

Una extensión de la distribución Weibull de dos parámetros

An Extension of the Two-Parameter Weibull Distribution

JUAN F. OLIVARES-PACHECO^{1,a}, HÉCTOR C. CORNIDE-REYES^{2,b},
MANUEL MONASTERIO^{2,c}

¹DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD DE ATACAMA,
COPIAPÓ, CHILE

²DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN, FACULTAD
DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD DE ATACAMA, COPIAPÓ, CHILE

Resumen

En este artículo se presenta una extensión de la distribución Weibull de dos parámetros, con el objetivo de flexibilizar el modelo en términos de la kurtosis. Se estudian las propiedades básicas de la nueva densidad obtenida, así como su función de distribución, momentos, coeficientes de asimetría y kurtosis. Se realizan estudios de simulación para algunos casos particulares, ilustrando la utilidad de la extensión considerada.

Palabras clave: coeficiente de asimetría, distribución Weibull, kurtosis, Slash.

Abstract

In this paper, we present an extension of the Two-parameter Weibull distribution to make it even more flexible in terms of its kurtosis coefficient. Properties involving moments and asymmetry and kurtosis indexes are studied. Simulation studies for some cases, illustrating the usefulness of the extension considered, are carried out.

Key words: Asymmetry, Kurtosis, Slash distribution, Weibull distribution.

^aInstructor. E-mail: jolivares@mat.uda.cl

^bProfesor asistente. E-mail: hcornide@diicc.uda.cl

^cProfesor asistente. E-mail: mmonasterio@diicc.uda.cl

1. Introducción

La distribución Weibull ha sido ampliamente utilizada para modelar tiempos de vida de componentes (o sistemas), en organizaciones que desarrollan programas de mantenimiento preventivo en sus máquinas, ya que permite estudiar la tasa de falla de un componente crítico. Esta distribución fue introducida por Weibull (1951) y posteriormente se han desarrollado muchos trabajos que otorgan una mayor flexibilidad al modelo original modificando su estructura paramétrica. Por ejemplo, Tang, Xie & Goh (2003) y Chen (2000) trabajan sobre el parámetro de forma para obtener un mejor ajuste de funciones con tasa de falla con forma de bañera o creciente. Zhang & Xie (2007) generan un nuevo modelo al incorporar un parámetro adicional a la familia de distribuciones Weibull con dos parámetros.

La función de densidad de probabilidad (fdp) de una variable aleatoria Weibull de dos parámetros es de la forma

$$f_X(x | \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)^\beta}, \quad x > 0 \quad (1)$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de escala, y $\beta > 0$ es el parámetro de forma. Si X se distribuye en Weibull de parámetros (α, β) lo denotaremos por $X \sim W(\alpha, \beta)$. A partir de la distribución Weibull, se pueden derivar los siguientes casos particulares; si $\beta = 0, 5$, X se distribuye Hiperexponencial; si $\beta = 1$, X se distribuye exponencial de parámetro $\alpha > 0$ y $\beta = 2$, tenemos que X se distribuye en Rayleigh de parámetro $\alpha > 0$. Por otro lado, la función de distribución acumulada (fda) es

$$F_X(x | \alpha, \beta) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}, \quad x > 0 \quad (2)$$

y la función de confiabilidad viene dada por

$$R_X(x | \alpha, \beta) = 1 - F_X(x | \alpha, \beta) = e^{-(x/\alpha)^\beta}, \quad x > 0 \quad (3)$$

Desde (1) y (3), tenemos que la función de tasa de falla es

$$h_X(x | \alpha, \beta) = \frac{f_X(x | \alpha, \beta)}{R_X(x | \alpha, \beta)} = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \quad x > 0 \quad (4)$$

La función de tasa de falla dada en (4) es decreciente para $\beta < 1$, constante para $\beta = 1$ y creciente para $\beta > 1$.

Actualmente, la preocupación está centrada en desarrollar extensiones a la distribución Weibull para lograr un mejor ajuste a la situación de cada componente en estudio. Sobre este mismo punto, ya existen trabajos similares como, por ejemplo, el de Gómez, Quintana & Torres (2007), que utilizan la familia de distribuciones elípticas para generar una nueva familia de distribuciones denominadas Slash-elípticas, así como un trabajo reciente de Gómez, Olivares-Pacheco & Bolfarine (2009), quienes generan una extensión de la distribución Birnbaum-Saunders a partir del tratamiento de su kurtosis.

