

## Funciones de producción, análisis de economías a escala y eficiencia técnica en el eje cafetero colombiano: una aproximación con frontera estocástica

Estimation of the Production Functional Form, Returns to Scale and Technical Efficiency in Colombian Coffee Zone by Means Stochastic Frontier

JORGE ANDRÉS PERDOMO<sup>a</sup>, DARRELL LEE HUETH<sup>b</sup>

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA AGRÍCOLA Y RECURSOS NATURALES, UNIVERSIDAD DE  
MARYLAND, MARYLAND, ESTADOS UNIDOS  
FACULTAD DE ECONOMÍA, UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, BOGOTÁ, COLOMBIA

---

### Resumen

El objetivo principal de este estudio consiste en estimar distintas formas (convencionales y flexibles) funcionales de producción cafetera en Colombia, mediante frontera estocástica. Con los resultados, calcular y analizar las economías a escala por unidad cafetera (productores pequeños, medianos, grandes y sector general cafetero), así como obtener y evaluar la eficiencia técnica de los caficultores asentados en Caldas, Quindío y Risaralda.

**Palabras clave:** elasticidad, estimación máximo-verosimil, forma funcional, función de producción, regresión estocástica.

### Abstract

This article is an empirical study about flexible and conventional functional forms of coffee production, minflex Laurent Translog function econometrically has been established in Colombia coffee zone for the farm size (smallholders, medium and large farms, general sector), using a stochastic frontier model through standard maximum likelihood method. Likewise, their returns to scale and technical efficiency were derived.

**Key words:** Elasticity, Functional form, Maximum likelihood estimation, Production function, Stochastic regression.

---

<sup>a</sup>Profesor. E-mail: jor-perd@uniandes.edu.co

<sup>b</sup>Profesor emérito. E-mail: dhueth@arec.umd.edu.

## 1. Introducción

Colombia es el tercer productor cafetero y el principal cultivador de café arábica lavado mundial (Banco Mundial 2002). Desde 1870 empezó a desarrollar su producción comercial; actualmente, representa el 2 % del producto interno bruto nacional (PIB). Según la Federación Nacional de Cafeteros de Colombia (Fedecafé), existen aproximadamente 560.000 fincas dedicadas a cultivar café, en las cuales se encuentran pequeños<sup>1</sup> (minifundistas), medianos<sup>2</sup> (campesinos) y grandes productores<sup>3</sup> (empresariales).

Por esta razón, el sector es importante en la economía, la cultura y el ámbito social colombiano. En estas circunstancias y para determinar adecuadamente las economías a escala por unidad de producción (pequeños, medianos, grandes y sector general), establecer la eficiencia técnica (ET) y diseñar con los resultados recomendaciones que puedan mejorar la productividad en la actividad, el objetivo principal del estudio consiste en estimar, mediante frontera estocástica (FE), la forma funcional de producción cafetera en los departamentos de Caldas, Quindío y Risaralda (Colombia).

Esto ocurre porque en el eje cafetero colombiano falta información estadística microeconómica sobre la actividad lo que limita la elaboración de un diagnóstico y análisis microeconómico confiable del sector y de los caficultores colombianos. Por consiguiente, disminuye las probabilidades de éxito para cualquier estrategia dirigida a ellos. Así, profundizar el tema permitirá diseñar políticas y programas institucionales acertados y pertinentes (García & Ramírez 2002). En la zona existen hipótesis sobre fragmentación de tierras cafeteras y diversificación de cultivos (Guhl 2004).

Estos factores posiblemente están disminuyendo la eficiencia, la productividad y la competitividad del grano en Colombia, ocasionando altos costos de producción, comparado con Vietnam y Brasil. Por consiguiente, para el diseño de políticas apropiadas al sector debe estimarse una función de producción cafetera correcta desde la perspectiva microeconómica y econométrica. En este sentido, conviene especificar una forma funcional adecuada que no afecte significativamente los resultados y los análisis de las economías a escala y eficiencia técnica, obtenidas mediante el método paramétrico de frontera estocástica (Konstantinos, Kien & Vangelis 2003).

Para alcanzar estadística y econométricamente lo expuesto, el documento se encuentra dividido de la siguiente manera: la sección 2 comprende el estado del arte mediante una revisión literaria nacional e internacional en el tema. La sección 3 presenta el marco teórico y metodológico con los aspectos más destacados sobre formas funcionales de producción y frontera estocástica. La sección 4 contiene re-

---

<sup>1</sup>El 64 % de los caficultores son minifundistas con menos de media hectárea sembrada en café (Ramírez, Silva, Valenzuela, Villegas & Villegas 2002).

<sup>2</sup>El 31 % de los productores corresponden a unidades empresariales cafeteras campesinas con un promedio de 2,2 hectáreas sembradas en café (Ramírez et al. 2002).

<sup>3</sup>Los cafeteros empresariales son el 5 % del total de unidades productivas, con fincas que fluctúan entre 7 y 35 hectáreas cultivadas en café (Ramírez et al. 2002).

sultados empíricos. En la 5 están expuestas las conclusiones y sugerencias derivadas del trabajo.

## 2. Literatura relacionada

La literatura sobre eficiencia productiva o técnica en la actividad cafetera colombiana está surgiendo (Perdomo 2006, Perdomo & Hueth 2010). Igualmente, la técnica de frontera estocástica (FE) no ha sido aplicada en el sector con el fin de estimar formas funcionales de producción, economías a escala y eficiencia técnica, para diseñar políticas que ayuden a mejorar los rendimientos en el cultivo del grano. No obstante, Perdomo, Hueth & Mendieta (2007) y Perdomo & Mendieta (2007) obtuvieron la eficiencia técnica y asignativa mediante el método no paramétrico DEA (análisis envolvente de datos) en la zona cafetera de Colombia. Para nuestro conocimiento, hay pocos estudios nacionales al respecto.

Sin embargo, internacionalmente existe una amplia investigación empírica sobre la eficiencia económica de agricultores para países desarrollados y en desarrollo utilizando FE (Kumbhakar 1993, Battese & Broca 1991, Reinhard, Lovell & G. 1999, Thanda & Matthias von 1999, Donnell & Griffiths 2006, Lohr & Park 2006). Aunque en producción cafetera, la evidencia empírica indica que para medir eficiencia los autores se han centrado especialmente en especificar y estimar funciones translogarítmica y Cobb-Douglas (Coelli & Fleming 2003, Saravia 2007, Wollni 2007, Cárdenas, Vedenov & Houston 2008).

