

## Carta EWMA con varianza efectiva para monitorear variabilidad en procesos de control de calidad multivariados

### EWMA Chart Based on the Effective Variance for Monitoring the Variability of Multivariate Quality Control Process

VÍCTOR HUGO MORALES<sup>1,a</sup>, JOSÉ ALBERTO VARGAS<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE  
CÓRDOBA, MONTERÍA, COLOMBIA

<sup>2</sup>DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE  
COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA

---

#### Resumen

Cuando se tiene interés en monitorear pequeños cambios en la variabilidad (o en la media) de un proceso, las cartas tipo EWMA han mostrado ser muy eficientes. Estas cartas, en el caso multivariado, tradicionalmente han utilizado la varianza generalizada como medida global de variabilidad, definida como el determinante de la matriz de varianzas y covarianzas. Peña & Rodríguez (2003) propusieron una medida global de variabilidad, llamada varianza efectiva, definida para  $p$  variables como la raíz  $p$ -ésima de la varianza generalizada, la cual, en algunos escenarios del análisis multivariado, ofrece algunas ventajas sobre la varianza generalizada. En este artículo se construye una carta EWMA utilizando la varianza efectiva.

**Palabras clave:** varianza efectiva, carta EWMA, varianza generalizada, variabilidad global, procesos multivariados.

#### Abstract

When it is of interest monitoring small changes in the variability (and/or the mean) of a process, the EWMA control charts have shown to be very efficient. These charts, usually use the generalized variance as a measure of global variability, defined as the determinant of the variance covariance matrix. Peña & Rodríguez (2003) proposed a measure of overall variability, called effective variance, defined to  $p$  variates as the  $p$ th root of the generalized variance, which, in some scenarios of multivariate analysis, offers some advantages over the generalized variance. In this paper an EWMA control chart is constructed by using the effective variance.

**Key words:** Effective variance, EWMA charts, Generalized variance, Overall variability, Multivariate processes.

---

<sup>a</sup>Profesor asistente. E-mail: vmorales@sinu.unicordoba.edu.co

<sup>b</sup>Profesor titular. E-mail: javargasn@unal.edu.co

## 1. Introducci3n

Un aspecto de mucha importancia en los procesos de control de calidad multivariados es la detecci3n de los cambios en la variabilidad, que pueden ocurrir en ellos. Durante mucho tiempo la atenci3n estuvo centrada fundamentalmente en la media de los procesos, siendo muchas las propuestas hechas para monitorear dicha característica, pero en los últimos 20 años ha sido creciente la valoraci3n que se ha venido dando a la idea de contar con herramientas eficaces que sirvan para monitorear la variabilidad de estos. Es así como en el desarrollo de cartas de control que sirvan para tal fin, se han hecho propuestas que van desde cartas tipo *Shewhart*, hasta cartas tipo EWMA, pasando por las cartas tipo CUSUM. En este último grupo de cartas aparecen las propuestas hechas por Chan & Zhang (2001) y Hawkins (1991). Tal vez la carta más utilizada para monitorear la variabilidad de procesos multivariados, es la carta tipo *Shewhart*, conocida como *Carta  $|S|$* , (e.g. Alt & Smith (1988), Montgomery (2001) y Jaupi (2002)). Esta, como es común en las cartas de este tipo, ha mostrado algunas deficiencias cuando el interés tiene que ver con la detecci3n de cambios pequeños en la variabilidad de un proceso. En lo sucesivo, un cambio pequeño en la variabilidad del proceso, se entenderá como un valor del cociente  $|\Sigma|/|\Sigma_0|$  cercano a uno, donde  $|\Sigma|$  y  $|\Sigma_0|$  representan el determinante de la matriz de varianzas y covarianzas fuera de control y bajo control, respectivamente. Cuando se tiene este tipo de requerimientos, las cartas tipo EWMA han mostrado un mejor desempeño que las cartas tipo *Shewhart*, tanto en procesos univariados como en procesos multivariados. Tradicionalmente, estas cartas han utilizado la varianza generalizada como medida global de variabilidad. Como una forma alterna de resumir toda la variabilidad contenida en la matriz de varianzas y covarianzas, Peña & Rodríguez (2003) propusieron la varianza efectiva. Esta medida, como está definida, tiene propiedades de las que carece la varianza generalizada, deseables en algunos escenarios del análisis multivariado. Una de las más importantes es la que permite, en presencia de conjuntos de variables medidas en las mismas unidades, hacer comparaciones de conjuntos de estas, cuando estos conjuntos no tienen igual dimensi3n. En este trabajo, se propone una carta tipo EWMA que utilice la varianza efectiva como medida global de variabilidad. El desempeño de esta carta será determinado a partir de la comparaci3n con la *Carta  $|S|$*  y con la carta EWMA-V.