En este sentido, la distribución Slash canónica se define como la razón de dos variables aleatorias independientes, a saber; una normal estándar ($N(0, 1)$) y una uniforme en $(0, 1)$ ($U(0, 1)$), donde la fdp es dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\phi(0) - \phi(x)}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}\phi(0), & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (5)$$

donde $\phi(\cdot)$ es la densidad normal estándar. Esta distribución presenta colas más pesadas que la distribución normal, y como consecuencia, es una distribución con mayor kurtosis. Algunas propiedades de esta familia son discutidas en Rogers & Tukey (1972) y en Mosteller & Tukey (1977). Los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) para los parámetros de localización y escala son discutidos en Kafadar (1982). Wang & Genton (2006) proponen una versión skew multivariada para la distribución Slash estándar.

Una representación estocástica para la distribución Slash estándar es dada por

$$S = \frac{Z}{U^{1/q}} \quad (6)$$

donde $Z \sim N(0, 1)$, $U \sim U(0, 1)$, Z es independiente de U y $q > 0$. Si $q = 1$, entonces se obtiene la distribución Slash canónica, y si $q \rightarrow \infty$, se obtiene la distribución normal estándar.

Por tanto, el objetivo de este trabajo, es estudiar la variable aleatoria S en (6), considerando la variable aleatoria $Z \sim W(\alpha, \beta)$. Se llamará a esta nueva densidad Slash-Weibull de parámetros (α, β, q) , denotado por $SW(\alpha, \beta, q)$. Esta variable aleatoria S presentará una mayor kurtosis que el modelo Weibull original (1); ejemplo de datos que poseen un mayor índice de kurtosis son aquellos relacionados con tiempo de fallas de componentes sometidos a un estrés cíclico (ver Gómez et al. 2009).

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2, se presenta la densidad de la familia Slash-Weibull, y muestran algunos casos particulares derivados del modelo Slash-Weibull, se obtienen los momentos y se estudian los coeficientes de asimetría y kurtosis del modelo. Esta sección finaliza con un análisis de las funciones de confiabilidad y tasa de falla. En la sección 3, se estudian los aspectos inferenciales del modelo, en particular los estimadores de máxima verosimilitud y se presenta un estudio de simulación relacionado con los parámetros involucrados. Finalmente, la sección 4 es dedicada a las principales conclusiones.

2. La distribución Slash-Weibull

En esta sección se define la densidad de la familia estudiada y se muestran algunas de sus propiedades básicas. Por un lado, la representación estocástica del modelo Slash-Weibull es de la forma

$$W = \frac{X}{U^{1/q}} \quad (7)$$

donde $X \sim W(\alpha, \beta)$, $U \sim U(0, 1)$, X es independiente de U y $q > 0$. Diremos que W se distribuye de acuerdo en la distribución Slash-Weibull de parámetros (α, β, q) , denotaremos la distribución de (7) usando la notación $W \sim SW(\alpha, \beta, q)$.

2.1. Función de densidad

La siguiente proposición muestra la fdp de la distribución Slash-Weibull, obtenida a partir de la representación estocástica dada en (7).

Proposición 1. *Sea $W \sim SW(\alpha, \beta, q)$. Entonces, la fdp de W es dada por*

$$f_W(w | \alpha, \beta, q) = \frac{q\beta}{\alpha^\beta} w^{\beta-1} T_W(w | \alpha, \beta, q), \quad w > 0 \quad (8)$$

donde $\alpha, \beta > 0$, $q > 0$ y $T_W(w | \alpha, \beta, q)$ se define como

$$T_W(w | \alpha, \beta, q) = \int_0^1 u^{\beta+q-1} e^{-(uw/\alpha)^\beta} du$$

Demostración. Desde (7), y usando la independencia de X y U , sea $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la transformación $\varphi(x, u) = (x/u^{1/q}, u^{1/q})$ para $u \neq 0$ y con inversa $\varphi^{-1}(w, v) = (wv, v^q)$, entonces el jacobiano de la transformación inversa es $J(w, v) = qv^q$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f_W(w | \alpha, \beta, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(wv | \alpha, \beta) f_U(v) |J(w, v)| dv \\ &= q \int_0^1 v^q f_X(wv | \alpha, \beta) dv \end{aligned}$$

donde $f_X(\cdot | \alpha, \beta)$ es dado por (1). □

La figura 1 muestra la densidad Slash-Weibull para diferentes elecciones de los parámetros α , β y q . En la figura 1 se observa claramente el efecto producido por el parámetro q en el modelo Slash-Weibull, es decir, presenta colas más pesadas que la distribución Weibull, y como consecuencia, el nuevo modelo tiene mayor kurtosis.

