglas de significación presupuestas en su aseveración. ¡Y si alguien insistiera en que su cálculo es el correcto lo más probable es que todos pensaran que lo que quiere es defraudar a alguien!

Así vistas las cosas, la utilidad de las reglas matemáticas salta a la vista. Es claro que la yuxtaposición de las nociones involucradas no es como en el caso de los conceptos "hoy" y "hacer frío", es decir, que puede tanto darse como no darse. Las ideas de triángulo y de suma son tales que, dados los postulados de Euclides, la suma de los ángulos de un triángulo *tiene* que dar como resultado 180º. Con base en esa regla se hacen los más diversos cálculos. En la sentencia (teorema) "La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º" se establece una nueva conexión, a saber, entre medidas de ángulos y números. Lo que esto significa es que en matemáticas se establecen nuevas conexiones con o entre las nociones introducidas, conexiones que una vez más son rígidas, inamovibles, definitivas, es decir, *se construyen conceptos.* Es porque hay creación conceptual que las "proposiciones" de las matemáticas no son ni meras identidades ni proposiciones empíricas, sino proposiciones sintéticas *a priori*.

En concordancia con la concepción que poco a poco se va delineando, Wittgenstein argumenta que en matemáticas, dado que sus proposiciones carecen de contenido y que por medio de ellas no se habla de nada, es imposible que en ellas se "descubra" algo. Usando su ejemplo, una investigación matemática no puede ser como una exploración al Polo Norte a la que uno se lanza pero no sabe ni dónde ni cómo va a terminar. Eso es justamente lo que no puede pasar en matemáticas. Pero, además, la idea de exploración de un mundo de entidades abstractas llamadas 'números' o 'espacios' o 'conjuntos' o ... etc., (¿qué clase de objeto podría ser una "estructura algebraica", por ejemplo?), es no sólo innecesaria sino carente por completo de poder explicativo, porque ¿qué se explica cuando se nos dice que los números son entidades y que es porque son lo que son que 2 + 2 = 4? Además de los matemáticos intoxicados de filosofía fácil: ¿quién tiene contacto con semejantes entidades: los matemáticos, los niños que hacen sus ejercicios en la escuela, la gente que hace filosofía de las matemáticas? Al establecer conexiones definitivas, lo que el matemático hace es, como dice Wittgenstein, "crear esencia". Desde luego que dichas conexiones no son arbitrarias, pero la explicación de la objetividad de las matemáticas es algo mucho más complejo que el de una mera postulación de mundos abstractos. Sobre eso diré algo más abajo.

Demostración. Contrariamente a quienes creen que Frege introdujo su famoso "principio contextual" pensando ante todo en el lenguaje natural, yo soy más bien de la opinión de que su principio fue pensado y se aplica ante todo y primeramente al simbolismo matemático. Es realmente en este contexto de signos que el principio se vuelve palpablemente obvio. Ahora bien, a mí me parece que ciertamente Wittgenstein sigue en este punto los pasos de Frege, pero también que lleva la idea subyacente a un nivel superior de aplicación. En efecto, para Wittgenstein a final de cuentas "Sólo en el flujo del pensamiento y de la vida tienen significado las palabras" (Wittgenstein, 1967: Sec. 173). Por otra parte, las razones que da Wittgenstein en favor de dicho principio son diferentes de las que Frege ofrece. Para él, como ya señalamos, las proposiciones matemáticas forman sistemas, por lo que lo más absurdo para determinar su *status* sería considerarlas aisladamente. En matemáticas, una proposición/regla no integrada a un sistema de proposiciones/reglas no es más que una secuencia de signos enteramente asignificativa. En este contexto es sólo de una "proposición" que quedó demostrada, esto es, para la cual se construyó una *prueba* a través de la cual quedó integrada a un *sistema,* que decimos que es verdadera. La demostración de una proposición/regla es lo que establece la conexión conceptual que posteriormente queda fija, es decir, que se vuelve definitiva.

Si hablamos de "sistemas", hay que recordar la muy útil dicotomía que Wittgenstein introduce de <sistema *versus* totalidad>. Las totalidades son empíricas: la de los niños de mi escuela, la de los habitantes de mi país, la de los árboles del planeta, la de los objetos del universo. Los objetos de una totalidad están vinculados entre sí por relaciones externas, esto es, contingentes. En cambio, los elementos de los sistemas están conectados entre sí por relaciones internas, o sea, necesarias. Una investigación de una totalidad da lugar a una hipótesis. Se sigue que en matemáticas no hay hipótesis y la tesis de que sí las hay (conjeturas, por ejemplo) es uno de los blancos preferidos de Wittgenstein. La conjetura de Goldbach, por ejemplo, No es una proposición *matemática* sino una regla de gramática para los juegos de lenguaje de los números pares y primos (por eso, dicho sea de paso, no es "demostrable"). Esto está vinculado con la idea de que la única forma de tener proposiciones matemáticas es mediante sus respectivas demostraciones. Es a través de su prueba como una expresión escrita en el vocabulario de las matemáticas cómo ésta adquiere su verdadero *sentido*. Es la prueba lo que *dice* lo que la expresión matemática *expresa.* De ahí que mientras no haya prueba no hay proposición matemática, estrictamente hablando.