## 2. Algunas cartas multivariadas para monitorear variabilidad

Existen actualmente alternativas para monitorear la variabilidad en procesos de control de calidad multivariados. Entre las opciones hay cartas tipo *Shewhart*, cartas tipo CUSUM y cartas tipo EWMA. Entre las cartas tipo *Shewhart* se encuentra la carta  $|S|$ , tal vez la más popular entre todas las cartas utilizadas para este propósito. Se construye de la siguiente manera (Vargas 2006):

Suponiendo que se han tomado  $m$  muestras aleatorias de observaciones, sea  $S_i$  la matriz de varianzas y covarianzas muestral de la  $i$ -ésima muestra,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Sea  $\bar{S}$  el promedio de los  $S_i$  obtenidos en cada punto de muestreo, y  $|\bar{S}|$  su determinante. Con normalidad multivariada de las muestras, la distribución asintótica de  $|S|$  es normal univariada; además, se tiene que

$$E(|S_i|) = b_1|\Sigma| \tag{1}$$

y

$$\text{Var}(|S_i|) = b_2|\Sigma|^2$$

donde  $S_i$  es la matriz de varianzas y covarianzas en el  $i$ -ésimo punto de muestreo,  $\Sigma$  es la matriz de varianzas y covarianzas poblacional y  $b_1, b_2$  son constantes definidas por

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i) \tag{2}$$

y

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left\{ \prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right\} \tag{3}$$

En las ecuaciones (2) y (3),  $n$  y  $p$  representan el tamaño de muestra en cada punto de muestreo y el número de variables que se tienen en cuenta en el proceso. En caso de que la matriz de varianzas y covarianzas del proceso, por ejemplo  $\Sigma_0$ , sea conocida, los límites de control de la carta vienen dados por

$$\begin{aligned} LCS &= |\Sigma_0| (b_1 + 3\sqrt{b_2}) \\ LC &= |\Sigma_0| b_1 \\ LCI &= |\Sigma_0| (b_1 - 3\sqrt{b_2}) \end{aligned} \tag{4}$$

Si es necesario hacer una estimación de  $\Sigma_0$ , es usual tomar  $\bar{S}$  como estimador, donde  $\bar{S}$  se define como el promedio de los  $S_i$  obtenidos en cada punto de muestreo. En este caso, los límites de control vienen dados por

$$\begin{aligned} LCI &= \max \left( 0, |\bar{S}| \left( 1 - 3\frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \right) \\ LC &= |\bar{S}| \\ LCS &= |\bar{S}| \left( 1 + 3\frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

Recientemente García (2007) propuso una carta tipo *Shewhart* para monitorear la dispersión de procesos con datos faltantes, utilizando la varianza efectiva como medida global de variabilidad. En esta propuesta, García (2007) hace las siguientes consideraciones: monitorear la matriz de varianzas y covarianzas equivale a probar repetidamente  $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$  contra  $H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$ , suponiendo que no existen cambios en el vector de medias poblacional. En el diseño de la carta de control con varianza efectiva toman parte tres parámetros: la probabilidad de error tipo I ( $\alpha$ ), el tamaño de muestra ( $n$ ) y el número de variables que se monitorea simultáneamente

( $p$ ). Una vez que se han establecido estos parámetros, empieza el diseño de la carta de control, calculando sus límites de control. El autor empieza diseñando una carta con un solo límite de control: límite de control superior (LCS), el cual sirve para detectar aumentos en la variabilidad. Calculando la varianza efectiva  $|S_t|^{1/p}$  de cada muestra tomada del proceso, se considera que el proceso está bajo control cuando

$$P(|S_t|^{1/p} > LCS) = \alpha$$

donde  $\alpha$ , la probabilidad de error tipo I, se considera también la probabilidad de falsa alarma, es decir, que la carta muestre que el proceso está fuera de control, cuando realmente está bajo control.

