Revista Colombiana de Estadística
Diciembre 2008, volumen 31, no. 2, pp. 169 a 181

Generación de tiempos de falla dependientes Weibull bivariados usando cópulas

Generation of Weibull Bivariate Dependent Failure Times Using Copulas

Mario César Jaramillo[a], Carlos Mario Lopera[b], Eva Cristina Manotas[c], Sergio Yáñez[d]

Departamento de Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia

Resumen

La distribución Weibull bivariada es muy importante en confiabilidad y en análisis de supervivencia. La dependencia para este tipo de problemas ha venido cobrando gran importancia en años recientes. En la literatura, se conocen algoritmos para generar una distribución Weibull univariada y distribuciones bivariadas con marginales independientes. En este artículo, se presenta un algoritmo para generar tiempos de falla Weibull bivariados dependientes, usando una representación cópula para la función de confiabilidad Weibull bivariada. Tal representación se obtiene utilizando modelos cópula arquimedianos. En particular, se utilizó la familia Gumbel. Se realizó una aplicación del algoritmo cópula, cuyos resultados fueron validados exitosamente.

***Palabras clave*:** distribución bivariada, datos dependientes, cópula.

Abstract

The bivariate Weibull distribution is very important in both reliability and survival analysis. The dependence for these kind of problems has been gaining great importance in recent years. In the literature, there are algorithms to generate univariate Weibull distributions and bivariate Weibull distributions with independent marginal distributions. In this paper, we present an algorithm to generate dependent bivariate Weibull failure times using a copula representation for the bivariate Weibull reliability function. Such representation is obtained using archimedean copula models. In particular, we used the Gumbel's family. An application of the copula algorithm was done and the results were successfully validated.

***Key words*:** Bivariate distribution, Dependent data, Copula.

[a]Profesor Asociado. E-mail: mcjarami@unal.edu.co
[b]Profesor Asistente. E-mail: cmlopera@unal.edu.co
[c]Profesor Asistente. E-mail: ecmanota@unal.edu.co
[d]Profesor Asociado. E-mail: syanez@unal.edu.co

1. Introducción

La distribución Weibull es una familia muy utilizada para modelar tiempos de falla, en vista de su interpretación física y su flexibilidad para el ajuste empírico. La distribución Weibull bivariada se puede visualizar en varios contextos, tales como, los tiempos hasta la primera y segunda falla de un equipo reparable, los tiempos de "*breakdown*" de generadores duales en una planta de energía, o los tiempos de supervivencia en un sistema de dos órganos, tal como los pulmones o riñones, en el cuerpo humano (Lu & Bhattacharyya 1990).

La dependencia para este tipo de problemas ha venido cobrando gran importancia en años recientes. Crowder (2001), describe la importancia de la temática, no solamente para los temas demográficos y actuariales sino también desde el punto de vista de la inferencia estadística y las aplicaciones a la teoría de la confiabilidad y el análisis de supervivencia. Denuit et al. (2005), es otro ejemplo de la importancia actual del tema. También Bedford (2005) y Nelsen (2006) muestran la relación entre dependencia en modelos multivariados, riesgos en competencia y el trabajo en cópulas. Las cópulas se han convertido en una potente herramienta para el modelamiento multivariado en muchos campos donde la dependencia multivariada es de gran interés. En actuaría, las cópulas son usadas en el modelamiento de mortalidad y las pérdidas dependientes (Frees et al. 1996, Frees & Valdez 1998, Frees & Wang 2005). En finanzas, las cópulas son usadas en asignación de activos, modelamiento y administración de riesgos, calificación de créditos y tasación derivada (Bouyè et al. 2000, Embrechts et al. 2003, Cherubini et al. 2004). En estudios biomédicos, las cópulas son usadas en el modelamiento de tiempos de eventos correlacionados y riesgos en competencia (Wang & Wells 2000, Escarela & Carrière 2003). En ingeniería, las cópulas son usadas en el control de procesos multivariado y en el modelamiento hidrológico (Yan 2006, Genest & Favre 2007).

En la actualidad, el modelo Weibull univariado está muy documentado, sin embargo, la investigación de la distribución Weibull bivariada y multivariada con dependencia, es limitada. Lu & Bhattacharyya (1990) presentan aproximaciones con sentido físico para la construcción de extensiones bivariadas de la distribución Weibull.