Es intuitivamente obvio que los usuarios del lenguaje tienen que tener a su disposición toda una gama de mecanismos para corroborar o rechazar las afirmaciones que se hagan. Ahora bien, es evidente que el método de confirmación de lo que se diga tiene que estar de alguna manera conectado con su sentido. Por ejemplo, no se confirma de la misma manera una afirmación sobre el surgimiento de una estrella que una afirmación referente a un sueño, lo cual indica que el sentido de las proposiciones que se hacen en astronomía es drásticamente diferente al sentido de las proposiciones que conforman la narrativa de un sueño y la diferencia, obviamente, no es de gramática superficial. Pasa lo mismo con las matemáticas: éstas tiene su peculiar sentido y éste toma cuerpo a través de su mecanismo de confirmación, esto es, a través de su prueba, es decir, de lo que se reconoce como prueba estándar de la proposición/regla en cuestión (puede ser por sustituciones, por inducción, etc.). Es claro que la proposición/regla puede quedar integrada dentro de un sistema sólo gracias a una demostración y es por eso que lo que ésta logra es precisamente dotarla de *sentido*. En matemáticas si no hay demostración entonces no hay proposición/regla matemática, propiamente hablando. Como dije más arriba, de hecho lo que la proposición/regla *dice* es lo que su prueba *exhibe*. Hay una conexión esencial entre la proposición/regla y su prueba, una conexión tal que si se rompe entonces la proposición/regla *qua* proposición matemática en cierto sentido se destruye, puesto que el sentido de la proposición está en la prueba misma, es decir, es el todo de las transiciones que culmina en ella. Y aquí se genera una situación que en una primera instancia resulta un tanto paradójica, pero que una vez hechas las aclaraciones se vuelve perfectamente comprensible, a saber, que una expresión elaborada con signos matemáticos (lo que llamamos una 'proposición/regla') sin prueba no significa absolutamente nada, pero se vuelve significativa tan pronto se proporciona su prueba. Esto tiene, como veremos, muy importantes consecuencias.

Una característica de los sistemas matemáticos es que una vez alcanzada la demostración de una proposición/regla ésta, por así decirlo, queda inscrita en el sistema y se vuelve inamovible. Lo que esto significa es que se convierte en un paradigma de acuerdo con el cual podemos empezar a hacer nuevos cálculos. Pero para que ello suceda, y esto es de vital importancia, la prueba tiene que ser prístina, conspicua, reconocible como tal; en terminología de Wittgenstein, tiene que poder ser fácilmente examinable (*surveyable*), es decir, tenemos que tener de ella una representación sinóptica o perspicua (*Übersichlichkeit*). En matemáticas no puede haber pruebas borrosas, meramente probables, tentativas, etc. Una prueba no contundente no sirve para nada en matemáticas y hablando con mayor rigor simplemente no es una prueba. Esto es comprensible: ya vimos que en matemáticas no puede haber meras “hipótesis”, no puede haber resultados meramente probables, porque las matemáticas no son estrictamente hablando una ciencia. Esto está directamente relacionado con las distinciones previamente trazadas entre “proposición/regla” e “hipótesis científica” y entre sistema y totalidad. Las matemáticas tienen ese carácter normativo del que precisamente carecen las teorías científicas. Así, pues, si no me equivoco es más o menos el todo de la concepción corriente de las matemáticas lo que está mal y poco a poco se desmorona.

La idea de que una prueba en matemáticas debe poder ser en todo momento inspeccionable coadyuva a hacer ver que el proyecto logicista es absurdo. No hay nada más fácil que sumar mil y mil. El resultado es dos mil. Pero si tenemos que ofrecer la prueba de esa simple suma en el lenguaje russelliano vamos a necesitar un cuaderno completo para poder hacer la transcripción y en esas condiciones: ¿de qué sirve la supuesta “demostración”?¿Quién nos puede asegurar que no nos equivocamos en alguna de las operaciones de la transcripción de la suma al lenguaje de la lógica y la teoría de conjuntos?¿Cómo sabemos que no necesitamos una prueba para esa prueba? Si eso pasa con una operación tan simple como la mencionada: ¿cómo sería una transcripción logicista de, *e.g.*, una ecuación de segundo grado? Peor aún: ¿no es justamente el hecho de que sepamos, de que estemos totalmente seguros de que llegamos al resultado correcto en una operación aritmética lo que nos asegura, lo que nos hace aceptar la idea de que la transcripción russelliana, asumiendo que es fiel, es una tautología? Pero si ello es así ¿cuál es el sentido de la fundamentación logicista de las matemáticas? Es claro que estamos en presencia de una profunda incomprensión. Aquí vale la pena observar lo siguiente: una demostración lógica dentro de un cálculo cualquiera tiene exactamente las características que Wittgenstein reclama para las pruebas matemáticas. El problema es cuando la técnica lógica es puesta al servicio de un programa filosófico desorientado (en este caso, de fundamentación de las matemáticas). Lo que no se entiende son las relaciones entre los cálculos matemáticos y los cálculos lógicos. Que unos se puedan poner en conexión con otros de manera sistemática no significa que unos sirvan para “fundamentar” a otros. Es la conexión lo que no se entiende y es por eso que Wittgenstein cuestiona la pretensión logicista. Sobre la idea espuria de metamatemática diré brevemente algo más abajo.