Por consiguiente, solo dos estudios llevados a cabo en las fincas de olivo griegas (Konstantinos et al. 2003) y las granjas de Estados Unidos (Ornelas, Shumway & Ozuna 1994) consideraron los efectos sobre las medidas de economías a escala y la eficiencia obtenidas desde la técnica paramétrica de frontera estocástica por elegir formas funcionales de producción inapropiadas. Este análisis no ha sido realizado nacional e internacionalmente en producción cafetera. Como consecuencia, estos trabajos están estrechamente relacionados con nuestro documento. Finalmente, mediante análisis envolvente de datos (DEA), Joachim, Kalilou, Ibrahim & Gwendoline (2003), Rios & Shively (2005) y Mosheim (2002) estimaron la eficiencia técnica en fincas productoras de café en Costa de Marfil (África), Vietnam (Asia) y Costa Rica, respectivamente.

## 3. Funciones de producción y frontera estocástica

Esta sección comprende el marco teórico microeconómico y metodológico sobre frontera estocástica para analizar la producción por unidad productiva y sector cafetero colombiano. Así, la relación entre la cantidad de insumos (hectáreas cultivadas  $-x_{1i}-$ , mano de obra utilizada  $-x_{2i}-$ , maquinaria requerida  $-x_{3i}-$  y fertilizantes aplicados  $-x_{4i}-$  para la finca  $i$ ) y la producción de café ( $q_i$ , cantidad de café en arro-

bas para el año 2003 para la finca  $i$ )<sup>4</sup> bajo formas funcionales convencionales<sup>5</sup> y flexibles (Diewert 1974) puede apreciarse en la tabla 1<sup>6</sup>.

TABLA 1: Funciones de producción convencionales y flexibles.

| Funciones de producción convencionales                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Proporciones fijas - Leontief                                                                                                                                                                                                       |
| $(\sigma = 0, \rho \rightarrow -\infty) : q_i = \min(\beta_1 x_{1i}, \beta_2 x_{2i}) \Rightarrow \beta_1, \beta_2 > 0, \text{ ESC}(\sigma)$                                                                                         |
| Cobb-Douglas (CD)                                                                                                                                                                                                                   |
| $(\sigma = 1, \rho = 0) : q_i = f(x_{1i}, x_{2i}) = \beta_0 x_{1i}^{\beta_1} x_{2i}^{\beta_2} \Rightarrow \beta_0, \beta_1, \beta_2 > 0$                                                                                            |
| ESC (Elasticidad de Sustitución Constante, $\sigma$ )                                                                                                                                                                               |
| $q_i = f(x_{1i}, x_{2i}) = [\beta_1 x_{1i}^\rho + \beta_2 x_{2i}^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \Rightarrow \rho \leq 1, \rho \neq 0, \rho \rightarrow -\infty, \sigma > 0$                                                                 |
| Cuadrática                                                                                                                                                                                                                          |
| $q_i = f(x_{1i}, x_{2i}) = \beta_1 x_{1i} x_{2i} + \beta_2 x_{1i}^2 + \beta_3 x_{2i}^2$                                                                                                                                             |
| Funciones de producción flexibles                                                                                                                                                                                                   |
| Leontief generalizada (Diewert)                                                                                                                                                                                                     |
| $q_i = \beta_0 + 2\beta_1 \sqrt{x_{1i}} + 2\beta_2 \sqrt{x_{2i}} + 2\beta_3 \sqrt{x_{1i} x_{2i}}$                                                                                                                                   |
| Translogarítmica                                                                                                                                                                                                                    |
| $\ln q_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_{1i} + \beta_2 \ln x_{2i} + \beta_3 \frac{1}{2} \ln x_{1i}^2 + \beta_4 \frac{1}{2} \ln x_{2i}^2 + \beta_5 \ln x_{1i} \ln x_{2i}$                                                                 |
| Cuadrática generalizada                                                                                                                                                                                                             |
| $q_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 \frac{1}{2} x_{1i} x_{2i}$                                                                                                                                               |
| Cuadrática, raíz cuadrada (CRC)                                                                                                                                                                                                     |
| $q_i = [\beta_0 + 2\beta_1 x_{1i} + 2\beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i}]^{0.5}$                                                                                                                                                 |
| Cuadrática generalizada Box-Cox                                                                                                                                                                                                     |
| $\frac{q_i^{2\theta} - 1}{2\theta} = \beta_0 + \beta_1 \frac{x_{1i}^\lambda - 1}{\lambda} + \beta_2 \frac{x_{2i}^\lambda - 1}{\lambda} + \beta_3 \frac{1}{2} \frac{x_{1i}^\lambda - 1}{\lambda} \frac{x_{2i}^\lambda - 1}{\lambda}$ |
| ESC, multifactores                                                                                                                                                                                                                  |
| $q_i = [\beta_1 x_{1i}^\rho + \beta_2 x_{2i}^\rho + \beta_3 x_{3i}^\rho + \beta_4 x_{4i}^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$                                                                                                                    |
| $\sigma$ se refiere a la elasticidad de sustitución constante (esc) y $\rho$ al parámetro de sustitución; así cada forma funcional depende de los valores tomados por estos coeficientes.                                           |
| $\sigma = \frac{1}{1+\rho}, \text{ si } \begin{cases} -1 < \rho < 0 \rightarrow \sigma > 1 \\ \rho = 0 \rightarrow \sigma = 1 \\ 0 < \rho < \infty \rightarrow \sigma < 1 \end{cases}$                                              |
| Para más detalles, véase Chiang (1984, p. 426) y Nicholson (2002, p. 280-284).                                                                                                                                                      |
| Fuente: autores a partir de Nicholson (2002), Diewert (1974), Konstantinos et al. (2003)                                                                                                                                            |
| Perdomo, (2010, 2011), Mendieta & Perdomo (2008, p. 88).                                                                                                                                                                            |

Donde  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$  describen los respectivos parámetros en cada modelo; sin embargo, su valor e interpretación difiere en cada función. Por ejemplo,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$  toma distintos valores e interpretaciones entre las formas Cobb-Douglas, cuadrática generalizada o cuadrática raíz cuadrada, lo que significa elasticidades en la primera, mientras que en las generalizadas carece de definición por ser funciones no lineales. Igualmente, es importante resaltar que los valores y

<sup>4</sup>El subíndice  $i$  define el corte transversal y el tamaño de la muestra, desde la finca 1 hasta la 999 ( $i = 1, 2, \dots, 999$ ), para los insumos ( $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}$  y  $x_{4i}$ ) y producción ( $q_i$ ) especificados.