Según Peña & Rodríguez (2003),

$$\frac{|S_t|^{1/p}}{|\Sigma_0|^{1/p}} \sim \Gamma\left(\frac{p(n-p)}{2}, \frac{p(n-1)}{2} \left(1 - \frac{(p-1)(p-2)}{2n}\right)^{1/p}\right) \quad (6)$$

y considerando

$$P(|S_t|^{1/p} > LCS/\Sigma = \Sigma_0) = \alpha$$

se establece que

$$LCS = \Gamma^{(\alpha)}(a, b)|\Sigma_0|^{1/p} \quad (7)$$

donde  $\Gamma^{(\alpha)}(a, b)$  es el cuantil de la distribución gamma con parámetros  $a, b$ , que deja a su derecha un área  $\alpha$ . El funcionamiento de la carta de control es el siguiente: primero, se toma una muestra del proceso y se obtiene el valor de la varianza efectiva muestral  $|S_t|^{1/p}$ . Si este valor sobrepasa el límite de control ( $LCS$ ), se considera que el proceso está fuera de control debido a alguna causa asignable o especial que ha influido en el aumento de la variabilidad. Diseñada la carta de control, se utiliza para monitorear cualquier cambio en las características de calidad. Puesto que también resulta importante detectar disminuciones en la variabilidad, dado que pueden dar información importante para mejorar el proceso, García (2007) también presenta una carta con límites de control superior e inferior.

Hawkins (1991) propuso construir cartas de control multivariadas para monitorear la variabilidad de los procesos, utilizando variables ajustadas por regresión. En este contexto de las variables ajustadas por regresión,  $\mu_0$  y  $\Sigma_0$  se asumen conocidas. Con estos supuestos, se propone el estadístico

$$Z_t = [\text{diag}(\Sigma_0^{-1})]^{-1/2} \Sigma_0^{-1} (X_t - \mu_0) \quad (8)$$

donde  $Z_t = (Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tp})'$ .

Cuando el proceso está bajo control, el estadístico  $Z_t$  definido en (8) se distribuye  $N(0, I_p)$ .

Para detectar cambios en la varianza de la  $j$ -ésima componente  $Z_{tj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , se define el siguiente estadístico:

$$W_{tj} = \frac{|Z_{tj}|^{1/2} - 0.822}{0.349} \quad (9)$$

Cuando el proceso se encuentra bajo control, el estadístico  $W_{tj}$ , definido en (9), se distribuye aproximadamente como  $N(0, 1)$ . De otra forma, si la distribución de  $Z_{tj}$  cambia de  $N(0, 1)$  a  $N(0, \sigma^2)$  con  $\sigma \neq 1$ , entonces la distribución de  $W_{tj}$  cambia aproximadamente a  $N(2.355(\sigma^{1/2} - 1), \sigma)$ . Note que, de acuerdo con los anteriores resultados, se puede considerar el siguiente razonamiento: Si existe algún  $Z_{tj}$  de tal forma que  $Z_{tj}$  no tiene distribución  $N(0, 1)$ , entonces se puede decir que el proceso no está bajo control. Además, si  $W_{tj}$  no se distribuye  $N(0, 1)$ , entonces hay cambios en la variabilidad. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, es posible construir la carta usual CUSUM para monitorear cambios en la media en  $W_{tj}$ , pero también es posible utilizar estos resultados para monitorear cambios en la varianza de  $Z_{tj}$ . En consecuencia, todas las  $p$  cartas CUSUM pueden ser combinadas de muchas formas para obtener las llamadas *múltiples cartas de control CUSUM*. Específicamente se calcula, para  $t \geq 1$  y  $j = 1, 2, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} S_{tj}^+ &= \text{máx} \left( 0, S_{(t-1)j}^+ + W_{tj} - r \right) \\ S_{tj}^- &= \text{mín} \left( 0, S_{(t-1)j}^- + W_{tj} - r \right) \end{aligned} \tag{10}$$

donde  $S_{0j}^+ = S_{0j}^- = 0$  y  $r$  es el valor de referencia.  $S_{tj}^+$  y  $S_{tj}^-$  son diseñadas para detectar, respectivamente, incrementos y decrementos en la  $j$ -ésima componente de  $Z_t$ , puesto que  $(\sigma^{1/2} - 1) > 0$  si  $\sigma^2 > 1$  y  $(\sigma^{1/2} - 1) < 0$  si  $\sigma^2 < 1$ .

Una señal fuera de control es detectada por las múltiples cartas CUSUM, tan pronto como

$$\text{máx}_{1 \leq j \leq p} \{ \text{máx}(S_{tj}^+, -S_{tj}^-) \} > h \tag{11}$$

donde  $h$  es el valor de decisión.