Los siguientes corolarios son consecuencias directas de (8) y se obtienen como extensiones de los casos particulares derivados del modelo Weibull.

Corolario 1. *La variable aleatoria X se distribuye de acuerdo con la distribución Slash-Hiperexponencial y lo denotaremos por $X \sim SH(\alpha, q)$, con fdp dada por*

$$f_X(x | \alpha, q) = \frac{q}{2} (\alpha x)^{-1/2} T_X(x | \alpha, q), \quad x > 0 \quad (9)$$

donde $\alpha > 0$, $q > 0$ y $T_X(w | \alpha, q)$ se define como

$$T_X(x | \alpha, q) = \int_0^1 u^{q-1/2} e^{-(ux/\alpha)^{1/2}} du$$

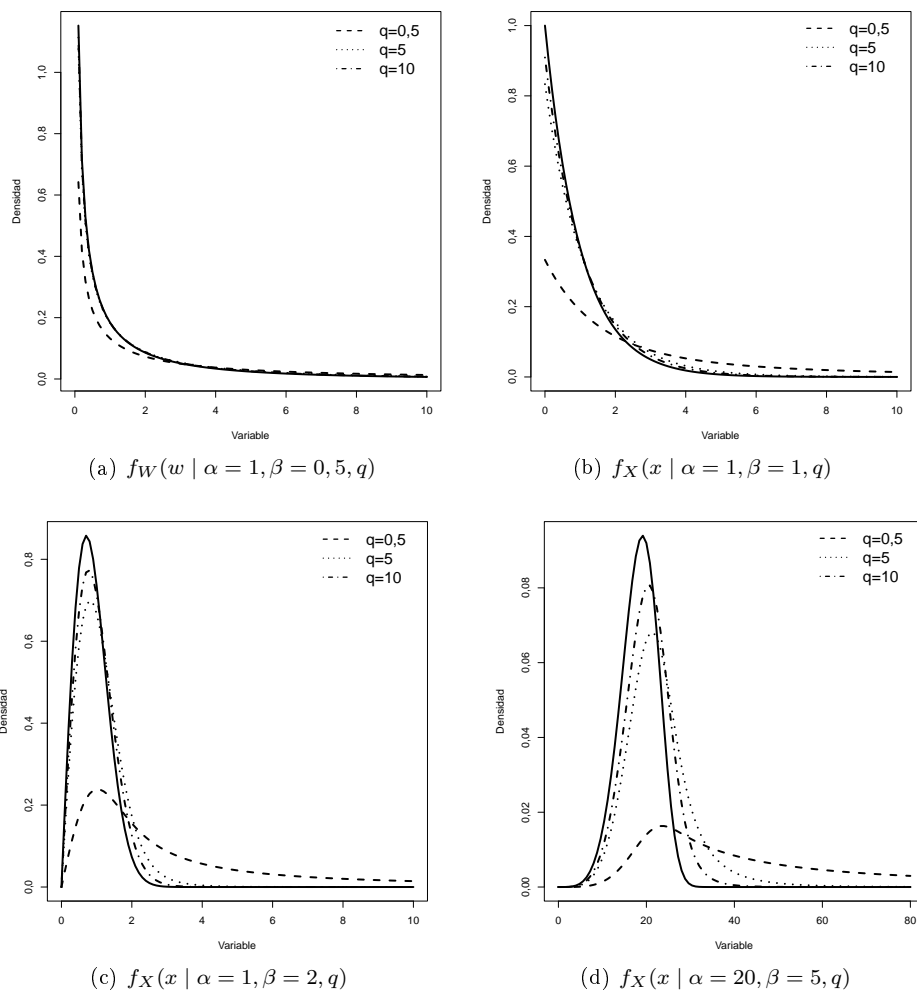


FIGURA 1: FDP $f_W(w | \alpha, \beta, q)$ para varias elecciones de (α, β, q) . La línea continua corresponde a la densidad Weibull de dos parámetros.

Corolario 2. La variable aleatoria X se distribuye de acuerdo con la distribución Slash-Exponencial y lo denotaremos por $X \sim SE(\alpha, q)$, con fdp dada por

$$f_X(x | \alpha, q) = \frac{q}{\alpha} T_X(x | \alpha, q), \quad x > 0 \tag{10}$$

donde $\alpha > 0$, $q > 0$ y $T_W(w | \alpha, q)$ se define como

$$T_X(x | \alpha, q) = \int_0^1 u^q e^{-(ux/\alpha)} du$$

Corolario 3. *La variable aleatoria X se distribuye de acuerdo con la distribución Slash-Rayleigh y lo denotaremos por $X \sim SR(\alpha, q)$, con fdp dada por*

$$f_X(x | \alpha, q) = \frac{2q}{\alpha^2} x T_X(x | \alpha, q), \quad x > 0 \quad (11)$$

donde $\alpha > 0$, $q > 0$ y $T_W(w | \alpha, q)$ se define como

$$T_X(x | \alpha, q) = \int_0^1 u^{q+1} e^{-(ux/\alpha)^2} du$$

Las figuras 1(a), 1(b) y 1(c) muestran las formas de la densidad para diferentes elecciones de los parámetros (α, q) , para los modelos Slash-Hiperexponencial, Slash-Exponencial y Slash-Rayleigh, respectivamente.