Seguir una regla. Sin duda, en el núcleo de la filosofía wittgensteiniana de las matemáticas está su parte más original, *viz.*, las consideraciones en torno a lo que es seguir una regla. Hasta donde logro ver, esta discusión es muy probablemente la única contribución en los últimos siglos de un tópico filosófico *nuevo.* El tema es de primera importancia, puesto que lo que está en juego es el carácter objetivo de las matemáticas. Lo que aquí haré será ofrecer una presentación sintética de la argumentación wittgensteiniana, dejando de lado multitud de sutilezas de su planteamiento, recogido básicamente en las *Investigaciones Filosóficas*.

Para nuestros propósitos quizá la pregunta pertinente de arranque sea: ¿cómo dar cuenta de la objetividad de las matemáticas sin crear un mito filosófico al respecto? La cuestión es: en matemáticas, en todos sus niveles, operamos con reglas, como por ejemplo las reglas para las operaciones elementales de la aritmética (sumar, restar, etc.). Es porque aplicamos estas reglas que obtenemos los resultados *correctos.* Pero ¿cómo descubrimos e interiorizamos dichas reglas? Aquí respuestas en términos de intuiciones o inspiraciones son obviamente inaceptables. El argumento definitivo en contra de las respuestas usuales es: una regla como la de la adición vale para un número infinito de casos. Nadie ha realizado un número finito de operaciones, sino más bien un muy reducido número de aplicaciones de dicha regla. ¿Cómo entonces, sobre la base de un número finito de casos, se puede aprehender una regla que vale para un número infinito de ellos? Muy rápidamente puede hacerse ver que la respuesta en términos de flash mental, de aprehensión instantánea, de intuición trascendental, de sentido común, de inspiración divina sencillamente no sirven. Pero entonces ¿cómo es que logramos aprehender reglas así?

Es obvio que las reglas de la aritmética, como cualesquiera otra regla (de gramática o de música, por ejemplo), nos son *enseñadas.* Nadie nace sabiendo nada. El primer paso en el proceso de interiorización de una regla es que a partir de cierto momento el aprendiz *reaccione* como los demás, esto es, como todos nosotros. Es sobre esa plataforma que se inicia el proceso que culmina en '¡Ya entendí!' o en 'Ya comprendió'. Aquí la noción de criterio se revela como decisiva, puesto que la oración 'Ya entendí' no es una descripción de nada, sino una interjección, la expresión del sentimiento de que la regla ya fue interiorizada y que ya puede uno seguir adelante por su cuenta. Por eso el que alguien diga que ya entendió no basta: necesitamos corroborarlo y para eso tenemos criterios. En el caso de la suma nuestros criterios (los cuales, evidentemente, son compartidos por los usuarios de los juegos de lenguaje) son cosas como la resolución de ejercicios por parte del aprendiz, el hecho de que sume en muchas ocasiones correctamente, que pueda corregir a otros, etc. Y obviamente nada habría de más ridículo que a alguien se le ocurriera preguntar cosas '¿Cuándo aprendió ya el niño a sumar?' o '¿cuántas operaciones tiene que hacer bien alguien para que digamos que ya comprendió?'. La situación es obvia: es cuando ya en un número suficiente de casos hace las cosas bien, cuando puede corregir a otros y auto-corregirse, que entonces decimos del aprendiz que ya sabe sumar, que ya interiorizó la regla de la adición, que (por así decirlo) ya se dejó convencer por ella, es decir, que ya la aplica tal como los demás lo hacen. En otras palabras: su educación progresó y ya reacciona como los usuarios normales del simbolismo en este contexto.

Es muy importante entender que el resultado de la regla no es una arbitrariedad, sino el resultado *correcto.* Lo correcto no es meramente lo que una comunidad lingüística determina. Este es el *quid* del asunto, es claro que para cada suma hay un número infinito de reglas que podría ofrecerse. No obstante, hay sólo una que es, por así decirlo, válida. Aquí nos topamos con la paradoja de Wittgenstein, una paradoja que él mismo plantea pero que *tiene* una resolución. Aquí sí me voy a permitir citarlo *in extenso*. Dice Wittgenstein:

> "Esta era nuestra paradoja: una regla no podría determinar ningún curso de acción, porque todo curso de acción podría hacerse concordar con una regla. La respuesta era: si todo se puede hacer concordar con la regla, entonces también se le puede hacer entrar en conflicto con ella. Por lo que no habría aquí ni acuerdo ni conflicto.
>
> Que hay aquí una incomprensión se muestra en que en este ejercicio de pensamiento dimos interpretación tras interpretación; como si cada una de ellas por un momento nos dejara satisfechos, hasta que pensamos en otra interpretación que está detrás de ella. Con lo que ello mostramos es que hay un modo de aprehender una regla que *no* es una *interpretación*, sino que se exhibe de caso en caso de aplicación en lo que llamamos 'obedecer la regla'' e 'ir en contra de ella'.
>
> De ahí que haya una inclinación a decir: toda acción en concordancia con la regla es una interpretación. Pero sólo se debería llamar 'interpretación' a la sustitución de una expresión de la regla por otra" (Wittgenstein, 1974: sec. 201).