El objetivo de este artículo es difundir un algoritmo para la generación de tiempos Weibull bivariados usando cópulas, de manera que éste sirva para trabajo de simulación en problemas que involucren la función de confiabilidad Weibull bivariada, la cual es ampliamente utilizada en confiabilidad. La importancia de la divulgación del algoritmo radica en que tradicionalmente, la modelación estadística en problemas de riesgos en competencia ha utilizado el supuesto de independencia, pero en muchas situaciones prácticas la dependencia es una condición usual, lo que ha generado el creciente interés por su estudio, y como consecuencia de ello se tiene la necesidad actual de generar datos Weibull bivariados con dependencia.

En la sección 2 se presenta una descripción básica de los modelos cópula, la cual pretende dar un marco para el trabajo en las secciones posteriores. En la sección 3 se presenta la forma en que la función de confiabilidad Weibull bivariada puede ser representada a través de un modelo cópula, de manera que a partir de esta representación se pueden generar tiempos de falla Weibull bivariados dependientes, los cuales serán útiles para problemas de simulación en temas de confiabilidad. Finalmente, en la sección 4, se presenta una aplicación del algoritmo para generar tiempos de falla Weibull bivariados dependientes y se muestra una validación del mismo.

2. Descripción del modelo cópula

Suponga que C_α es una función de distribución con densidad c_α sobre $[0,1] \times [0,1]$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Denote (T_1, T_2) los tiempos de falla, y denote (S_1, S_2), (f_1, f_2) las respectivas funciones de confiabilidad y de densidad marginales. Si (T_1, T_2) proviene de una cópula C_α para algún α, entonces las funciones de confiabilidad y densidad conjuntas de T_1 y T_2 (Nelsen 2006), están dadas por

$$
\begin{aligned}
S(t_1, t_2) &= C_\alpha\big(S_1(t_1), S_2(t_2)\big), \qquad t_1, t_2 \geq 0 \\
f(t_1, t_2) &= c_\alpha\big(S_1(t_1), S_2(t_2)\big) f_1(t_1) f_2(t_2), \qquad t_1, t_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

donde α representa el parámetro de dependencia entre los tiempos de falla T_1 y T_2.

Dos de las familias cópula más usadas son las cópulas elípticas y las arquimedianas. A continuación se introduce la familia de cópulas arquimedianas, ya que para la función de confiabilidad Weibull bivariada se tiene una representación cópula a través de esta familia.

2.1. Cópulas Arquimedianas

Una distribución bivariada perteneciente a la familia de modelos cópula arquimedianos tiene la representación

$$
C_\alpha(u, v) = \phi_\alpha^{-1}\big[\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v)\big], \qquad 0 \leq u, v \leq 1 \tag{1}
$$

donde ϕ_α es convexa y decreciente tal que $\phi_\alpha \geq 0$, $\phi_\alpha(1) = 0$. A la función ϕ_α se le denomina *generador* de la cópula C_α y la inversa del generador ϕ_α^{-1} es la *transformada de Laplace* de una variable latente denotada γ, la cual induce la dependencia α. Así, la selección de un generador resulta en varias familias cópulas. En la tabla 1, se muestran las formas funcionales para las funciones de confiabilidad bivariadas en tres familias cópula arquimedianas. Adicionalmente, en la tabla 2, se muestran los generadores y las transformadas de Laplace para las familias consideradas. A continuación se dan detalles de las tres familias cópulas arquimedianas.

Familia Cópula	Espacio Parametral	Cópula Bivariada $C_\alpha(u,v)$
Clayton	$\alpha > 1$	$\{u^{1-\alpha} + v^{1-\alpha} - 1\}^{1/(1-\alpha)}$
Gumbel	$0 < \alpha < 1$	$\exp\left\{-\left[(-\ln u)^{1/\alpha} + (-\ln v)^{1/\alpha}\right]^{\alpha}\right\}$
Frank	$\alpha > 0$	$\log_\alpha\left\{1 + (\alpha^u - 1)(\alpha^v - 1)/(\alpha - 1)\right\}$

Tabla 1: Cópulas arquimedianas.

Familia Cópula	Espacio Parametral	Generador $\phi_\alpha(\mathrm{t})$	Transformada de Laplace $\left(\tau(s) = \phi_\alpha^{-1}(s)\right)$
Clayton	$\alpha > 1$	$t^{1-\alpha} - 1$	$(1+s)^{1/(1-\alpha)}$
Gumbel	$0 < \alpha < 1$	$(-\ln t)^{1/\alpha}$	$\exp(-s^\alpha)$
Frank	$\alpha > 0$	$\ln \frac{\alpha^t - 1}{\alpha - 1}$	$\log_\alpha\{1 - (1-\alpha)e^s\}$

Tabla 2: Generadores y transformadas de Laplace de las cópulas arquimedianas.