<sup>5</sup>Generalmente simplifica el modelo mediante el análisis de uno o dos insumos ( $x_{1i}$  y  $x_{2i}$ ).

<sup>6</sup>Asumiendo dos insumos de producción ( $x_{1i}$  y  $x_{2i}$ ) para simplificar y facilitar su comprensión, teniendo en cuenta que la evidencia empírica expuesta en la sección 4 implicó los cuatro principales insumos empleados en el cultivo de café (hectáreas cultivadas -  $x_{1i}$  -, mano de obra utilizada -  $x_{2i}$  -, maquinaria requerida -  $x_{3i}$  - y cantidad de fertilizantes aplicados -  $x_{4i}$  -). Igualmente, en la tabla 1,  $\ln$  describe el logaritmo natural de la respectiva variable.

signos de los coeficientes estimados de las funciones no lineales (convencionales y flexibles) carecen de interpretación directa.

Tampoco puede inferirse algún tipo de conclusión sobre la intensidad y el relevancia entre un insumo y el café producido si los signos parciales de los parámetros estimados resultan negativos en los términos cuadráticos e interacciones y estadísticamente no significativos. Ante esto, para las funciones no lineales (convencionales y flexibles) deben calcularse los efectos marginales, elasticidades y economías a escala con su respectiva desviación estándar<sup>7</sup>, y así determinar la importancia y relación (directa o inversa, parcial y conjunta) entre los insumos y la producción cafetera (Greene 2002, p. 103-104). Prosiguiendo la descripción de la tabla 1,  $\theta$  y  $\lambda$  son los coeficientes de transformación no lineales para la función cuadrática generalizada Box-Cox y  $\rho$  representa el parámetro de sustitución, cuyo valor determina la elasticidad de sustitución constante (ESC o  $\sigma$ ) en su presentación convencional y flexible (Chiang 1984).

Por consiguiente, con los datos microeconómicos (insumo-producción) disponibles sobre los caficultores en el eje cafetero colombiano y mediante el método de frontera estocástica pueden estimarse las formas funcionales exhibidas en la tabla 1, y con sus resultados determinar las economías a escala y la eficiencia técnica para los pequeños, medianos y grandes productores del sector de cafeteros.

### 3.1. Frontera estocástica

La frontera estocástica (FE) consiste en ajustar las formas funcionales de producción descritas en la tabla 1 utilizando técnicas econométricas mediante máxima verosimilitud. Es una aproximación paramétrica propuesta por Aigner, Lovell & Schmidt (1977) y Meesen & Van den Broeck (1977). En este sentido y de manera simplificada, la eficiencia técnica resulta gráficamente (figura 1) encontrando la función distancia entre el valor observado ( $x - q$ , punto B) y óptimo derivado del modelo econométrico ( $x - q^*$ , punto A), para la cantidad insumo-producción cafetera. Esto indica que, con la misma intensidad del factor ( $x$ ), es posible lograr una mayor producción ( $q^*$ ), o disminuyendo su monto ( $x^*$ ), se obtiene la cantidad real de café ( $q$ ).

Asimismo, la medida de eficiencia técnica para cada caficultor por unidad productiva en Colombia puede obtenerse mediante frontera estocástica, especificando previamente una forma funcional de producción adecuada como las presentadas en la tabla 1. Debido a que los resultados de las economías a escala y la eficiencia técnica, derivados del método FE, son sensibles a la elección y la estimación funcional (Konstantinos et al. 2003, Rosales, Perdomo, Morales & Urrego 2010).

<sup>7</sup>Como ejemplo para  $x_{1i}$  y  $x_{2i}$ , los efectos marginales y las elasticidades están dados por  $\frac{\partial q_i}{\partial x_{1i}}$  y  $\frac{\partial q_i}{\partial x_{2i}}$  y  $\frac{\partial q_i}{\partial x_{1i}} \frac{x_{1i}}{q_i}$  y  $\frac{\partial q_i}{\partial x_{2i}} \frac{x_{2i}}{q_i}$ , respectivamente; la economía a escala es concebida de sumar las elasticidades parciales; por consiguiente, si es mayor que 1 exhibe rendimientos crecientes, menor que 1, decrecientes; e igual a 1 constantes a escala. Una conocidos vez los resultados, la importancia estadística de las elasticidades puede inferirse con el valor de la desviación estándar asociada a cada coeficiente implicado en su cálculo y multiplicado, respectivamente, por los valores promedios ( $\bar{x}_{1i}$  y  $\bar{x}_{2i}$ ) de las variables involucradas en el mismo. véase más detalles en Greene (2002, p. 104), y en el apéndice de este documento.

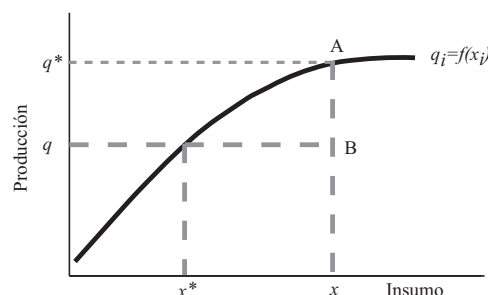


FIGURA 1: Función distancia.

Fuente. Reinhard et al. (1999, p. 51)

$$q_i = f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \beta) + \eta_i, \text{ donde } \eta_i = v_i - u_i \quad (1)$$

Así, siguiendo el esquema de Aigner et al. (1977), la frontera estocástica es representada en la ecuación (1) para cualquier función ( $f$ ) de producción cafetera convencional o flexible en la tabla 1. Igualmente,  $q_i$  indica la cantidad de café conseguido por la finca  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 999$ );  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}$ ,  $x_{3i}$ , y  $x_{4i}$  son los principales insumos aplicados en la actividad, como fueron descritos inicialmente en esta sección.  $\beta$  es un vector de parámetros que debe estimarse empleando máxima verosimilitud que difiere en tamaño, resultados e interpretación dependiendo de la función especificada y estimada en la tabla 1;  $\eta_i$  hace referencia al componente estocástico compuesto por los elementos independientes  $v_i$  y  $u_i$ . Este procedimiento permite calcular el nivel máximo producido de café ( $q_i^*$ ), como lo representa la figura 1.  $v_i$  almacena las variaciones aleatorias<sup>8</sup> de la producción cafetera ( $q_i$ ), es simétrica e independientemente distribuida (iid) con media cero y varianza constante [ $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ ] tomando valores positivos y negativos hacia el infinito ( $-\infty < v_i < \infty$ ). Mientras  $u_i$  acumula la ineficiencia técnica<sup>9</sup> observada en la caficultura, ( $q_i$ ) es un término asimétrico iid [ $u_i \geq 0 \sim N(0, \sigma_u^2)$ ] mayor que 0 e independiente de  $v_i$ .