O sea, hay *una* forma de usar una regla que es lo que llamamos 'obedecer la regla', 'acatar la regla', 'actuar en concordancia con la regla', etc. La práctica misma de "seguir una regla" es posible porque se produce entre nosotros una "concordancia en reacciones": es un hecho de la naturaleza que todos tendemos a reaccionar de la misma manera. Es sólo sobre la base de esa "concordancia" que se pueden generar los acuerdos, las convenciones, etc., por medio de las cuales las matemáticas se construyen y desarrollan. Así, el fundamento último de la idea de regla objetiva y correctamente aplicada son ciertos hechos brutos de la naturaleza humana y del mundo en general (los objetos no aparecen y desaparecen súbitamente, no se derriten y solidifican de manera sorpresiva, etc.), que son lo que permite que se gesten. Y esto, obviamente, no es un vulgar convencionalismo, como en algún momento lo sostuvo Dummett (Dummett, 1978).

Esto explica la expansión de las matemáticas: cuando se trabaja en matemáticas no se tienen visiones especiales, sino que simplemente lo que se hace es aplicar reglas, tal como las asimilamos e interiorizamos. No se necesita en lo absoluto apelar a entidades ideales fantásticas, procesos internos especiales ni nada que se les parezca. Ciertamente puede haber ocasionalmente discrepancias entre matemáticos, pero lo cierto es que en general todos concordamos en los resultados. Desde esta perspectiva las cosas cobran sentido: las matemáticas son sistemas de técnicas de cálculo hechas posible gracias a que reaccionamos de las mismas formas frente a los mismos estímulos. Las matemáticas constituyen una compleja práctica humana determinada, una práctica como la de comer, ayudar a alguien si está en peligro, etc. Calcular es algo que nosotros, los humanos, hacemos.

Implicaciones. Lo que hemos presentado del cuadro que Wittgenstein pinta de las matemáticas es realmente aclaratorio, pero en todo caso es una mínima parte de su trabajo y es básicamente preliminar. De lo que hemos dicho podemos extraer muchas moralejas y conclusiones importantes en relación con toda una variedad de temas de filosofía de las matemáticas. Aquí diré unas cuantas palabras sólo en relación con tres.

a) *Rechazo de la metamatemática*. Si lo que dijo Wittgenstein acerca del carácter de las ecuaciones, de su vacuidad semántica, de su rol puramente normativo, es acertado, se sigue que las matemáticas *no* son ni pueden ser *acerca* de *nada.* A lo más que podemos asistir en el contexto de la ciencia de las técnicas de cálculo es a la expansión de los cálculos, a la invención de nuevos cálculos, pero lo que no podría haber sería un discurso matemático que versara *sobre* un cálculo dado, puesto que en matemáticas ni siquiera aparecen palabras (Tomasini, 2006)[1]. Por eso son tan peligrosas las reconstrucciones verbales de los resultados simbólicos, porque lo único que se puede hacer al hablar de una proposición (digamos, la conclusión de un razonamiento) es considerarla formalmente (esto es, describir su estructura,

[1] Estas consideraciones wittgensteinianas podrían ayudar a echar luz sobre la naturaleza del teorema de Gödel. Habría que preguntarse: ¿cómo puede un numeral *referirse* a algo? Sólo si ese numeral no está siendo usando como numeral. Por lo tanto, el proceso de aritmetización de la sintaxis es un mecanismo de semántica matemática, más que de matemáticas *tout court*. En todo caso, es obvio que Wittgenstein proporciona elementos para una reflexión filosófica seria en relación con el famoso teorema de Gödel.

sus partes, etc.). Pero no se describen todos los pasos del procedimiento gracias al cual se llegó a ella, sino solamente lo que nos parece que "dice", cuando lo que dice sólo puede comprenderse si se conoce su prueba. Ésta, sin embargo, tiene una multiplicidad lógica que difícilmente se conserva cuando las matemáticas son expuestas "en prosa". Lo que importa de un cálculo es que sus "proposiciones" estén justificadas por la aplicación de reglas, no por las "explicaciones" externas que se puedan articular.