2.1.1. Familia Clayton

La función de confiabilidad bivariada perteneciente a la familia Clayton (1978) tiene la forma

$$C_\alpha(u,v) = \left\{u^{1-\alpha} + v^{1-\alpha} - 1\right\}^{1/(1-\alpha)}, \qquad \alpha > 1 \tag{2}$$

aquí $\phi_\alpha^{-1}(s) = (1+s)^{1/(1-\alpha)}$ es la transformada de Laplace de una distribución gama. T_1 y T_2 están positivamente asociados cuando $\alpha > 1$ y son independientes cuando $\alpha \to 1$. Denote λ la función Hazard. Clayton (1978) mostró que $\lambda(t_2 \mid T_1 = t_1)/\lambda(t_2 \mid T_1 \geq t_1) = \alpha$, si y sólo si, la función de confiabilidad bivariada pertenece a la familia Clayton.

2.1.2. Familia Gumbel

La función de confiabilidad bivariada perteneciente a la familia Gumbel (1960) tiene la forma

$$C_\alpha(u,v) = \exp\{-[(-\ln u)^{1/\alpha} + (-\ln v)^{1/\alpha}]^\alpha\} \tag{3}$$

donde $0 < \alpha < 1$. Aquí $\phi_\alpha^{-1}(s) = \exp(-s^\alpha)$ es la transformada de Laplace de una distribución estable positiva. Valores pequeños de α producen alta correlación y T_1, T_2 son independientes cuando $\alpha \to 1$.

2.1.3. Familia Frank

La función de confiabilidad bivariada introducida por Frank (1979) tiene la representación

$$C_\alpha(u,v) = \log_\alpha\{1 + (\alpha^u - 1)(\alpha^v - 1)/(\alpha - 1)\} \tag{4}$$

donde $\alpha > 0$, y $\log_\alpha$ denota el logaritmo en base α. T_1, T_2 están asociados positivamente cuando $\alpha < 1$, negativamente cuando $\alpha > 1$, y son independientes cuando

$\alpha \to 1$. Aquí $\phi_\alpha^{-1}(s) = \log_\alpha\{1 - (1-\alpha)e^s\}$ y se convierte en una transformada de Laplace cuando $0 < \alpha < 1$.

3. Representación cópula de la función de confiabilidad Weibull bivariada

Sean T_1 y T_2, tiempos de falla Weibull. Una función de confiabilidad conjunta para la Weibull bivariada (Lu & Bhattacharyya 1990), es:

$$S(t_1, t_2) = \exp\left\{-\left[\left(\frac{t_1}{\theta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\alpha}} + \left(\frac{t_2}{\theta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\alpha}}\right]^\alpha\right\}, \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{5}$$

donde, $\beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2$ (todos mayores que cero), son los parámetros de forma y escala asociados a T_1 y T_2 respectivamente. $0 < \alpha \leq 1$, es el parámetro de dependencia entre T_1 y T_2, cuyas funciones de confiabilidad marginales son:

$$S_k(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta_k}\right)^{\beta_k}\right\}, \qquad k = 1, 2, \qquad t > 0 \tag{6}$$

Cuando el parámetro de dependencia α entre tiempos de falla Weibull es 1, entonces hay independencia entre T_1 y T_2. A medida que α disminuye, la dependencia entre T_1 y T_2 aumenta.

Observe que comparando (5) con (3), la representación de la función de confiabilidad Weibull bivariada se obtiene mediante la familia cópula Gumbel, para $0 < \alpha < 1$, es decir, cuando T_1 y T_2 no son independientes. Observe que, de la sección 2.1.2, para la representación de la función de confiabilidad Weibull bivariada se requiere generar una variable aleatoria, digamos γ, con distribución estable positiva, cuya trasformada de Laplace sea $\phi_\alpha^{-1}(s) = \exp(-s^\alpha)$. A continuación se dan detalles de la generación de distribuciones estables positivas.