Entonces, dadas estas características de  $\eta_i$ , los estimadores ( $\hat{\beta}$ ) de la frontera estocástica deben obtenerse mediante máxima verosimilitud, con el fin de conseguir parámetros eficientes, nosesgados y consistentes (Aigner et al. 1977). Por consiguiente, el logaritmo de la función de verosimilitud ( $\ln f$ ) es:

$$\ln(\sigma_s^2, \hat{\beta}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma_s^2) + \sum_{i=1}^n \ln[1 - \varphi(z_i)] - \frac{n}{2\sigma_s^2} \sum_{i=1}^n \left[ q_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) \right]^2 \quad (2)$$

<sup>8</sup>Se refiere a eventos independientes de la producción cafetera, que no pueden controlar directamente los productores (cambio de políticas institucionales en los mercados, volatilidad de los precios de café, incertidumbre, riesgo, clima desfavorable, desastres naturales, entre otros).

<sup>9</sup>Dada por los insumos o variables de producción que pueden controlar los cafeteros, como la cantidad e intensidad de factores utilizados para producir.

Donde  $n$  denota el número de observaciones o fincas cafeteras encuestadas (999),  $\sigma_s^2$  la varianza del modelo<sup>10</sup> y  $\varphi(z_i)$ <sup>11</sup> la distribución normal estándar acumulada, en la cual  $\gamma$  ( $\gamma$ )<sup>12</sup> representa el parámetro de eficiencia proveniente de las fuentes ( $v_i$  y  $u_i$ ) del error ( $\eta_i$ ) en la ecuación (1). En este sentido, cuando el efecto aleatorio predomina ( $\sigma_u^2 \rightarrow 0$  y  $\gamma = 0$ ), significa eficiencia o ausencia de ineficiencia técnica. Esto indica que los caficultores emplean adecuadamente la cantidad de insumos maximizando su producción, ubicados en cualquier sitio (punto A) sobre la frontera de la figura 1.

Sin embargo, simultáneamente puede existir ineficiencia por eventos inesperados en el cultivo de café porque la varianza aleatoria posiblemente tiende a infinito ( $\sigma_v^2 \rightarrow \infty$ ) y es predominante, haciendo que  $\eta_i$  converja a una distribución normal. En el caso contrario, cuando la variación del componente asimétrico ( $u_i$ ) tiende a infinito ( $\sigma_u^2 \rightarrow \infty$  y  $\gamma \geq 1$ ), la ineficiencia técnica es la principal fuente de variación en el modelo.

En otras palabras, la cantidad de café producido por gran parte de las fincas está ubicada debajo de la frontera en la figura 1 (punto B). Esto describe un comportamiento inefectivo de los caficultores en el manejo de sus factores productivos, porque con esta cantidad de insumos pueden alcanzar mayor producción o, reduciendo su intensidad, mantener la cuantía observada de café cultivado. No obstante, la evidencia de eficiencia técnica se establece a través del estadístico de razón de verosimilitud (RV)<sup>13</sup> probando la hipótesis nula sobre el parámetro de eficiencia ( $H_0 : \gamma = 0$ ). Por consiguiente, si es rechazada  $H_0$  la respectiva unidad productora de café opera con ineficiencia técnica.

$$ET_i = \frac{q_i}{q_i^*} = \frac{e^{f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) + v_i - u_i}}{e^{f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) + v_i}} = e^{-u_i} \quad (3)$$

La frontera estocástica permite encontrar el nivel de eficiencia técnica ( $ET_i$ ), como se representa en la ecuación (3) (Battese & Coelli 1988) para cada finca cafetera  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 999$ ), la cual se concibe como la relación entre el producto conseguido ( $q_i$ ) y el máximo a alcanzarse ( $q_i^*$ ) con eficiencia técnica ( $u_i = 0$ ). En otras palabras, representa la proporción entre la producción real respecto a la potencial si los caficultores utilizaran eficientemente la cantidad de insumos requeridos en la actividad; por tanto,  $ET_i$  contiene valores entre 0 y 1 ( $0 \leq ET_i \leq 1$ ). Así, cuando  $ET_i$  tiende o equivale a uno ( $ET_i \rightarrow 1$ ), el caficultor exhibe eficiencia técnica, mientras que si su valor es menor que 1 o cercano a 0 ( $ET_i \rightarrow 0$ ), es considerado ineficiente. De esta manera, puede establecerse el productor cafetero más eficiente entre los pequeños, medianos y grandes productores del sector cafetero colombiano.

<sup>10</sup>  $\sigma_s^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$ .

<sup>11</sup>  $z_i = \frac{(q_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}))}{\sigma_s^2} \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ .

<sup>12</sup>  $\gamma = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}$ .

<sup>13</sup>  $RV = -2(\ln f_R - \ln f_{NR})$ ;  $RV \sim \frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$ , donde  $\ln f$  es el logaritmo de la función de verosimilitud. El subíndice  $R$  hace referencia al modelo restringido (con  $\gamma = 0$ ),  $NR$  al no restringido (con  $\gamma \neq 0$ ) y  $\frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$  a la distribución asintótica que resulta de combinar las distribuciones Ji-Cuadrado con cero y un grado de libertad, respectivamente (Coelli 1995, p. 292).

Una de las grandes dificultades para estimar la frontera estocástica es seleccionar una función de producción apropiada como cualquiera de las expresadas en la tabla 1. Porque la forma funcional afecta considerablemente los resultados para las elasticidades, economías a escala, parámetro de eficiencia ( $\gamma$ )<sup>14</sup> y  $ET_i$  (Konstantinos et al. 2003). Ante esto, el menor valor del criterio de Akaike<sup>15</sup> (AIC), elegido entre las distintas funciones de producción cafeteras estimadas, determinará la forma funcional adecuada con la cual se establecieran los resultados y las conclusiones del estudio.