Aquí quizá valdría la pena hacer una aclaración. Wittgenstein, como vimos, no pretende erigirse en juez de resultados matemáticos. Si alguien inventa un cálculo no hay nada que objetar, a menos de que, por ejemplo, aplique mal las reglas de inferencia o que su construcción presente alguna clase de falla. Lo que Wittgenstein cuestiona es la *interpretación filosófica* de esos nuevos cálculos y en particular la idea de que por medio de ellos se resuelven problemas filosóficos. Lo que es equívoco aquí es quizá la expresión misma 'metamatemática', porque da la impresión de que los cálculos matemáticos mismos pueden *referirse* a cálculos matemáticos de orden inferior, en el mismo sentido en que podemos en español hablar del francés, y eso simplemente no es el caso. Lo que hace quien hace metamatemática es simplemente elaborar nuevos cálculos, es decir, establecer nuevos (diferentes) sistemas de reglas, reglas para la construcción de cálculos o de sistemas formales, por ejemplo. Pero no es que haya "referencia" a los cálculos matemáticos. Aquí quizá lo que nos confunde es el paralelismo con el lenguaje natural, en el que podemos hablar *en* español *del* español. Pero precisamente es por ser "semánticamente cerrado" que los lógicos critican el lenguaje natural, por lo que no resulta *prima facie* comprensible que no acaten sus propias objeciones en el caso de las matemáticas y la metamatemática: ¿acaso no tendríamos que decir que las matemáticas son "semánticamente cerradas" si las matemáticas pudieran referirse a las matemáticas? Pero, una vez más, el problema no está en los nuevos cálculos mismos, los cuales están perfectamente en orden, sino en su lectura. Por otra parte, Wittgenstein tenía en la mira ante todo la idea de que por medio de la lógica se puede componer (o descomponer) algo en las matemáticas. Esto me lleva a un punto importante.

El tema de la posibilidad o imposibilidad de la metamatemática (pensando ante todo en la lógica) está obviamente vinculado a otros, de los que brota, por lo que realmente la cuestión podría dirimirse sólo si consideramos esos otros "problemas". Un problema así es, obviamente, el de las contradicciones en los fundamentos de las matemáticas. Sobre este intrincado tema haré aquí tan sólo unos cuantos recordatorios.

b) *Contradicciones*. Quizá lo primero que en este caso deba hacerse sea hacer un par de aclaraciones a manera de preámbulo para la presentación de alguna línea de pensamiento de Wittgenstein en relación con las paradojas y las contradicciones. En primer lugar, el objetivo de Wittgenstein es, por así decirlo, comprender el significado y la importancia de las contradicciones, no pretender ofrecer un tratamiento correctivo proponiendo algún formalismo nuevo con tales o cuales características; en segundo lugar, sería un error inmenso interpretar esto como una especie de defensa o promoción de las contradicciones. Esto es algo que, haciendo una tergiversación fácil de algunas afirmaciones wittgensteinianas consideras aisladamente, se podría querer inferir. Con esta advertencia en mente podemos pasar a reconstruir algunas de sus líneas de pensamiento.

Es un hecho que a Wittgenstein siempre le llamó la atención lo que él veía como un "terror supersticioso" hacia las contradicciones por parte de los matemáticos y los lógicos. Desde luego que éstas representan un problema, pero lo que no está en lo más mínimo claro es en qué sentido. El tratamiento tradicional, ejemplificado a la perfección en la teoría de conjuntos, ilustra muy bien la cuestión. La historia es bien conocida: Russell le presenta su paradoja por carta a Frege con lo cual le hace ver que *su* sistema es inconsistente y que, por lo tanto, contiene una paradoja. Russell, quien de manera independiente desarrolla un programa muy semejante al de Frege, intenta dar solución al problema de la paradoja, la cual concierne sobre todo a la fundamental noción de clase, mediante su muy alambicada Teoría de los Tipos Lógicos. La reconstrucción russelliana de las matemáticas resuelve el problema de la paradoja pero, por razones en las que aquí no entraremos, a un costo tanto técnica como filosóficamente excesivo, por lo que de hecho termina igualmente en un fracaso. Ahora bien, uno de sus elementos fundamentales, *viz.*, la teoría de conjuntos, es por así decirlo reformateado por Zermelo, esto es, queda debidamente axiomatizada de manera que se bloquea el mecanismo de producción de paradojas. ¿Cómo se logra esto? Básicamente, mediante una serie de *estipulaciones*. La idea y el proceder subyacentes podrían quedar presentados como sigue: en el juego de lo que se conoce como 'teoría de conjuntos', ciertas combinaciones de signos son ilegítimas y quedan proscritas. La idea de axiomatización posteriormente se apodera de los matemáticos quienes la convierten en el objetivo supremo de su tarea *qua* matemáticos. La axiomatización de las matemáticas, esto es, de cada teoría dentro de cada rama de las matemáticas, ofrece a no dudarlo diversas ventajas, pero la mayor parecería ser sin duda que quedamos blindados frente a las contradicciones, las cuales quedan excluidas sistemáticamente.

Independientemente del inmenso impulso que recibieron las ciencias formales gracias a programas como el recién mencionado, la pregunta sigue en el aire: ¿cuál es realmente el problema que plantean las contradicciones?¿De dónde viene ese temor tan grande de que se demuestre que un sistema, un cálculo, es inconsistente?¿Por qué tanto temor a la aparición de una contradicción?