3.1. Distribución estable positiva

Una variable aleatoria Γ se dice que tiene distribución estable positiva si existen parámetros $0 < \alpha < 1, \sigma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1, \mu \in \mathbb{R}$, tal que su *función característica* tiene la siguiente forma:

$$\mathsf{E}\left[e^{it\Gamma}\right] = \exp\left[-\sigma^\alpha t^\alpha\left(1 - i\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\right] \tag{7}$$

donde α es el índice de estabilidad, σ es el parámetro de escala, β es el parámetro de asimetría y μ es el parámetro de localización. La distribución de una variable aleatoria estable positiva con los parámetros antes mencionados se denota como $\mathbb{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Se puede demostrar que la *transformada de Laplace* de una variable aleatoria $\Gamma \sim \mathbb{S}_\alpha(\sigma, 1, 0)$ para $0 < \alpha < 1$ y $\sigma > 0$, es igual a

$$\mathsf{E}\big[e^{-t\Gamma}\big] = \exp\left[-\frac{\sigma^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} t^\alpha\right] \tag{8}$$

Note que la expresión en (8) es equivalente a la transformada de Laplace requerida en la representación cópula de la función de confiabilidad Weibull bivariada, explicada en la sección anterior, haciendo $\frac{\sigma^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} = 1$.

Para mayores detalles de distribuciones estables véase Samorodnitsky & Taqqu (1994).

3.2. Algoritmo cópula

Basados en lo anterior un algoritmo para generar tiempos de falla Weibull Bivariados con dependencia α, haciendo uso de la representación cópula Gumbel para la función de confiabilidad Weibull bivariada explicada en la sección 3, es el siguiente:

a) Genere una variable aleatoria γ con distribución estable positiva $\mathbb{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ y que tenga transformada de Laplace $\tau(s) = \exp(-s^\alpha)$. Para que esto se cumpla de acuerdo a (8), tome $\sigma = \big[\cos\frac{\pi\alpha}{2}\big]^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = 1$ y $\mu = 0$.

   Para generar γ se utiliza el método propuesto por Chambers et al. (1976).

b) Independiente del paso anterior, genere variables aleatorias U_1 y U_2 con distribución uniforme en el intervalo (0,1).

c) Para $k = 1, 2$, de la expresión (6) calcule $T_k = S_k^{-1}(U_{*k})$, donde $U_{*k} = \tau[-\gamma^{-1}\ln(U_k)]$, con τ la transformada de Laplace asociada a la cópula Gumbel dada en tabla 2.

La implementación del algoritmo cópula se realizó utilizando el software estadístico R versión 2.5.1; utilizando las librerías `MASS`, `boot` y `CircStats`. Más detalles acerca de R y los paquetes anteriores se muestran en R Development Core Team (2007), Canty & Ripley (2007), Lund & Agostinelli (2007) y Venables & Ripley (2002). El código utilizado se suministra bajo pedido a los autores.

4. Aplicación del algoritmo cópula

Se ilustrará la utilización del algoritmo cópula descrito anteriormente, mediante la generación de muestras aleatorias de tamaño 50, 100 y 500 provenientes de una distribución Weibull bivariada, con parámetros de escala $\theta_1 = \theta_2 = 1.0$, parámetros de forma $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 1.0$ y parámetro de dependencia $\alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 0.9.

A continuación se muestran los diagramas de dispersión para las muestras anteriores. Adicionalmente, se superponen los contornos de la función de densidad conjunta Weibull bivariada teórica.