En la búsqueda de cartas de control eficientes, Yeh & Lin (2002) propusieron utilizar la transformación integral de probabilidad para transformar diferentes estadísticos en la misma variable aleatoria. De esta manera, diferentes estadísticos pueden ser combinados y graficados en la misma carta de control. La parte que tiene que ver con la matriz de varianzas y covarianzas está dada por

$$v_t = P \left( \prod_{i=1}^p F_{g_1, g_2} \leq \left( \prod_{i=1}^p \frac{k(n-1) - k + 1 - i}{n-1-i} \right) \times \frac{|(n-1)S_t|}{|k(n-1)\bar{S}|} \right) \tag{12}$$

donde  $F_{g_1, g_2}$  representa una distribución  $F$  con  $g_1 = (n-1-i)$  y  $g_2 = k(n-1) - k + 1 - i$  grados de libertad, siendo  $k$  el número de muestras preliminares y  $n$  el tamaño de cada una. Las  $p$  distribuciones  $F$  del producto son independientes. En cada muestra de tamaño  $n$ ,  $v_t$  es la probabilidad de que la variable aleatoria  $\prod_{i=1}^p F_{n-1-i, k(n-1)-k+1-i}$  sea menor o igual que el observado

$$\left( \prod_{i=1}^p \frac{k(n-1) - k + 1 - i}{n-1-i} \right) \times \frac{|(n-1)S_t|}{|k(n-1)\bar{S}|} \tag{13}$$

Cuando el proceso está bajo control, los  $v_t$  en (12) son una secuencia de variables aleatorias  $iid \sim U(0, 1)$ .

Seguendo esta idea, Yeh et al. (2003) desarrollaron una carta de control EWMA multivariada basada en la transformaci3n integral de probabilidad. Específicamente, basados en el estadístico

$$v_t = P \left( \prod_{i=1}^p F_{n-i, N-k+1-i} \leq \left( \prod_{i=1}^p \frac{N-k+1-i}{n-i} \right) \times \frac{|nS_t|}{|NS|} \right) \quad (14)$$

definieron, para  $t \geq 1$ ,

$$S_v(t) = w \times (v_t - 0.5) + (1 - w) \times S_v(t - 1)$$

donde  $0 < w < 1$  y  $S_v(0) = 0$ . Cuando el proceso est1 bajo control, el estadístico  $v_t$  de (14), tiene distribuci3n  $U(0, 1)$ , y en consecuencia,  $(v_t - 0.5) \sim U(-0.5, 0.5)$ , por lo que  $S_v(t)$  es justamente una estadística EWMA de una serie de variables independientes e idénticamente distribuidas  $U(-0.5, 0.5)$ .

Para cualquier  $t \geq 1$  y un  $w$  dado, se tiene que  $E(S_v(t)) = 0$  y  $\text{Var}(S_v(t)) = [w/12(2 - w)](1 - (1 - w)^{2t})$ . Por tanto, la lnea central es cero y los límites de control superior e inferior pueden ser determinados por

$$\begin{aligned} LCS &= L \times \sqrt{\frac{1}{12} \left( \frac{w}{2-w} \right) (1 - (1-w)^{2t})} \\ LCI &= -L \times \sqrt{\frac{1}{12} \left( \frac{w}{2-w} \right) (1 - (1-w)^{2t})} \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $L$  se escoge de acuerdo con la  $ARL_0$  de la carta, siendo  $ARL_0$  la longitud de corrida promedio bajo control de la carta, esto es, el número promedio de puntos gr1ficados en la carta, antes de que esta emita una se1al fuera de control. Esta carta fue denominada por los autores carta- $V$  (o carta EWMA- $V$ ).

### 3. Medidas globales de variabilidad

Cuando se tiene un conjunto de variables aleatorias, se puede considerar la variabilidad de cada una de ellas, así como las covarianzas que pueden hallarse entre los distintos pares de variables, de modo que se tiene una gran cantidad de informaci3n que en muchas ocasiones es deseable, por no decir necesaria, resumir en un solo número. Aunque resumir una gran cantidad de informaci3n en un solo número puede parecer algo muy bueno, al hacerlo se debe pagar el precio de perder mucha informaci3n y, lo que es peor aún, en muchos casos, se obtienen medidas resumen que no corresponden con lo que sucede en el conjunto de variables. Son varias las medidas resumen o medidas globales de variabilidad que existen. Entre ellas podemos citar las siguientes:

#### 3.1. La varianza total y la varianza media

Una forma de resumir la variabilidad de un conjunto de variables es mediante la traza de su matriz de varianzas y covarianzas. La *varianza total* de los datos se

define por

$$T = \text{tr}(S) = \sum_{i=1}^p s_i^2 \quad (16)$$

y la *varianza media* por

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^2 \quad (17)$$

donde  $s_i^2$  en (16) y (17) es la varianza de la  $i$ -ésima variable.