## 4. Datos y análisis empírico

Los datos para este estudio fueron concebidos a partir de información primaria de la encuesta cafetera aplicada en 999<sup>16</sup> fincas de los departamentos de Caldas, Quindío y Risaralda por la Facultad de Economía-Centro de Investigaciones Sobre el Desarrollo Económico (CEDE) de la Universidad de los Andes<sup>17</sup> (entre marzo y abril de 2004<sup>18</sup>). El formulario contiene las principales características<sup>19</sup> sobre los diferentes caficultores<sup>20</sup> entrevistados, entre las cuales están las variables relacionadas con producción de café tomadas para este trabajo. Por consiguiente, la variable dependiente es la producción anual de café ( $q_i$ ) medida en arrobas (por 25 libras), la cantidad de insumos empleados en la actividad e incluidos como variables explicativas: tierra (hectáreas dedicadas al cultivo del grano), trabajo total (incluye trabajadores permanentes, temporales, casuales, núcleo familiar y contratos por labores<sup>21</sup>, medidos en cantidad de gente empleada), fertilizantes (incluye

<sup>14</sup>Dado que el parámetro de eficiencia es muy sensible a la forma funcional especificada, lleva a resultados espurios y a cometer errores tipo I y II en las pruebas de hipótesis, sobrevalorando o subestimando la medida de eficiencia técnica ( $ET_i$ ).

<sup>15</sup> $AIC = -2 \frac{\ln f}{n} + 2 \frac{k}{n}$ , donde  $\ln f$  es el logaritmo de la función de verosimilitud,  $n$  el número de observaciones y  $k$  el número de parámetros estimados.

<sup>16</sup>Información de corte transversal. Finalmente, se trabajó con 990 observaciones y se eliminaron nueve inconsistentes.

<sup>17</sup>Financiado con recursos de la Universidad de Maryland, bajo la dirección del profesor Darrell Hueth con el apoyo de la Federación Nacional de Cafeteros de Colombia y la valiosa colaboración de Diego Pizano, Julián García, Alfonso Ángel Uribe, Óscar Jaramillo García y Omar Acevedo Chamorro.

<sup>18</sup>La encuesta se aplicó en 2004, recolectando la información de los cafeteros para 2003. Hasta el momento, no se cuenta con más información microeconómica de este tipo en las mismas fincas entrevistadas y en otros periodos. Ninguna entidad cafetera la recolecta para otra muestra en Colombia.

<sup>19</sup>Socioeconómicas, producción del grano y otras actividades en la finca, financieras, relacionadas con la asistencia técnica, geográficas, ambientales, propias y entorno de la finca o vivienda cafetera.

<sup>20</sup>Pequeños (entre 0 y 2,1 hectáreas productivas en café; 662 observaciones en la encuesta equivale a 66,87% de la muestra total), medianos (entre más de 2,1 y 6,9 hectáreas productivas en café; 250 observaciones en la encuesta equivale a 25,25% de la muestra total) y grandes (más de 6,9 hectáreas productivas en café; 78 observaciones en la encuesta equivale a 7,88% de la muestra total). Lo anterior guarda las mismas proporciones poblacionales puntualizadas por la Comisión de Ajuste de la Institucionalidad (2002), descritas en los pies de páginas 1, 2 y 3 de la sección 1.

<sup>21</sup>Incluye todas las actividades de la finca relacionadas con arado, fertilización, fumigación con químicos, cosechas, riego, poda de maleza, transporte, administración y otros servicios.

nitrógenos, fósforo, potasio y otros; medido en *Kg*) y maquinaria (cantidad de herramientas).

De acuerdo con lo anterior y con Greene (2002), es incorrecto en funciones no lineales o flexibles, como la Translogarítmica Minflex Laurent (tabla 3), analizar la relevancia de los estimadores, interpretar sus resultados directamente e inferir algún tipo de afirmación sobre si el comportamiento y la intensidad de los insumos cafeteros son complementarios, sustitutos o exhiben productividad marginal decreciente según los signos (negativos o positivos) parciales de los parámetros en los términos cuadráticos y las interacciones del modelo estimado.

La tabla 2 presenta las elasticidades y economías a escala derivadas de la función ajustada Translogarítmica Minflex Laurent (tabla 3) para los pequeños caficultores, que deben calcularse con el fin de entender apropiadamente la incidencia de los principales insumos empleados (tierra, trabajo, fertilizantes y maquinaria) en la producción del grano y su rendimiento.

TABLA 2: Elasticidades y economías a escala de los pequeños productores de café.

|                    | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogarítmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada |
|--------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|
| Variables Indep.   | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRC                             |
| Tierra             | 0,019                                 | 0,86                                            | 0,83                                      | 0,8                                         | 151                             |
| Trabajo            | -0,0064                               | 0,47                                            | 0,44                                      | 0,32                                        | 57                              |
| Fertilizantes      | -0,0073                               | 0,026                                           | 0,12                                      | 0,14                                        | 22,3                            |
| Maquinaria         | 0,0031                                | 0,026                                           | 0,04                                      | 0,07                                        | 10                              |
| Economías a escala | 0,0084                                | 1,382                                           | 1,43                                      | 1,33                                        | 240,3                           |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*)10 %, (\*\*)5 % y (\*\*\*)1 % de importancia

|                    | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogarítmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática |
|--------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|------------|
| Variables Indep.   | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C          |
| Tierra             | 0,02                                       | 0,89         | 0,81***                                           | 2,73                                  | 24,88      |
| Trabajo            | 0,01                                       | 0,47         | (-0,30)***                                        | -0,04                                 | 0,17       |
| Fertilizantes      | 0,0024                                     | 0,03         | 0,69***                                           | 5,61                                  | 24,21      |
| Maquinaria         | 0,0014                                     | 0,03         | 0,13***                                           | 0,03                                  | 0,003      |
| Economías a escala | 0,0338                                     | 1,42         | 1,33                                              | 8,33                                  | 49,263     |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

En este sentido, la elasticidad del factor tierra lo revela como el insumo más importante (1 % de importancia) en las pequeñas unidades cafeteras, que un incremento de 0,81 % en la producción del grano cuando las hectáreas cultivadas de café aumentan 1 %; seguido por la intensidad de fertilizantes y maquinaria (1 % de importancia), porque ampliando su uso parcialmente en 1 % la producción crece 0,69 % y 0,13 %, respectivamente.

La cantidad de trabajo es la menos importante (1 %). El rendimiento del cultivo disminuye 0,30 % al incrementar el factor en 1 %. Este grupo de caficultores exhibe rendimientos crecientes a escala en su actividad productiva dado que aumentar simultáneamente en 1 % la tierra, el trabajo, los fertilizantes y la maquinaria incrementa la producción en 1,33 %. Con base en el método de frontera estocástica,

estimado mediante máxima verosimilitud, la tabla 3 presenta las estimaciones<sup>22</sup> de las funciones de la tabla 1 para los pequeños caficultores en la zona. Puede observarse que la forma funcional de producción cafetera afecta el valor y la relevancia estadística del parámetro de eficiencia ( $\gamma$ ), de promedio de eficiencia técnica (ET) y de las economías a escala (tabla 2), debido a sus diferentes resultados bajo cada frontera.