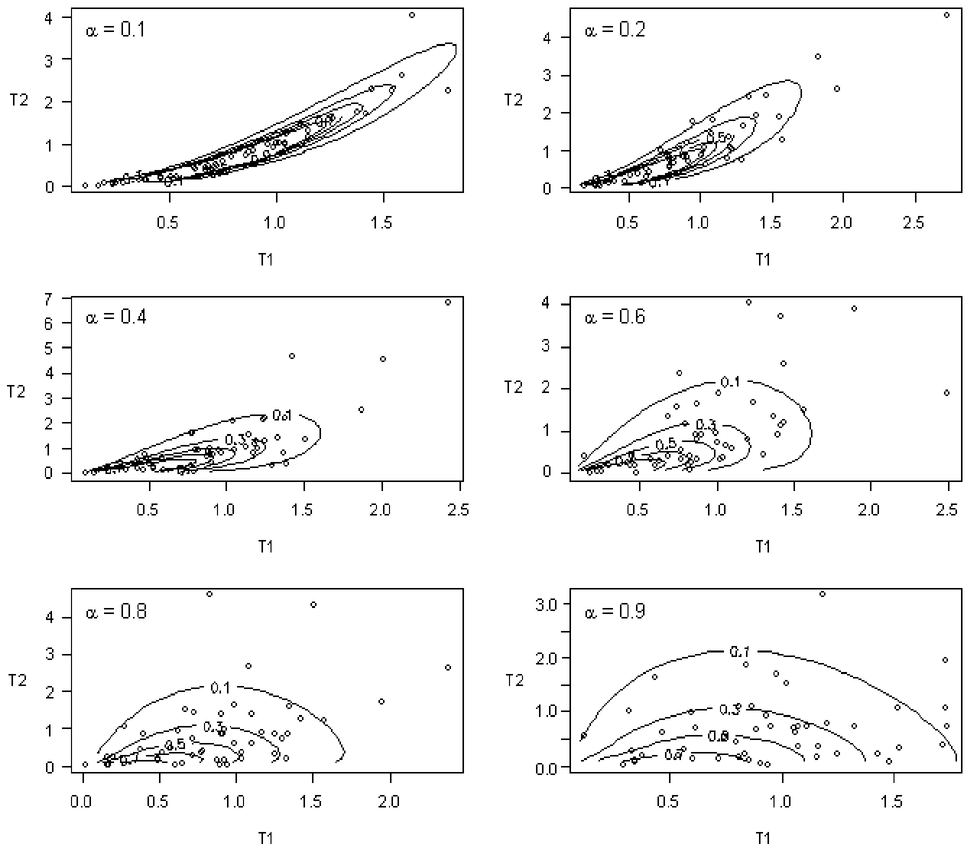

FIGURA 1: Diagramas de dispersión de $n = 50$ datos simulados de una densidad conjunta Weibull bivariada $\theta_1 = \theta_2 = 1.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 1.0$ y $0.4, 0.6, 0.8$ y 0.9, con sus contornos teóricos.

De las figuras 1, 2 y 3 se observa que a medida que el parámetro de dependencia α se incrementa, la dependencia entre los dos tiempos de falla T_1 y T_2 disminuye como se esperaba. Note que la dependencia en este tipo de problemas no es lineal, de hecho existe una relación entre el coeficiente de correlación de Pearson y el parámetro de dependencia α. Para más detalles, puede consultarse Lu & Bhattacharyya (1990).

Para validar el algoritmo cópula se realizan pruebas de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste en las marginales asociadas a cada tiempo de falla. Los resultados de la validación se muestran en la tabla 3. Para más detalles de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, véase Conover (1999).