El inconveniente de estas medidas es no tener en cuenta la estructura de dependencia entre las variables.

### 3.2. La varianza generalizada

Una mejor medida de variabilidad global es la *varianza generalizada*, concepto debido a Wilks (1932). Se define como el determinante de la matriz de varianzas y covarianzas, es decir,

$$\text{VG} = |S|$$

Su raíz cuadrada se denomina *desviación típica generalizada*, y tiene las propiedades siguientes:

- i) Está bien definida, ya que el determinante de la matriz de varianzas y covarianzas es siempre no negativo.
- ii) Es una medida del área (para  $p = 2$ ), volumen (para  $p = 3$ ) o hipervolumen (para  $p > 3$ ) ocupado por el conjunto de datos.

Un inconveniente de la varianza generalizada es que no sirve para comparar conjuntos de datos con distinto número de variables, ya que tiene la dimensión del producto de las variables. Si añadimos a un conjunto de  $p$  variables con varianza generalizada  $|S_p|$  una variable adicional, no correlacionada con el resto y varianza  $s_{p+1}^2$ , entonces

$$|S_{p+1}| = |S_p|s_{p+1}^2$$

y eligiendo las unidades de medida de la variable  $p + 1$ , podemos hacer que la varianza generalizada aumente o disminuya a voluntad.

### 3.3. La varianza efectiva

Para evitar estos inconvenientes, Peña & Rodríguez (2003) han propuesto como medida global de variabilidad la *varianza efectiva*, dada por

$$\text{VE} = |\Sigma|^{1/p}$$

cuya ventaja es que cuando todas las variables son de igual dimensión, tiene las unidades de la varianza. Para matrices diagonales, esta medida es simplemente

la media geométrica de las varianzas. Observe que, como el determinante es el producto de los valores propios, la varianza efectiva es la media geométrica de los valores propios de la matriz  $\Sigma$  que, por ser definida positiva, serán siempre no negativos. La varianza efectiva tiene en cuenta la dependencia conjunta, ya que si una variable fuese combinación de las demás, al existir un valor propio nulo, será cero, mientras que la varianza media dada por (17) no lo será, desconociendo de esta manera dicha dependencia.

#### 4. Carta propuesta

Si se considera un proceso multivariado, las distintas características de calidad de este pueden representarse por un vector aleatorio  $X$ .

Si se desconoce la matriz de varianzas y covarianzas del proceso,  $\Sigma$ , entonces debe estimarse. Se procede a tomar un conjunto histórico de datos, estimar los parámetros y realizar un trabajo de depuración de la información, hasta que el proceso se considere estable. Un proceso es estable, o se encuentra bajo control, cuando la variabilidad exhibida por la carta se debe solo a causas aleatorias. Este proceso constituye la fase I de la construcción de la carta de control. En la fase II, el proceso se monitorea en línea (Vargas 2006). Estando en esta última fase, se considera la matriz  $\bar{S}$  como el verdadero parámetro de la distribución, es decir, se considera que el vector aleatorio  $X$  tiene matriz de varianzas y covarianzas  $\bar{S}$ . Con este supuesto,  $V_t = \frac{|S_t|^{1/p}}{|\bar{S}|^{1/p}}$  se distribuye como (Peña & Rodríguez 2003)

$$V_t \sim \Gamma\left(\frac{p(n-p)}{2}, \frac{p(n-1)}{2} \left(1 - \frac{(p-1)(p-2)}{2n}\right)^{1/p}\right) \quad (18)$$

De acuerdo con la distribución de  $V_t$ , la media y la varianza del estadístico EWMA

$$S_v(t) = \lambda V_t + (1 - \lambda)S_v(t-1) \quad (19)$$

están dadas por

$$E(S_v(t)) = \frac{(n-p)}{(n-1)} \left(\frac{2n}{2n - (p-1)(p-2)}\right)^{1/p} \quad (20)$$

y

$$\text{Var}(S_v(t)) = \frac{2(n-p)}{p(n-1)^2} \left(\frac{2n}{2n - (p-1)(p-2)}\right)^{2/p} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})\right) \quad (21)$$

A partir de (20) y (21), se obtienen los siguientes límites para la carta EWMA:

$$\begin{aligned}
 LCS &= \frac{(n-p)}{(n-1)} \left( \frac{(2n)}{2n-(p-1)(p-2)} \right)^{1/p} + L\sqrt{\text{Var}(S_v(t))} \\
 LC &= \frac{(n-p)}{(n-1)} \left( \frac{(2n)}{2n-(p-1)(p-2)} \right)^{1/p} \\
 LCI &= \frac{(n-p)}{(n-1)} \left( \frac{(2n)}{2n-(p-1)(p-2)} \right)^{1/p} - L\sqrt{\text{Var}(S_v(t))}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

donde  $L$  es una constante,  $\lambda$  es el parámetro de suavizamiento y  $\text{Var}(S_v(t))$  está dada por la ecuación (21).