Por consiguiente, la función Translogarítmica Minflex Laurent se ajusta a los pequeños caficultores porque el valor del criterio Akaike (1.178) fue el menor, comparado con el de las otras funciones convencionales y flexibles. Asimismo, el parámetro de eficiencia ( $\gamma = 0.993$ ) y las varianzas ( $\sigma_v^2$  y  $\sigma_u^2$ ) son determinantes (al 5 % y 1 % de importancia), indicando ineficiencia técnica ( $u_i$ ) y aleatoria ( $v_i$ ) con efectos negativos sobre la producción del grano de los pequeños cafeteros. En otras palabras si  $u_i$  y  $v_i$  aumentan individualmente 1 %, en promedio la producción de ellos disminuye anualmente 1,74 % y 1,73 % respectivamente. Igualmente lo muestra el promedio de eficiencia técnica (71 %) logrado por este grupo de cultivadores de café, inferior al 100 %.

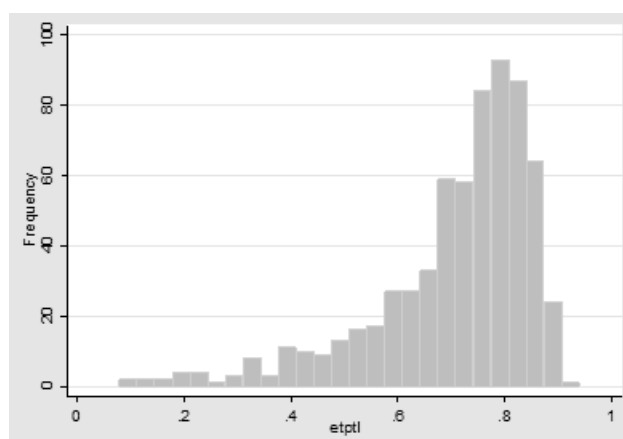


FIGURA 2: Eficiencia técnica de los pequeños productores de café.

El eje  $X$  representa el porcentaje de  $ET$  y el  $Y$  la frecuencia (el número de caficultores) a la cual le corresponde el valor de  $ET$  en el eje  $X$ . Estas mismas relaciones se aprecian más adelante en las gráficas de medianos y grandes productores en el sector general de productores.

A partir de la función de producción Translogarítmica Minflex Laurent, fue obtenido el nivel de eficiencia técnica ( $ET_i$ ), de acuerdo con la ecuación (3), por cada pequeño caficultor y su distribución, como puede apreciarse en la figura 2. Se observa sesgo negativo, lo cual implica que la mayor parte de los pequeños caficultores están ubicados por encima del promedio de  $ET$  (71 %) y debajo de la eficiencia máxima (100 %). Únicamente entre 80 y 100 productores de todo el grupo consiguen un máximo de eficiencia técnica del 80 % con un 20 % restante a mejorar, pero ninguno alcanza el 100 % de  $ET$ .

<sup>22</sup>En Stata 9 (frontera estocástica) y Eviews 4.1 (Box-Cox), utilizando errores estándar robustos y mínimos cuadrados generalizados para eliminar la heteroscedasticidad.

De acuerdo con los criterios examinados en los pequeños productores de café, se continuará en este sentido el análisis de los resultados para los medianos y grandes cultivadores cafeteros del sector en este estudio. Así, la tabla 4 presenta las elasticidades y las economías a escala derivadas de la función ajustada Translogarítmica Minflex Laurent (tabla 5) para los medianos caficultores, calculadas con el fin de entender apropiadamente la incidencia de los principales insumos empleados (tierra, trabajo, fertilizantes y maquinaria) en la producción del grano y su rendimiento.

La elasticidad del factor tierra lo revela como el insumo más importante (1 % de importancia) en las medianas unidades cafeteras, que reflejado un incremento de 0,71 % en la producción del grano cuando las hectáreas cultivadas de café aumentan 1 %, seguido por la intensidad de trabajo, fertilizantes y maquinaria (1 % de importancia), porque ampliando su uso parcialmente en 1 % la producción crece 0,20 %, 0,18 % y 0,12 % respectivamente.

Este grupo de caficultores exhibe rendimientos crecientes a escala en su actividad productiva dado que aumentar simultáneamente en 1 % la tierra, el trabajo, los fertilizantes y la maquinaria incrementa la producción en 1,21 %. Con base en el método de frontera estocástica estimado mediante máxima verosimilitud, la tabla 5 presenta las estimaciones de las funciones en la tabla 1 para los medianos caficultores en la zona. Puede observarse que la forma funcional de producción cafetera afecta el valor y la relevancia estadística del parámetro de eficiencia ( $\gamma$ ), del promedio de eficiencia técnica ( $ET$ ) y de las economías a escala (tabla 4), debido a sus diferentes resultados bajo cada frontera.

Por consiguiente, la función Translogarítmica Minflex Laurent se ajusta a los medianos caficultores porque el valor del criterio Akaike (358) fue el menor, comparado con el de las otras funciones convencionales y flexibles. Asimismo, el parámetro de eficiencia ( $\gamma = 1,93$ ) y las varianzas ( $\sigma_v^2$  y  $\sigma_u^2$ ) son determinantes (5 % y 1 % de importancia), lo que indica ineficiencia técnica ( $u_i$ ) y aleatoria ( $v_i$ ) con efectos negativos sobre la producción del grano de los medianos cafeteros. En otras palabras, si  $u_i$  y  $v_i$  aumentan individualmente 1 %, en promedio su producción disminuye anualmente 1,05 % y 2,36 %, respectivamente. Igualmente, lo muestra el promedio de eficiencia técnica (66 %) logrado por este grupo de cultivadores de café, inferior al 100 %.

A partir de la función de producción Translogarítmica Minflex Laurent fue obtenido el nivel de eficiencia técnica ( $ET_i$ ), de acuerdo con la ecuación (3), por cada mediano caficultor. Su distribución puede apreciarse en la figura 3, donde se observa sesgo negativo, implicando que la mayor parte de los medianos caficultores están ubicados por encima del promedio de  $ET$  (66 %) y debajo de la eficiencia máxima (100 %). Únicamente, entre 40 y 45 productores del grupo consiguen un máximo de eficiencia técnica del 70 %; el 30 % restante debe mejorar. Pero ninguno alcanza el 100 % de  $ET$ .