Además, de la representación estocástica dada en (7) es fácil generar variables aleatorias del modelo Slash-Weibull, a partir de la generación de variables aleatorias Weibull y Uniforme.

2.2. Momentos

Los momentos del modelo Slash-Weibull vienen dados por la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea $W \sim SW(\alpha, \beta, q)$. Entonces, con $r = 1, 2, 3, \dots$ y $q > r$, tenemos*

$$\mathbb{E}[W^r] = \frac{q}{q-r} \alpha^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{\beta}\right) \quad (12)$$

donde $\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} \exp(-t) dt$, $u > 0$ (función Gamma).

Demostración. Dado que X y U son independientes, a través de la representación estocástica dada en (7), tenemos

$$\mathbb{E}[W^r] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X}{U^{1/q}}\right)^r\right] = \mathbb{E}\left[U^{-r/q}\right] \mathbb{E}[X^r]$$

ya que $U \sim U(0, 1)$, se sigue que $\mathbb{E}[U^{-r/q}] = \frac{q}{q-r}$, $q > r$ y por otro lado, como $X \sim W(\alpha, \beta)$, tenemos $\mathbb{E}[X^r] = \alpha^r \Gamma(1 + \frac{r}{\beta})$, (Johnson, Kotz & Balakrishnan 1995). \square

Usando la proposición 2, es posible obtener las expresiones para la esperanza y varianza de la variable aleatoria W , las cuales son dadas en el siguiente corolario.

Corolario 4. *Si $W \sim SW(\alpha, \beta, q)$, entonces*

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{q}{q-1} \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \quad q > 1 \\ V(W) &= q\alpha^2 \left\{ \frac{1}{q-2} \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \frac{q}{(q-1)^2} \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right\}, \quad q > 2 \end{aligned}$$

2.3. Coeficiente de asimetría y kurtosis

Proposición 3. Sea $W \sim SW(\alpha, \beta, q)$. Entonces el coeficiente de asimetría es

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\frac{\Gamma(1+3/\beta)}{q^2(q-3)} - \frac{3\Gamma(1+1/\beta)\Gamma(1+2/\beta)}{q(q-1)(q-2)} + \frac{2\Gamma^3(1+1/\beta)}{(q-1)^3}}{\left[\frac{\Gamma(1+2/\beta)}{q(q-2)} - \frac{\Gamma^2(1+1/\beta)}{(q-1)^2}\right]^{3/2}}, \quad q > 3 \quad (13)$$

y el coeficiente de kurtosis es

$$\beta_2 = \frac{\frac{\Gamma(1+4/\beta)}{q^3(q-4)} - \frac{4\Gamma(1+1/\beta)\Gamma(1+3/\beta)}{q^2(q-1)(q-3)} + \frac{6\Gamma^2(1+1/\beta)\Gamma(1+2/\beta)}{q(q-1)^2(q-2)} - \frac{3\Gamma^4(1+1/\beta)}{(q-1)^4}}{\left[\frac{\Gamma(1+2/\beta)}{q(q-2)} - \frac{\Gamma^2(1+1/\beta)}{(q-1)^2}\right]^2}, \quad q > 4 \quad (14)$$

Demostación. Usando los coeficientes de asimetría y kurtosis estandarizados, tenemos

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3}{(\mu_2 - \mu_1^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2}, \quad (15)$$

donde $\mu_r = \mathbb{E}[W^r]$, con $r = 1, 2, 3, \dots$ y $q > r$ es definido en (12). □