### 5. Simulación y resultados

La carta propuesta se compara con dos cartas: Una carta tipo *Shewhart*, la carta  $|S|$ , y otra carta tipo EWMA, la carta EWMA- $V$  (o Carta  $V$ ). Para los efectos de comparación, se llevaron a cabo procedimientos de simulación utilizando el software libre R (R Development Core Team 2007).

El criterio de comparación utilizado fue la longitud de corrida promedio fuera de control, es decir, el número promedio de puntos graficados en la carta hasta que haya una señal fuera de control. Se considera mejor carta aquella que, asumiendo que el proceso está fuera de control, detecta más rápidamente dicho estado, lo que se traduce en una longitud de corrida promedio fuera de control ( $ARL_1$ ) más pequeña. Estando en fase II, y asumiendo como  $\Sigma_0 = I_2$  y  $\mu_0 = (0, 0)$  la matriz de varianzas y covarianzas, y el vector de medias poblacionales, respectivamente, se generan datos de una distribución normal multivariada, luego de haber introducido “cambios” en la matriz  $\Sigma_0$ , con lo que se trata de simular un proceso fuera de control. El objetivo es determinar cuál de las cartas detecta de manera más rápida este estado del proceso.

Para obtener la constante  $L$ , se dio a esta un valor inicial de arranque, y luego se fueron haciendo los ajustes necesarios hasta obtener una  $ARL_0$  de 200.

En las tablas 1, 2 y 3, se muestran las  $ARL_1$  de las tres cartas luego de haber considerado cambios en las varianzas, en las covarianzas o en ambas. Los valores para la covarianza en estos tres casos fueron 0, 0.1, y 0.5. Estos, junto a los valores de las varianzas, se muestran en la primera columna de cada tabla.

TABLA 1: Comparación de  $ARL_s$  para  $n = 8$ ,  $\lambda = 0.1$  y  $\sigma_{1,2} = 0$ .

$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{1,2})$	Carta propuesta	Carta $ S $	Carta- $V$	$ \Sigma / \Sigma_0 $
(1.21, 1, 0)	52.85	85.72	67.52	1.2100
(1.21, 1.21, 0)	20.14	41.26	26.22	1.4641
(1.5625, 1, 0)	16.15	32.54	20.83	1.5625
(2.25, 1, 0)	6.93	10.99	9.66	2.2500
(1.5625, 1.5625, 0)	5.96	8.75	8.64	2.4414
(2.25, 2.25, 0)	2.73	2.48	5.14	5.0625

TABLA 2: Comparaci3n de  $ARL_s$  para  $n = 8$ ,  $\lambda = 0.1$  y  $\sigma_{1,2} = 0.1$ .

$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{1,2})$	Carta propuesta	Carta $ S $	Carta-V	$ \Sigma / \Sigma_0 $
(1.21, 1, 0.1)	54.96	92.08	71.19	1.2000
(1.21, 1.21, 0.1)	20.71	42.10	26.54	1.4541
(1.5625, 1, 0.1)	16.46	33.25	21.25	1.5525
(2.25, 1, 0.1)	6.83	11.08	9.56	2.2400
(1.5625, 1.5625, 0.1)	6.10	9.11	8.74	2.4314
(2.25, 2.25, 0.1)	2.74	2.52	5.15	5.0525

TABLA 3: Comparaci3n de  $ARL_s$  para  $n = 8$ ,  $\lambda = 0.1$  y  $\sigma_{1,2} = 0.5$ .