La posición de Wittgenstein a este respecto es no sólo original, sino interesante *per se*, inclusive si fuera equivocada, lo cual no creo. Preguntémonos: en verdad ¿por qué nos preocupa tanto una contradicción? El lenguaje natural, por ejemplo, es (en el sentido que importa a los lógicos) contradictorio, puesto que incorpora a la paradoja del mentiroso, por lo que de seguro que podríamos encontrarnos con un mentiroso que afirmara que todo lo que dice es falso y que por lo tanto todo lo que dice es verdad, lo cual implica que lo que dice es falso, luego es verdad, etc., y que así pasara días y noches, teniendo a la lógica de su lado. Obviamente, esa situación a primera vista posible en el fondo es irreal, pero ¿qué haríamos si alguien se condujera lingüísticamente de esa manera? A mí me parece que simplemente ignoraríamos lo que el sujeto en cuestión dijera, puesto que estaríamos conscientes de que el tener un lenguaje semánticamente abierto no lo afecta ni un ápice y nos sigue siendo tan útil como siempre. Ahora bien, dado que lo que nos interesa son los peligros que entrañan las contradicciones en los lenguajes matemáticos o formales más en general, nuestra pregunta es entonces: ¿podríamos reaccionar del mismo modo cuando en lugar de una paradoja en el lenguaje natural nos topáramos con una en un cálculo?¿Por qué sí o por qué no?

Una contradicción no tiene en sí misma nada de excepcional. Es simplemente una fórmula de la forma '$(p \mathbin{\&} \sim p)$'. ¿Por qué no podría ser el caso que, si en un cálculo de pronto nos topamos con una fórmula así, exclamáramos: 'mira qué curioso. Una contradicción' y simplemente la ignoráramos y siguiéramos adelante?¿O no podría darse el caso de que inclusive pudiéramos querer generar una contradicción, por ejemplo como una curiosidad muy especial o, como sugiere Wittgenstein, para hacer ver que en el fondo nada en este mundo es totalmente cierto? En todo caso, lo que parece incuestionable es que urge cambiar nuestra *actitud* hacia la contradicción y dejar de lado el horror que invade a los matemáticos y a los lógicos. Esto por una parte.

En segundo lugar, podemos preguntarnos: ¿qué pasaría si, *per impossibile*, se demostrara que las matemáticas actuales son inconsistentes?¿Empezarían a caerse los aviones, se derrumbarían los puentes o habría que demoler los edificios que los ingenieros construyeron por medio de ella? Eso suena fantástico, por no decir declaradamente absurdo. Por otra parte, ¿es seguro que no podría un ingeniero usar un sistema formal inconsistente y que cada vez que apareciera una contradicción simplemente la ignorara o la hiciera a un lado? La situación sería semejante a la siguiente: queremos jugar ajedrez y alguien introduce la regla de que la reina también se mueve como el caballo, sólo que se trata de una regla a la que de hecho *nunca* se recurre. ¿No estaríamos entonces jugando ajedrez? No parece haber razones para decir algo así. Por otra parte, ¿qué pasaría si hubiera un sistema que fuera contradictorio, que nadie hiciera caso de las contradicciones que aparecieran y que cuando alguien se dedicara a producirlas la respuesta usual fuera: 'No seas ocioso! Dedícate a expandir el sistema, no a divertirte buscando fórmulas que no sirven para nada'. Pero si ello efectivamente fuera así: ¿en dónde está, en qué consistiría realmente el problema con las contradicciones?

Me parece que podemos presentar, parcialmente al menos, el punto de vista de Wittgenstein siguiendo con la analogía del ajedrez y la nueva regla. El problema no es tanto la jugada extraña misma, sino más bien que simplemente no sabemos *cuándo* uno de los jugadores va a querer servirse de la nueva regla. El problema es, más que otra cosa, que con una regla así se desquicia nuestra idea de juego de ajedrez. Y es *eso* lo que no podemos permitir, porque entonces lo que se violentado es nuestra idea misma de cálculo. Dejaríamos de saber si estamos trabajando en un cálculo o en una teoría empírica, por ejemplo. Wittgenstein expresa la idea como sigue: "¿Podría decirse: 'La contradicción es inocua si se le puede sellar'? Y ¿qué nos impide que la sellemos? Que no nos reconocemos en el cálculo. Luego *ese* es el problema. Y eso es lo que se quiere decir cuando se dice: la contradicción muestra que hay algo que no está en orden en nuestro cálculo. Es simplemente el *síntoma* local de una enfermedad de todo el cuerpo. Pero el cuerpo está enfermo sólo si no nos reconocemos" (Wittgenstein, 1975: 104). O sea, lo que la contradicción echa por tierra es nuestra noción de cálculo como un sistema de signos construido a base de pruebas, un sistema de reglas que establecemos de manera definitiva, en relación con las cuales no hay titubeos de ninguna índole, etc. No es, pues, la contradicción en sí misma lo que es peligroso. Lo que sucede es que una contradicción en el contexto de disciplinas como las matemáticas, la lógica o la teoría de conjuntos indica que hay opciones respecto a la aplicación de las reglas. Eso significa que nuestra idea de lo que es un cálculo se vio afectada y ello a su vez entraña cambios y reajustes conceptuales que no estamos preparados para hacer. No podemos darnos el lujo de confundir reglas con proposiciones, sistemas con totalidades, investigación empírica con creación conceptual. No es, pues, por consideraciones abstractas sobre la maldad intrínseca de las contradicciones ni por peligros teóricos o formales que la contradicción plantea un problema.