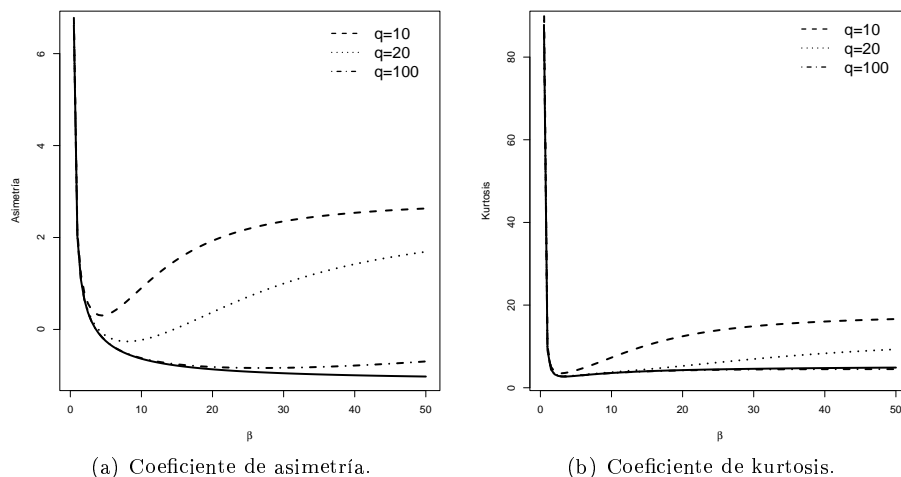


FIGURA 2: Coeficiente de asimetría y kurtosis para la distribución Slash-Weibull y Weibull (línea continua), para diferentes valores de q .

La figura 2 presenta $\sqrt{\beta_1}$ y β_2 como función del parámetro de forma. Esta figura muestra el comportamiento de los coeficientes de asimetría y kurtosis para las distribuciones Slash-Weibull y Weibull, para diferentes valores de q . Además, se puede ver que cuando el valor de q se incrementa, los coeficientes de asimetría y kurtosis tienden a los correspondientes coeficientes de la distribución Weibull. A partir de la figura 2(b) se observa claramente el efecto producido por el parámetro q en el modelo Slash-Weibull, es decir, el nuevo modelo tiene mayor kurtosis.

2.4. Función de confiabilidad y tasa de falla

Es esta sección se estudian las funciones de confiabilidad y tasa de falla del modelo Slash-Weibull, es decir, se considera una variable aleatoria $T \sim SW(\alpha, \beta, q)$. La confiabilidad de un componente (o sistema) en el tiempo t , es definido como $R_T(t | \alpha, \beta, q) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F_T(t | \alpha, \beta, q)$, donde T es el tiempo de vida del componente y $F_T(t | \alpha, \beta, q)$ es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria T , R_T es también conocida como la función de confiabilidad de un componente (o sistema). En la figura 3 aparece la forma de la función de confiabilidad $R_T(t | \alpha, \beta, q)$ para varias elecciones de (α, β, q) .