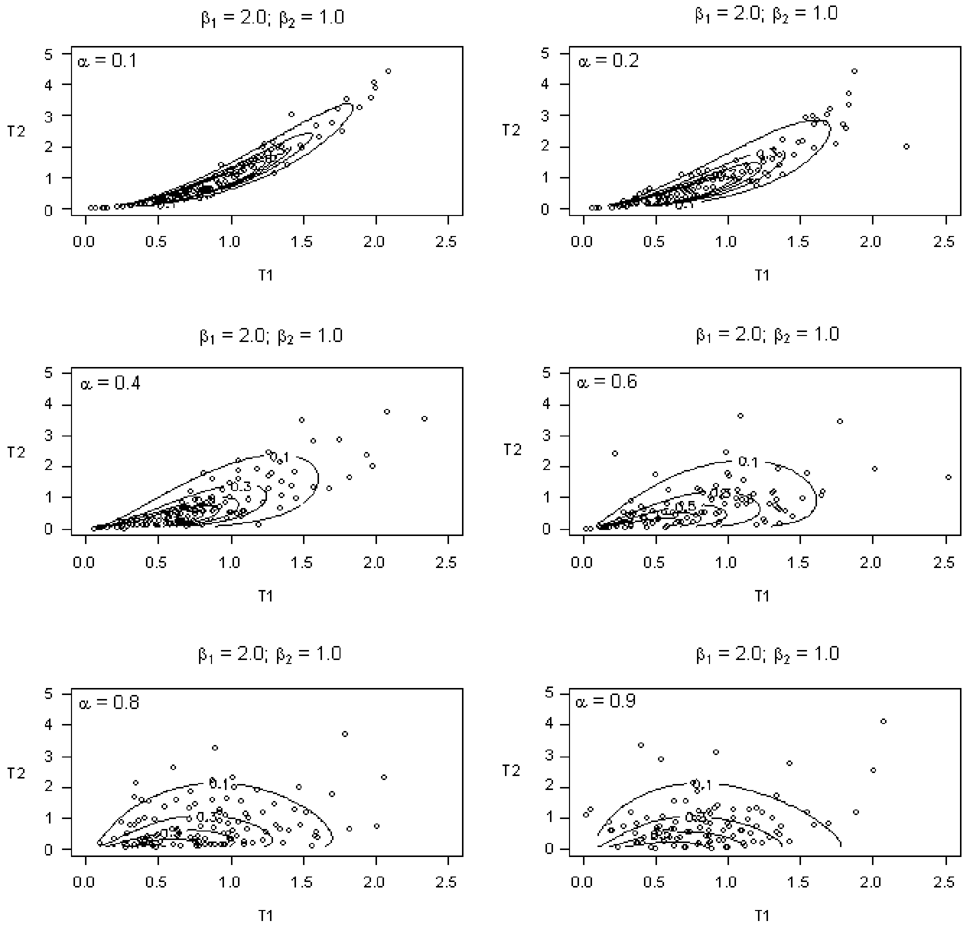

Figura 2: Diagramas de dispersión de $n = 100$ datos simulados de una densidad conjunta Weibull bivariada $\theta_1 = \theta_2 = 1.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 1.0$ y $\alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 0.9, con sus contornos teóricos.

De la tabla 3, se observa que las marginales cumplen con la distribución original que se simuló, de manera que el funcionamiento del algoritmo propuesto se verifica estadísticamente de una manera exitosa.

Adicionalmente, se puede establecer un procedimiento sencillo de verificación de la bondad del ajuste de los datos generados a la distribución teórica asumida, que consiste en lo siguiente:

- Se definen los contornos teóricos de la función de densidad conjunta de T_1 y T_2 en los niveles de $0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ y 0.9.
- Para una muestra de tamaño n de parejas de datos se establece el porcentaje de puntos por fuera de cada contorno teórico.

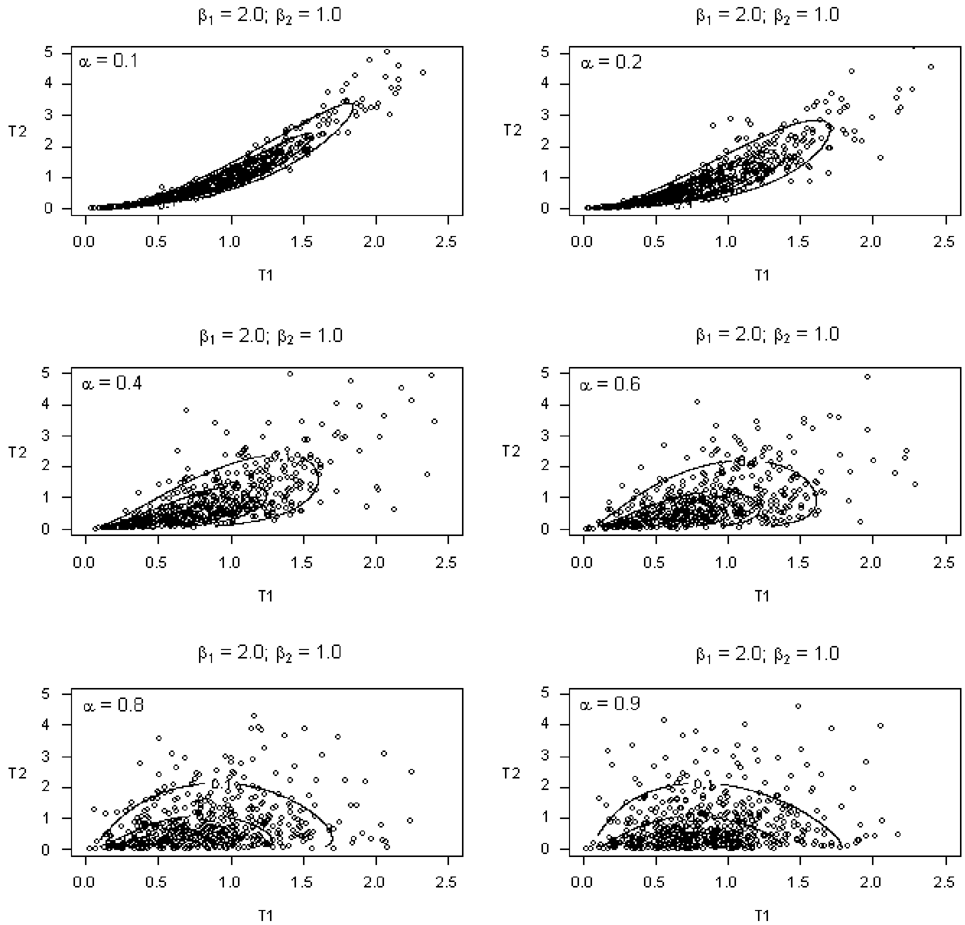

Figura 3: Diagramas de dispersión de $n = 500$ datos simulados de una densidad conjunta Weibull bivariada $\theta_1 = \theta_2 = 1.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 1.0$ y $\alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 0.9, con sus contornos teóricos.