Lo que he presentado no es más que *una* línea de pensamiento de las muchas desarrolladas por Wittgenstein en torno al tema de las contradicciones y las paradojas. No podemos hacer otra cosa en una exposición de estas magnitudes. En todo caso, es claro que las perplejidades que las contradicciones generan en nosotros no se despejan mediante la construcción de cálculos cada vez más complejos y sofisticados. Ciertamente, la función del filósofo no es trabajar *dentro* del cálculo, sino más bien comprenderlo, situándolo por así decirlo en conexión con resto de nuestros conceptos y examinando el *modus operandi* de sus conceptos, el *status* de sus afirmaciones, etc. En todo caso, me parece justo afirmar que lo que podríamos denominar la 'concepción antropológica de la contradicción' es con mucho de lo más esclarecedor que hay en la literatura sobre el tema.

c) *Clases de números*. Que la filosofía del lenguaje es decisiva para el todo de la filosofía de Wittgenstein, y en particular para su filosofía de las matemáticas, es algo que dejan en claro sus reflexiones sobre los números. Esto es así porque el exitoso tratamiento de diversos fenómenos lingüísticos puede posteriormente extenderse al caso de los números, *inter alia*. Veamos rápidamente de qué se trata.

La perspectiva praxiológica del lenguaje se articula en términos de la noción de juegos de lenguaje y de movimientos en ellos. Desde este punto de vista, el significado de una palabra sigue siendo su contribución al sentido del movimiento lingüístico que se haga y aunque un elemento de ostensión deba estar involucrado, el sentido brota o se deriva no de la mera referencia sino de la naturaleza del juego de lenguaje de que se trate. Es el juego de lenguaje lo que determina la clase de movimiento que se hace, no al revés. Por ejemplo, la expresión 'el perro', acerca de la cual Russell nos enseñó que cuando forma parte de una oración no es un nombre sino una expresión existencial encriptada, aunque evidentemente asociada con el animal que llamamos 'perro', tiene significados diferentes si los movimientos que se hacen son de o en juegos de lenguaje diferentes. Así, por ejemplo, 'perro' o 'el perro' no significa lo mismo en:

a. el perro es un mamífero (verdad científica)
b. el perro de mi vecino me acusó con el maestro (insulto)
c. el perro de mi tía me mordió (descripción)
d. "Por el perro, vengo mañana a verte" (juramento)
e. "El perro andaluz" es la mejor película de Buñuel (nombre propio)

Dicho de manera esquemática y poco fina, lo cierto es que desde la perspectiva de Wittgenstein y contrariamente a cómo normalmente se procede, no pasamos de los significados de las partes componentes a la expresión completa sino al revés: del sentido total de la expresión al significado de sus componentes. La razón es simple: el significado de las partes componentes es una función de lo que se dice y esto último puede ser de lo más variado. Ahora bien, independientemente de cuál sea el juego de lenguaje en el que participemos, de todos modos los movimientos que hagamos quedan revestidos con un mismo uniforme, a saber, la estructura que impone la gramática superficial. Como ya sabemos, esto es lo que nos confunde, pues automáticamente borra las distinciones entre juegos de lenguaje, y nos obliga a hablar en términos de estructuras, de componentes y de proposiciones. De esta manera se unifican bajo el rubro 'proposición' múltiples movimientos que desde el punto de vista del funcionamiento del lenguaje no tienen prácticamente nada en común. La filosofía del último Wittgenstein constituye un mecanismo para rescatar el sentido de las garras de las formas gramatical y lógica.

Vale la pena observar que lo que pasa en el contexto de las proposiciones pasa también en otros contextos. Consideremos rápidamente el de los números. El hecho de que tengamos la categoría general "número" automáticamente nos induce a incluir en ella a "cosas" que son drásticamente diferentes. Esto no es muy difícil de hacer ver. La idea de número está asociada en primer término con la idea de número natural. Lo que con los números hacemos son operaciones. Es a través de éstas, que se les caracteriza[2]. El 2, por ejemplo, es ese número par que sólo se divide por sí mismo y por la unidad, el número que es igual a '1 + 1', etc. Aunque esto no pretende ser una definición, sí caracterizamos a los números naturales por sus propiedades habría que decir que sus rasgos esenciales son que son inductivos (*i.e.*, que tienen todas las propiedades hereditarias del 0) y no reflexivos (esto es, que se modifican si se les añade 1). Nos encontramos aquí en el dominio de la aritmética.