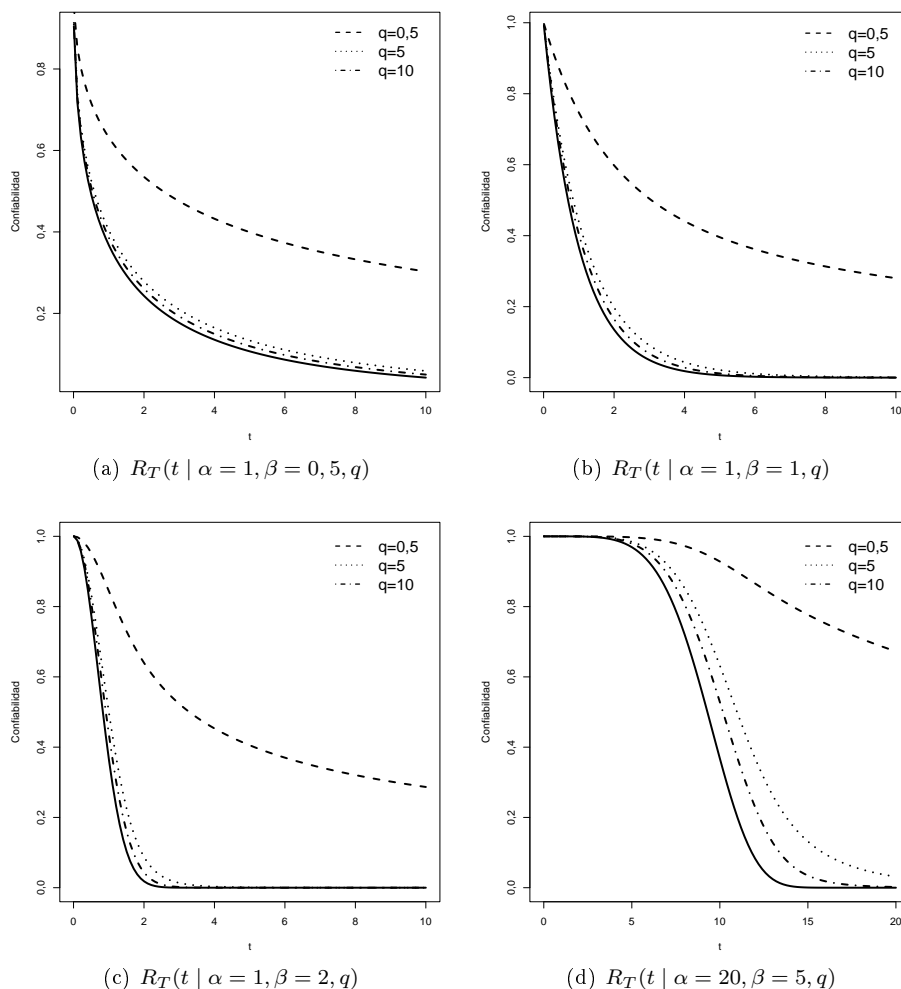


FIGURA 3: Función de confiabilidad $R_T(t | \alpha, \beta, q)$ para varias elecciones de (α, β, q) . La línea continua corresponde a la función de confiabilidad de la densidad Weibull de dos parámetros.

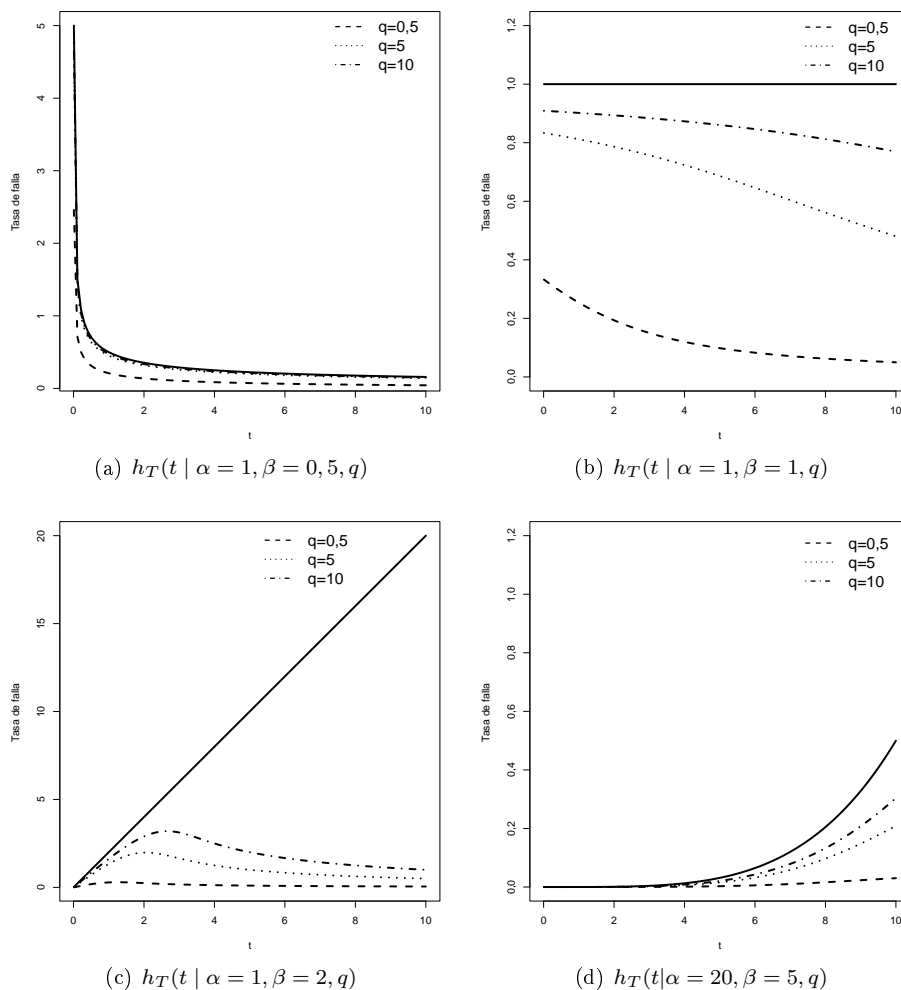


FIGURA 4: Función de tasa de falla $h_T(t | \alpha, \beta, q)$ para varias elecciones de (α, β, q) . La línea continua corresponde a la función de tasa de falla de la densidad Weibull de dos parámetros.