$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{1,2})$	Carta propuesta	Carta $ S $	Carta-V	$ \Sigma / \Sigma_0 $
(1.21, 1, 0.5)	228.63	243.03	185.59	0.9600
(1.21, 1.21, 0.5)	51.23	85.28	66.88	1.2141
(1.5625, 1, 0.5)	32.64	61.65	41.92	1.3125
(2.25, 1, 0.5)	8.46	14.94	11.55	2.0000
(1.5625, 1.5625, 0.5)	7.18	11.68	10.05	2.1914
(2.25, 2.25, 0.5)	2.82	2.65	5.27	4.8125

Los resultados mostrados se obtuvieron considerando 0.1 como valor del parámetro de suavizamiento lambda en las cartas tipo EWMA. En el estudio se consideraron también valores de 0.2 y 0.3 para este parámetro, y se obtuvieron resultados similares. Como puede verse en la primera fila de la tabla 1, por ejemplo, la carta propuesta mostr3, en este caso, una  $ARL_1$  de 52.85, mientras que la carta  $|S|$  y la carta EWMA-V mostraron una  $ARL_1$  de 85.72 y 67.52, respectivamente. En la segunda fila de la tabla 1, se puede apreciar que la carta propuesta tiene una  $ARL_1$  menor que la de las otras dos cartas. En la primera fila de la tabla 2, puede apreciarse que la carta propuesta tiene una  $ARL_1$  igual a 54.96. Para las cartas  $|S|$  y EWMA-V, la  $ARL_1$  result3 ser 92.08 y 71.19, respectivamente. En la primera fila de la tabla 3, el cociente  $|\Sigma|/|\Sigma_0|$  resulta menor que uno; en este caso, la  $ARL_1$  de la carta propuesta supera la  $ARL_0$ , fijada previamente en 200. Un resultado análogo se obtuvo para la carta  $|S|$ , mientras que la carta EWMA-V presenta una  $ARL_1$  bastante cercana a 200. Este problema se debe a que la varianza generalizada, como medida global de variabilidad, en algunos casos no da cuenta de lo que sucede en la matriz de varianzas y covarianzas. Debido a la deficiencia de esta medida global de variabilidad, es posible tener matrices de varianzas y covarianzas totalmente distintas, con la misma varianza generalizada. Este es el caso de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

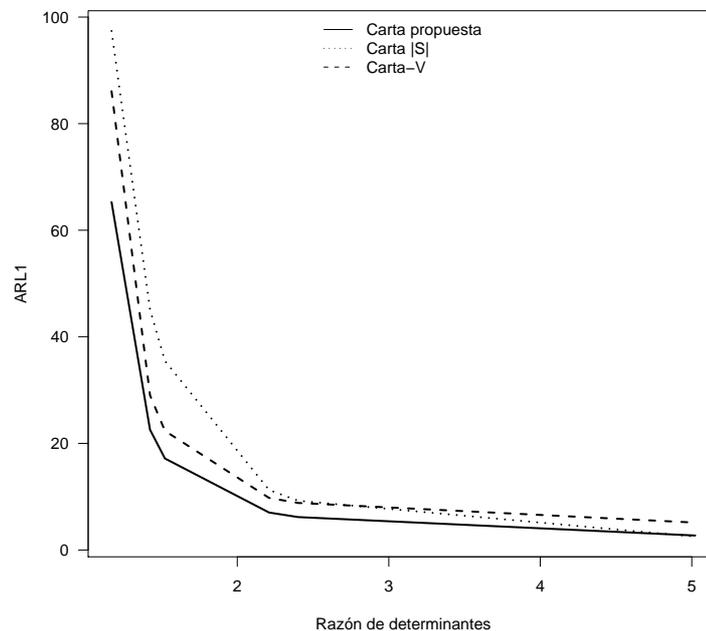
$$B = \begin{bmatrix} 2.32 & 0.40 \\ 0.40 & 0.50 \end{bmatrix}$$

que, como se puede ver f́cilmente, tienen varianza generalizada igual a 1, y sin embargo, representan estructuras de covarianza totalmente distintas.

Las figuras 1 y 2 muestran el comportamiento de las cartas en cuanto al valor de su  $ARL_1$ , para los mismos cambios considerados en las tablas 1, 2 y 3, pero

teniendo en cuenta valores de  $-0.2$  y  $0.7$  para la covarianza. Como puede apreciarse en la figura 1, la  $ARL_1$  de la carta propuesta es mucho menor que la de las otras cartas para casi todas las razones de determinante dadas en el eje  $x$ , mientras que la figura 2 muestra que para algunos valores del cociente de determinantes, la  $ARL_1$  de las tres cartas es mayor de 200. Esto sucede porque, para estos valores, el cociente de determinantes es menor que 1. Para casi todos los demás valores de la razón de determinantes, la carta propuesta presenta una  $ARL_1$  menor que la de las otras cartas. También se puede apreciar, en las figuras y en las tablas, que cuando  $|\Sigma|/|\Sigma_0|$  se aproxima a 5, es decir, para grandes cambios, la *Carta |S|* presenta resultados mejores. Esto último es consecuente con lo que, por teoría, se sabe de las cartas tipo *Shewhart*.