Prosiguiendo el análisis, la tabla 6 presenta las elasticidades y economías a escala derivadas de la función ajustada Translogarítmica Minflex Laurent (tabla 7) para los grandes caficultores, calculadas con el fin de entender apropiadamente la incidencia de los principales insumos empleados (tierra, trabajo, fertilizantes

TABLA 3: FE de pequeños productores de café.

|                                               | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogarítmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogarítmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática    |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|---------------|
| Variables independientes                      | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRG                             | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C             |
| Constante                                     | 5,1238723                             | 3,96868***                                      | 29,96749                                  | 56,97914                                    | 2306,745                        | 5,268704                                   | 4,0669***    | 3,41999***                                        | 49,219                                | -16,84038     |
| Tierra                                        | 2,14048***                            | 0,89183***                                      | 19,56354                                  | 64,77872***                                 | 1434,546                        | 2,26902***                                 | 0,8879***    | 0,77886***                                        | 104,295***                            | 31,75793      |
| Trabajo                                       | 0,70433***                            | 0,44935***                                      | 15,34484***                               | 3,69829***                                  | 323,1948                        | 0,645277***                                | 0,4685***    | 0,01575***                                        | -1,084029                             | 1,889196      |
| Fertilizantes                                 | 0,04820***                            | 0,0113032                                       | 0,686391**                                | 0,04809***                                  | 8,83554***                      | 0,04745***                                 | 0,0339***    | 0,650582                                          | 0,0016066                             | 0,06284***    |
| Maquinaria                                    | 0,37186***                            | 0,10397***                                      | 8,698136                                  | 5,32886*                                    | 411,5735                        | 0,12872***                                 | 0,0276***    | 0,20984***                                        | 1,374729                              | 8,807975      |
| Tierra <sup>2</sup>                           | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0,008945                                          | (-84,911)***                          | 14,54999      |
| Trabajo <sup>2</sup>                          | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | -0,099681                                         | -7,461878                             | (-0,0492)***  |
| Fertilizantes <sup>2</sup>                    | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0,01336***                                        | 0,3538563                             | (-0,00001)*** |
| Maquinaria <sup>2</sup>                       | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0,03656***                                        | -1,648577                             | -0,7354321    |
| Tierra*Trabajo                                | 0,21584                               | 0,0245723                                       | 26,23024***                               | (-7,9683)***                                | (-1594,944)                     | -                                          | -            | (-0,022)***                                       | 41,20967                              | 2,220996      |
| Tierra*Fertilizantes                          | 0,00012***                            | (-0,0332)***                                    | 1,09310***                                | (-0,0525)***                                | 2,53878                         | -                                          | -            | 0,052587                                          | 1,02229***                            | 0,009729*     |
| Tierra*Maquinaria                             | (-0,0391)***                          | 0,035372                                        | 10,74741                                  | 81,4351***                                  | 16346,94***                     | -                                          | -            | 0,012529                                          | 11,82213                              | 0,7294544     |
| Trabajo*Fertilizantes                         | 0,1719587                             | 0,01297                                         | 0,0686377                                 | 0,01742***                                  | 4,08138***                      | -                                          | -            | 0,002566                                          | 0,344339                              | 0,001091      |
| Trabajo*Maquinaria                            | -                                     | (-0,07148)**                                    | 2,720545                                  | (-8,00703)***                               | (-1215,691)                     | -                                          | -            | (-0,036)***                                       | 6,458284                              | 0,63910***    |
| Fertilizantes*Maqui.                          | -0,0092981                            | -0,002622                                       | (-0,47405)**                              | (-0,10203)***                               | (-34,7112)***                   | -                                          | -            | -0,00230                                          | (-1,03002)***                         | (-0,0109)***  |
| Theta ( $\Theta$ , Box-Cox)                   | 0,10440845                            | 0                                               | 0,5                                       | 0,5                                         | 1                               | -                                          | 0            | -                                                 | -                                     | -             |
| Lambda ( $\lambda$ , Box-Cox)                 | 0,2797122                             | 0                                               | 0,5                                       | 1                                           | 1                               | -                                          | 0            | -                                                 | -                                     | -             |
| Logaritmo natural de V                        | 0,65077***                            | (-1,6562)***                                    | 8,67406***                                | 8,66456***                                  | 20,57648***                     | 0,66490***                                 | (-1,78)***   | (-1,730)***                                       | 8,66267***                            | 8,65828***    |
| Logaritmo natural de U                        | (-5,0773)***                          | (-1,7475)***                                    | (-5,30543)                                | (-5,305384)                                 | (-5,48595)                      | (-5,169036)                                | (-0,60)***   | (-1,745)***                                       | -5,305431                             | -5,305433     |
| Desviación estándar de V ( $\sigma_v$ )       | 1,38457                               | 0,43688***                                      | 76,76480***                               | 76,11774***                                 | 29385,06***                     | 1,39438***                                 | 0,4105***    | 0,42099***                                        | 76,04575***                           | 74,8820***    |
| Desviación estándar de U ( $\sigma_u$ )       | 0,07897                               | 0,41737***                                      | 0,0704597                                 | 0,0704596                                   | 0,0643784                       | 0,0754324                                  | 0,7401***    | 0,41796***                                        | 0,0704596                             | 0,0704596     |
| Varianza del modelo $\sigma_s^2$              | 1,92326                               | 0,63506***                                      | 5849,211***                               | 5793,197***                                 | $8,63 \times 10^8$ ***          | 1,9499***                                  | 0,72***      | 0,35**                                            | 5783***                               | 5607***       |
| Parámetro de eficiencia ( $\gamma$ )          | 0,05704                               | 0,9553***                                       | 0,0009213                                 | 0,00093                                     | 0,0000022                       | 0,054                                      | 1,80***      | 0,993***                                          | 0,000926                              | 0,000941      |
| Logaritmo función de verosimilitud del modelo | -1155,13                              | -1337,165                                       | -3810,4517                                | -3807,000                                   | -7750,000                       | -1160,000                                  | -599         | -572,000                                          | -3806                                 | -3796         |
| Razón de verosimilitud ( $\gamma = 0$ )       | 0,00                                  | 35,40***                                        | 0                                         | 0                                           | 0                               | 0                                          | 24,44**      | 40,20**                                           | 0                                     | 0             |
| Eficiencia técnica (ET, promedio)             | 0,9399795                             | 0,705911                                        | 0,9461736                                 | 0,9461736                                   | 0,95                            | 0,94                                       | 0,61         | 0,71                                              | 0,95                                  | 0,95          |
| Wald                                          | 1845,59***                            | 1669,25                                         | 937,49***                                 | 953***                                      | 299***                          | 1811***                                    | 1540***      | 1787***                                           | 956***                                | 1006          |
| Akaike (AIC)                                  | 2334                                  | 1199                                            | 7647                                      | 7641                                        | 15526                           | 2334                                       | 1211         | 1178                                              | 7647                                  | 7627          |
| Scharwz (SIC)                                 | 2388                                  | 1258                                            | 7705                                      | 7699                                        | 15584                           | 2365                                       | 1243         | 1255                                              | 7724                                  | 7703          |
| Número de observaciones ( $n$ )               | 662                                   | 662                                             | 662                                       | 662                                         | 662                             | 662                                        | 662          | 662                                               | 662                                   | 662           |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