La figura 4 muestra la función de tasa de falla

$$h_T(t | \alpha, \beta, q) = \frac{f_T(t | \alpha, \beta, q)}{R_T(t | \alpha, \beta, q)}$$

correspondiente a la variable aleatoria $T \sim SW(\alpha, \beta, q)$, donde $f_T(t | \alpha, \beta, q)$ es la fdp de T . De la función de tasa de falla para la variable aleatoria T se desprenden las siguientes propiedades: (i) $h_T(t | \alpha, \beta, q) \geq 0, \forall t$, y (ii) $h_T(0 | \alpha, \beta, q) = 0$.

Una de las gráficas más ampliamente conocidas y utilizadas para modelar tiempos de vida de componentes (o sistemas) a través de la distribución Weibull es la curva de la bañera. En la figura 4 se puede observar la función de tasa de falla del

modelo Slash-Weibull, y que a través de este es posible construir la curva de la bañera para distintos valores de α , β y q . Cabe destacar que al ir aumentando el valor de q , el modelo Slash-Weibull se aproxima al comportamiento mostrado por la distribución Weibull de dos parámetros.

En la figura 4(a), con $\beta < 1$, se observa un comportamiento decreciente en la curva, debido a que se considera que los componentes en el inicio de su utilización presentan una alta cantidad de fallas que va disminuyendo en el tiempo. En la figura 4(b), con $\beta = 1$, se observa un comportamiento constante en la curva, debido a que se considera que los componentes pasan por un periodo con tasas de fallas constantes en el tiempo. En las figuras 4(c) y 4(d), con $\beta > 1$, se observa un comportamiento creciente en la curva, debido a que se considera que los componentes al aproximarse al final de su vida útil aumentan sus tasas de fallas en el tiempo.

3. Aspectos inferenciales

A partir de (12) es posible obtener los tres primeros momentos poblacionales y estos pueden ser usados para el cálculo de los estimadores de momentos para los respectivos parámetros (con $q > 3$). Entonces, en esta sección nos enfocaremos en el cálculo de los EMV, y se realizará un análisis de simulación para estudiar el comportamiento de las estimaciones.

3.1. Estimación por máxima verosimilitud

La función de log-verosimilitud correspondiente a una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n desde la distribución $SW(\alpha, \beta, q)$ en (8) puede ser escrita como

$$\ell(\theta) = n \log q + n \log \beta - n \beta \log \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log w_i + \sum_{i=1}^n \log T_W(w_i | \alpha, \beta, q) \quad (16)$$

donde, $T_W(\cdot | \alpha, \beta, q)$ se define en la proposición 1.

Los EMV vienen dados por la maximización de (16). Dada la forma de (16), el sistema obtenido a partir de la obtención de las respectivas derivadas parciales debe ser resuelto numéricamente. La maximización se realiza por medio de la función optim del software R, el método específico es L-BFGS-B (Byrd, Lu, Nocedal & Zhu 1995), ya que permite que cada variable involucrada se pueda acotar. Este método corresponde a una modificación del método quasi-Newton. A continuación se presenta un estudio de simulación, donde el principal objetivo es estudiar el comportamiento de los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros α , β y q .

3.2. Análisis de simulación

En esta sección se estudian los resultados de varios estudios de simulación relacionados con los parámetros α , β y q . El principal objetivo es analizar el

comportamiento de los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros α , β y q .

El estudio es realizado por la generación de 1.000 muestras aleatorias simuladas de la distribución Slash-Weibull para diferentes valores de los parámetros del modelo. Luego del cálculo de los EMV para cada parámetro del modelo, para cada muestra generada, el valor medio y la desviación estándar empírica para las 1.000 estimaciones de cada parámetro son calculadas. Estos resultados se pueden ver en la tabla 1, donde se observa que las estimaciones son bastante estables, y lo más importante, las estimaciones son cercanas a los valores verdaderos para el tamaño de muestra considerado.

TABLA 1: Media y desviaciones estándar simuladas para los EMV de α , β y q .