FIGURA 1:  $ARL_s$  para  $\lambda = 0.1$ ,  $n = 8$ ,  $\sigma_{1,2} = -0.2$ .

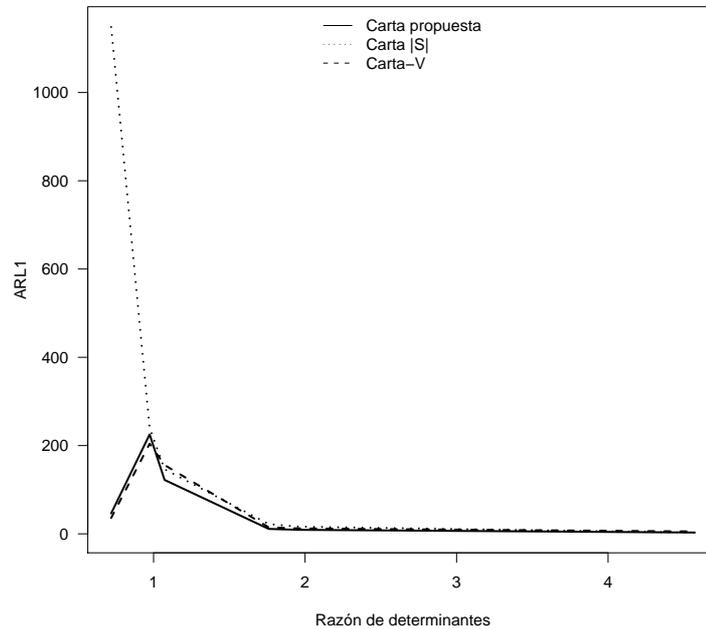


## 6. Conclusiones

Se propone una carta EWMA construida con base en la varianza efectiva, que es la raíz  $p$ -ésima del determinante de la matriz de varianzas y covarianzas. Se comparó esta carta con la carta *Carta |S|* y la carta EWMA-V.

La carta propuesta presentó, en todos los casos, una longitud de corrida promedio fuera de control menor que la de las otras cartas, excepto cuando el cociente  $|\Sigma|/|\Sigma_0|$  es menor que 1.

Cuando se hicieron los mayores cambios en la matriz de varianzas y covarianzas del proceso, la carta propuesta tuvo un desempeño similar al de las otras cartas.

FIGURA 2:  $ARL_s$  para  $\lambda = 0.1$ ,  $n = 8$ ,  $\sigma_{1,2} = 0.7$ .

La carta *Carta |S|* es levemente mejor que la carta propuesta solo cuando se tienen grandes cambios en la matriz de varianzas y covarianzas del proceso.

[Recibido: abril de 2008 — Aceptado: junio de 2008]

## Referencias

- Alt, F. B. & Smith, N. D. (1988), 'Multivariate Process Control', *Handbook of Statistics* **7**, 333–351.
- Chan, L. K. & Zhang, J. (2001), 'Cumulative Sum Control Charts for the Covariance Matrix', *Statistics Sinica* **11**, 767–790.
- García, J. C. (2007), 'The Effective Variance Control Chart for Monitoring the Dispersion Process with Missing Data', *European J. Industrial Engineering* **1**, 40–55.
- Hawkins, D. M. (1991), 'Multivariate Quality Control Based on Regression-Adjusted Variables', *Technometrics* **33**, 61–75.
- Jaupi, L. (2002), *Controle de la qualité*, Dunod, Paris, France.
- Montgomery, D. C. (2001), *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley, New York, United States.

- Peña, D. & Rodríguez, J. (2003), 'Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence', *Journal of Multivariate Analysis* **85**, 361–374.
- R Development Core Team (2007), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.  
\*<http://www.R-project.org>
- Vargas, J. A. (2006), *Control estadístico de calidad*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Wilks, S. S. (1932), 'Certain Generalizations in the Analysis of Variance', *Biometrika* **24**, 471–494.
- Yeh, A. B. & Lin, D. K. J. (2002), 'A New Variables Control Chart for Simultaneously Monitoring Multivariate Process Mean and Variability', *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* **9**, 41–59.
- Yeh, A., Lin, D., Zhou, H. & Venkataramani, C. (2003), 'A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart for Monitoring Process Variability', *Journal of Applied Statistics* **30**, 507–536.