- Finalmente, se comparan éste porcentaje con el nivel del contorno teórico.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para $n = 500$ datos simulados de una densidad conjunta Weibull bivariada $\theta_1 = \theta_2 = 1.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 1.0$ y $\alpha = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 0.9.

En la tabla 4 se observo que los porcentajes de puntos por fuera de los niveles de contornos teóricos se aproximan a los valores teóricos para todos los valores del parámetro de dependencia α, lo cual es un indicio de un ajuste adecuado de los puntos a la distribución teórica asumida.

Caso		$H_0 : T_1 \sim$ Weibull$(\theta_1 = 1.0, \beta_1 = 2.0)$		$H_0 : T_2 \sim$ Weibull$(\theta_2 = 1.0, \beta_2 = 1.0)$	
α	n	Estadístico (D)	Valor p (p)	Estadístico (D)	Valor p (p)
0.1	50	0.0797	0.8833	0.0875	0.8068
0.1	100	0.1011	0.2586	0.1047	0.2228
0.1	500	0.0333	0.6381	0.0266	0.8718
0.2	50	0.1128	0.5118	0.1047	0.6064
0.2	100	0.0696	0.7185	0.1085	0.1894
0.2	500	0.0233	0.9497	0.0247	0.9216
0.4	50	0.0922	0.7542	0.1272	0.3627
0.4	100	0.0548	0.9252	0.0515	0.9535
0.4	500	0.0494	0.1748	0.0417	0.3499
0.6	50	0.1427	0.2367	0.1572	0.1515
0.6	100	0.1047	0.2230	0.0980	0.2922
0.6	500	0.0301	0.7551	0.0574	0.07417
0.8	50	0.1407	0.2508	0.1518	0.1801
0.8	100	0.0937	0.3432	0.1201	0.1116
0.8	500	0.0466	0.2279	0.0379	0.4680
0.9	50	0.0816	0.8665	0.0937	0.7370
0.9	100	0.0981	0.2904	0.0853	0.4603
0.9	500	0.0261	0.8846	0.0345	0.5916

Tabla 3: Pruebas marginales de bondad de ajuste.

	Nivel de Contorno Teórico				
α	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	0.067	0.246	0.436	0.648	0.892
0.2	0.070	0.284	0.457	0.670	0.902
0.4	0.096	0.301	0.479	0.694	0.916
0.6	0.108	0.310	0.506	0.716	0.928
0.8	0.120	0.342	0.524	0.728	0.940
0.9	0.154	0.355	0.548	0.744	0.958

Tabla 4: Proporciones empíricas de datos por fuera de los contornos de una densidad Weibull bivariada con parámetros $\theta_1 = \theta_2 = 1.0$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 1.0$.

5. Discusión y recomendaciones

La literatura acerca de los modelos cópula y su pertinencia para trabajar problemas multivariados se ha desarrollado recientemente. Muchos de los artículos aquí citados fueron publicados a partir del año 2000. En ellos se destaca que los modelos cópula ofrecen a los analistas una estructura intuitivamente atractiva para la investigación de distribuciones multivariadas y la especificación de su estructura de dependencia. De esta forma, los modelos cópula ofrecen una estructura flexible que es aplicable en muchas situaciones.

Como se mencionó en la introducción la distribución Weibull bivariada tiene gran importancia en temas financieros, actuariales, de ingeniería y bioestadística, entre otros. Durante el desarrollo del algoritmo se encontró la necesidad de manejar conceptos no estándar como las distribuciones estables positivas, las cuales no son ampliamente conocidas en el medio y su desarrollo es relativamente reciente.

Este artículo pretende divulgar los modelos cópula arquimedianos para que los lectores identifiquen la pertinencia de tales modelos en problemas multivariados no normales, y que esto contribuya para que en el corto o mediano plazo se involucren estas temáticas en los cursos de pregrado y posgrado dedicados al análisis multivariado.