			$n = 100$		
α	β	q	$\hat{\alpha}(SD)$	$\hat{\beta}(SD)$	$\hat{q}(SD)$
1	0,5	3	0,965(0,219)	0,513(0,043)	2,642(0,335)
		5	1,056(0,223)	0,512(0,039)	4,990(0,122)
		7	1,017(0,204)	0,503(0,041)	7,004(0,019)
1	1	3	0,947(0,118)	1,040(0,121)	2,762(0,411)
		5	0,979(0,118)	1,025(0,076)	4,890(0,588)
		7	0,994(0,114)	1,020(0,088)	6,979(0,264)
1	2	3	0,996(0,081)	2,061(0,239)	3,004(0,449)
		5	0,999(0,059)	2,074(0,198)	4,904(0,564)
		7	1,004(0,056)	2,073(0,187)	6,850(0,577)
10	5	3	10,085(0,581)	5,176(0,856)	3,093(0,419)
		5	9,977(0,430)	5,211(0,637)	4,953(0,574)
		7	10,020(0,240)	5,070(0,573)	6,954(0,540)
			$n = 200$		
α	β	q	$\hat{\alpha}(SD)$	$\hat{\beta}(SD)$	$\hat{q}(SD)$
1	0,5	3	0,938(0,148)	0,508(0,031)	2,659(0,338)
		5	1,010(0,166)	0,502(0,029)	5,016(0,095)
		7	1,010(0,136)	0,504(0,028)	7,002(0,010)
1	1	3	0,987(0,103)	1,011(0,063)	2,882(0,441)
		5	0,988(0,067)	1,030(0,065)	4,756(0,498)
		7	0,996(0,077)	1,003(0,052)	6,943(0,298)
1	2	3	0,998(0,060)	2,025(0,183)	3,010(0,393)
		5	0,978(0,046)	2,055(0,158)	4,851(0,570)
		7	0,994(0,045)	2,016(0,131)	6,838(0,530)
10	5	3	10,043(0,390)	5,058(0,521)	3,063(0,365)
		5	9,964(0,264)	5,097(0,440)	4,927(0,514)
		7	9,971(0,212)	5,069(0,439)	6,860(0,513)

4. Conclusiones

La nueva familia introducida, llamada distribución Slash-Weibull, presenta un coeficiente de kurtosis mayor que la distribución Weibull de dos parámetros considerada; este hecho puede ser útil para el ajuste de un conjunto de datos con una kurtosis mayor que la distribución Weibull ordinaria. El estudio de simulación desarrollado muestra que el modelo Slash-Weibull puede producir un ajuste mucho mejor que el modelo Weibull. Además, también se puede decir desde el estudio de simulación que los EMV presentan un comportamiento bastante bueno en términos del sesgo empírico y el error cuadrático medio.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros y al editor por sus valiosos comentarios. J. F. Olivares-Pacheco agradece a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología-Conicyt por financiar sus estudios de doctorado en la Pontificia Universidad Católica de Chile. La investigación de H. C. Cornide-Reyes ha sido parcialmente financiada por el Proyecto DIUDA 221171 de la Dirección de Investigación y Postgrado de la Universidad de Atacama, Chile.

[Recibido: marzo de 2009 — Aceptado: octubre de 2010]

Referencias

- Byrd, R. H., Lu, P., Nocedal, J. & Zhu, C. (1995), 'A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization', *SIAM Journal on Scientific Computing* **16**(5), 1190–1208.
- Chen, Z. (2000), 'An New Two-parameter Lifetime Distribution with Bathtub-Shape or Increasing Failure Rate Function', *Statistics and Probability Letters* **49**(2), 155–161.
- Gómez, H. W., Olivares-Pacheco, J. F. & Bolfarine, H. (2009), 'An Extension of the Generalized Birnbaum-Saunders Distributions', *Statistics and Probability Letters* **79**(3), 331–338.
- Gómez, H. W., Quintana, F. A. & Torres, F. J. (2007), 'A New Family Slash-Distributions with Elliptical Contours', *Statistics and Probability Letters* **77**(7), 717–725.
- Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1995), *Continuous Univariate Distributions*, second edn, Wiley, New York.
- Kafadar, K. (1982), 'A Biweight Approach to the One-Sample Problem', *Journal of the American Statistical Association* **77**(378), 416–424.

- Mosteller, F. & Tukey, J. W. (1977), *Data Analysis and Regression*, Addison-Wesley.
- Rogers, W. H. & Tukey, J. W. (1972), 'Understanding Some Long-tailed Symmetrical Distribution', *Statistics Neerlandia* **26**, 211–226.
- Tang, Y., Xie, M. & Goh, N. T. (2003), 'Statistical Analysis of a Weibull Extension Model', *Communications in Statistics: Theory and Methods* **32**(5), 913–928.
- Wang, J. & Genton, M. G. (2006), 'The Multivariate Skew-Slash Distribution', *Journal of Statistical Planning and Inference* **136**(1), 209–220.
- Weibull, W. (1951), 'A Statistical Distribution Function of Wide Applicability', *Journal of Applied Mechanics* **18**, 293–297.
- Zhang, T. & Xie, M. (2007), 'Failure Data Analysis with Extended Weibull Distribution', *Communications in Statistics: Simulation and Computation* **36**(3), 579–592.