Ahora bien, hay multitud de operaciones que se pueden hacer con números enteros naturales que dan como resultado números enteros naturales, como si multiplicamos 2 por 3, pero es claro que hay otras operaciones que dan resultados que, por así decirlo, nos sacan del universo de la aritmética. Por ejemplo, la división de 7 entre 3 no da como resultado un número natural, sino uno irracional. Dado que seguimos empleando números naturales en la construcción de uno irracional es comprensible que también

[2] La caracterización del número no es lo mismo que la definición de 'número'.

sigamos refiriéndonos a dicho resultado como un "número", por más que ya no corresponda a la idea original de número. Esto, que es una estipulación, es gramaticalmente inobjetable, pero filosóficamente de lo más engañoso. Es simplemente porque eso que denominamos 'números irracionales "se parecen" lo suficiente a los números naturales que los seguimos llamando 'números', pero en realidad son "cosas" mucho muy diferentes y, sobre todo, tienen propiedades diferentes y entran en operaciones mucho muy diferentes a las de la aritmética elemental. O sea, superficialmente son lo mismo, esto es, números, pero en realidad se trata de cosas distintas. Lo que sucede es que marcamos a los números irracionales mediante signos que usamos como números, puesto que entran en cálculos, pero identificarlos como números cuando la idea de número era la de número natural es un error equivalente al de decir, por ejemplo, que dado que la oración 'Él jura que lo vio entrando al edificio' tiene la misma forma que 'el peso atómico del oro es 79', entonces en ambos casos nos las habemos con lo mismo, esto es, con proposiciones. Es cierto que ambas pueden ser vistas como elementos de funciones de verdad y por lo tanto como siendo esencialmente verdaderas o falsas, pero si la concepción praxiológica es acertada, ahí justamente está el error. En efecto, si nos fijamos en la utilidad que prestan, en la clase de cosas que permiten expresar, etc., salta a la vista que se trata de instrumentos lingüísticos con los que hacemos movimientos (decimos cosas) que no tienen nada en común. Es, pues, tan equívoco hablar de "la proposición" como de "el número" y de sus respectivas esencias.

Rápidamente preguntémonos: dado que es obvio que un número irracional no es un número en el sentido de 'número natural': ¿qué es entonces un número irracional? Wittgenstein considera el caso de π. Es claro que si quisiéramos preguntar '¿qué número es π?', la respuesta tendría que ser 'ninguno en particular'. Más bien 'π' sirve para indicar una relación especial entre las longitudes de la circunferencia y del diámetro. Podemos pasar esa relación geométrica al lenguaje de los números naturales y si queremos podemos llamar al resultado un 'número', sólo que se trata de un número que no se le puede, por así decirlo, determinar. La razón es que, como dice Wittgenstein, un número irracional es más bien una ley de expansión de números, esto es, una ley que nos permite, en función de nuestros requerimientos, señalar un punto particular en dicha expansión. Tomemos, por ejemplo, '$\sqrt{2}$'. Este "número" puede ser:

1.4,
1.41
1.414
1,4141

1.41421
1.414213 ... etc.

En otras palabras, podemos extendernos en la expansión tanto como queramos. Nuestra pregunta ahora es: ¿son lo mismo un número natural que uno irracional o, si se prefiere, es lo mismo un número que una ley para la expansión de una secuencia de números? El hecho de que bauticemos la regla misma con un signo al que le damos tratamiento de número ¿basta para convertirlo en un "número"? La respuesta me parece que debería ser la siguiente: gramatical o simbólicamente sí, filosóficamente no. Obsérvese que análisis semejantes se pueden efectuar en relación con los números complejos, los números imaginarios o los números transfinitos. Se trata de nociones matemáticas unidas entre sí no por una esencia, sino por semejanzas de familia.

Me parece que estamos en posición de sostener que el panorama de las matemáticas que brota del filosofar wittgensteiniano es a la vez rico, complejo y elucidatorio. En todo caso, lo que debe quedar claro es que se trata de un panorama filosófico que sólo puede ser generada por la perspectiva praxiológica del lenguaje y el método de los juegos de lenguaje.

Observaciones Finales

Hemos hecho un relampagueante recorrido por los dominios de la filosofía de las matemáticas del Wittgenstein maduro. Nuestro problema no es que percibamos fallas en sus planteamientos, sino que fue tan poco el material abarcado y fue presentado de manera tan superficial que si bien no equivale a una distorsión del pensamiento de Wittgenstein sí representa un empobrecimiento brutal de su filosofía de las matemáticas. Pasamos sin rozar siquiera temas tan variados como la cuestión de la aplicación de las matemáticas, el tema de las diferentes clases de pruebas que se emplean en matemáticas (inductivas, por reducción al absurdo, directas, mediante diagramas, etc.), la naturaleza de la inducción, todo lo relacionado con el infinito, el asunto de la compulsión matemática y muchos otros más. La verdad es que un problema que constantemente se nos plantea cuando examinamos aspectos del pensamiento de Wittgenstein es que casi forzosamente terminaremos con un mal sabor de boca. ¿Por qué? Porque es casi imposible no sentir que a lo más que llegamos en nuestro esfuerzo por sintetizarlo y por enunciar algunos de sus resultados es a entenderlo a medias, quizá hasta a trivializarlo y con toda seguridad a no hacerle justicia ni a su profundidad ni a su sabiduría.

Bibliografía

Dummett, M. (1978). “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics” en Truth and Other Enigmas, London: Duckworth.

Tomasini Bassols, A. (2006). Filosofía y Matemáticas: ensayos en torno a Wittgenstein, México: Plaza y Valdés.

Wittgenstein, L. (1967). Zettel, Oxford: Basil Blackwell.

__________ (1974). Philosophical Investigations, Oxford: Basil Blackwell.

__________ (1975). Remarks on the Foundations of Mathematics, London: The M.I.T. Press.