La temática de este artículo está inmersa en los modelos multivariados y conceptos de dependencia (Joe 1997), y su importancia radica en que la utilización de modelos cópula permite realizar una amplia variedad de inferencias, así como también, evaluar supuestos, chequear diagnósticos, comparar modelos y realizar análisis de sensibilidad. De esta forma los modelos cópula se pueden usar para construir y analizar distribuciones y modelos multivariados.

[Recibido: diciembre de 2007 — Aceptado: septiembre de 2008]

Referencias

Bedford, T. (2005), Competing Risk Modeling in Reliability, *in* K.-M. S. Wilson, A. & Y. Armijo, eds, 'Modern Statistical and Mathematical Methods in Reliability', World Scientific Publishing Co, Singapore.

Bouyè, E., Durrleman, V., Bikeghbali, A., Riboulet, G. & Rconcalli, T. (2000), 'Copulas for Finance - A Reading Guide and Some Applications', *Manuscript, Financial Econometrics Research Center* .

Canty, A. & Ripley, B. D. (2007), *Boot: Bootstrap R (S-Plus) Functions (Canty).* S original by Canty, A. R port by Ripley, B. D. Package version 1.2-28.

Chambers, J. M., Mallows, C. L. & Stuck, B. W. (1976), 'A Method for Simulating Stable Random Variables', *Journal of the American Statistical Association* **71**(354), 340–344.

Cherubini, U., Luciano, E. & Vecchiato, W. (2004), *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, New York.

Clayton, D. G. (1978), 'A Model for Association in Bivariate Life Tables and its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence', *Biometrika* **65**(1), 141–152.

Conover, W. J. (1999), *Practical Nonparametric Statistics*, third edn, John Wiley & Sons, New York, United States.

Crowder, M. (2001), *Classical Competing Risks*, Chapman & Hall, London, United Kingdom.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. & Kaas, R. (2005), *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, John Wiley & Sons, Great Britain.

Embrechts, P., Lindskog, F. & McNeil, A. (2003), Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, *in* S. Rachev, ed., 'Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance', Elsevier, North-Holland, Netherlands.

Escarela, G. & Carrière, J. F. (2003), 'Fitting Competing Risks with an Assumed Copula', *Statistical Methods in Medical Research* **12**(4), 333–349.

Frank, M. J. (1979), 'On the Simultaneous Associativity of $f(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$', *Aequationes Mathematicae* **19**(1), 194–226.

Frees, E. W., Carrière, J. F. & Valdez, E. A. (1996), 'Annuity Valuation with Dependent Mortality', *Journal of Risk and Insurance* **63**(2), 229–261.

Frees, E. W. & Valdez, E. A. (1998), 'Understanding Relationships Using Copulas', *North American Actuarial Journal* **2**(1), 1–25.

Frees, E. W. & Wang, P. (2005), 'Credibility Using Copulas', *North American Actuarial Journal* **9**(2), 31–48.

Genest, C. & Favre, A. C. (2007), 'Everything You Always Wanted to Know About Copula Modeling but were Afraid to Ask', *Journal of Hydrologic Engineering* **12**(4), 347–368.

Gumbel, E. J. (1960), 'Bivariate Exponential Distributions', *Journal of the American Statistical Association* **55**(292), 698–707.

Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, New York, United States.

Lu, J. & Bhattacharyya, G. K. (1990), 'Some New Constructions of Bivariate Weibull Models', *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **42**(3), 543–559.

Lund, U. & Agostinelli, C. (2007), *CircStats: Circular Statistics, from "Topics in Circular Statistics" (2001).* S-plus original by Lund, U. R port by Agostinelli, C. R package version 0.2-3.

Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, second edn, Springer, New York, United States.

R Development Core Team (2007), *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.
*http://www.R-project.org

Samorodnitsky, G. & Taqqu, M. S. (1994), *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, New York, United States.

Venables, W. N. & Ripley, B. D. (2002), *Modern Applied Statistics with S*, fourth edn, Springer, New York, United States. ISBN 0-387-95457-0.

Wang, W. & Wells, M. T. (2000), 'Model Selection and Semiparametric Inference for Bivariate Failure-Time Data', *Journal of the American Statistical Association* **95**(449), 62–72.

Yan, J. (2006), Multivariate Modeling with Copulas and Engineering Applications, *in* H. Pham, ed., 'Handbook in Engineering Statistics', Springer, New York, United States.