TABLA 4: Elasticidades y economías a escala de los medianos productores de café.

|                    | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogarítmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada |
|--------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|
| Variables Indep.   | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRC                             |
| Tierra             | 0,0023                                | 0,74                                            | 0,74                                      | 0,71                                        | 0,99                            |
| Trabajo            | 0,0016                                | 0,62                                            | 0,50                                      | 0,27                                        | -0,01                           |
| Fertilizantes      | -0,0003                               | -0,011                                          | 0,05                                      | 0,15                                        | 0,19                            |
| Maquinaria         | 0,0001                                | -0,003                                          | 0,03                                      | 0,13                                        | 0,25                            |
| Economías a escala | 0,0037                                | 1,346                                           | 1,32                                      | 1,26                                        | 1,42                            |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

|                    | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogarítmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática |
|--------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|------------|
| Variables Indep.   | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C          |
| Tierra             | 0,003                                      | 0,77         | 0,71***                                           | 12,46                                 | 39,40      |
| Trabajo            | 0,002                                      | 0,59         | 0,20***                                           | -1,16                                 | 0,12       |
| Fertilizantes      | 0                                          | 0,004        | 0,18***                                           | 21,44                                 | 40         |
| Maquinaria         | -0,0001                                    | -0,03        | 0,12***                                           | 0,11                                  | 0,04       |
| Economías a escala | 0,0049                                     | 1,334        | 1,21                                              | 32,85                                 | 79,56      |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

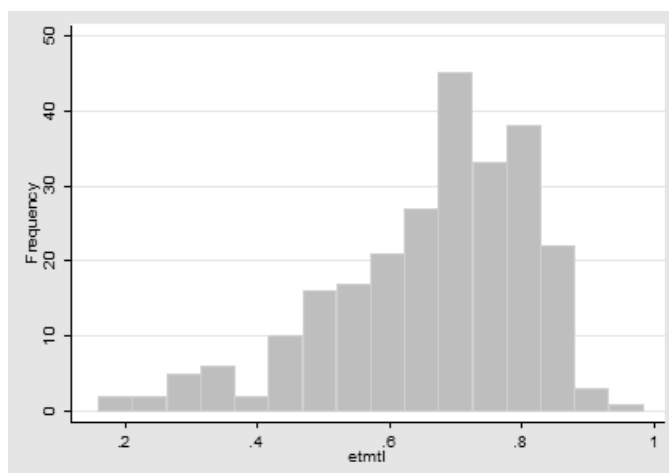


FIGURA 3: Eficiencia técnica de los medianos productores de café.

y maquinaria) en la producción del grano y su rendimiento. En este sentido, la elasticidad del factor trabajo lo revela como el insumo más importante (1 % de importancia) en las grandes unidades cafeteras. Esto refleja un incremento de 0,78 % en la producción del grano cuando la mano de obra aumenta 1 %, seguido por la intensidad de fertilizantes (1 % de importancia), aunque el rendimiento del cultivo disminuye 0,58 % por incrementar el factor en 1 %.

Sin embargo, la cantidad de maquinaria y tierra resultaron irrelevantes (no significativas en el 1 %, 5 % y 10 % de importancia) en el cultivo de los grandes caficultores. Este grupo exhibe rendimientos decrecientes a escala en su actividad

TABLA 5: FE de medianos productores de café.

|                                               | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogarítmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogarítmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática  |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------|
| Variables independientes                      | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRC                             | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C           |
| Constante                                     | 4.84***                               | 3.87***                                         | 85,10                                     | 109,28                                      | 82220,93                        | 3.93***                                    | 3.78***      | 3.59***                                           | -548,91                               | -307,27     |
| Tierra                                        | 0,32                                  | 0,63                                            | -50,22                                    | 32,12                                       | 10946,72                        | 1.29***                                    | 0.77***      | 1,06                                              | -304,73                               | 207.26***   |
| Trabajo                                       | 0,55                                  | 0.41**                                          | -4,81                                     | -0,48                                       | (-15280.77)***                  | 0.99***                                    | 0.59***      | 0,036                                             | (-13.19)***                           | 5,93        |
| Fertilizantes                                 | 0.09**                                | 0,03                                            | 3.46***                                   | 0.11***                                     | 103.90***                       | 0,006                                      | 0,004        | 0,33                                              | 0,04*                                 | 0.10***     |
| Maquinaria                                    | 0,09                                  | 0,05                                            | -59,44                                    | -10,63                                      | -16378,52                       | -0,04                                      | -0,03        | 0,21                                              | 73.53***                              | -37,02      |
| Tierra <sup>2</sup>                           | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | -0,61                                             | 409,53                                | (-25.37)*   |
| Trabajo <sup>2</sup>                          | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | -0,03                                             | (-71.81)*                             | (-0.10)***  |
| Fertilizantes <sup>2</sup>                    | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0,008                                             | 7.26***                               | -0,00000046 |
| Maquinaria <sup>2</sup>                       | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0.05***                                           | (-193.42)**                           | 2,36        |
| Tierra*Trabajo                                | 0,87                                  | 0,24                                            | 49.40**                                   | 4.18**                                      | 7314.82***                      | -                                          | -            | 0,25                                              | (-5.92)**                             | -0,005      |
| Tierra*Fertilizantes                          | (-0.14)*                              | (-0.1)***                                       | -1,68                                     | (-0.03)*                                    | -18,21                          | -                                          | -            | (-0.06)**                                         | 177.55***                             | 2.68***     |
| Tierra*Maquinaria                             | 0,04                                  | 0,04                                            | 138.83**                                  | 37.52**                                     | 4979,18                         | -                                          | -            | -0,02                                             | 55,40                                 | 8,44        |
| Trabajo*Fertilizantes                         | -0,06                                 | 0,03                                            | 0,13                                      | 0,0004                                      | -1,43                           | -                                          | -            | 0,008                                             | -0,29                                 | -0,0007     |
| Trabajo*Maquinaria                            | -                                     | -0,04                                           | 8,25                                      | 0,46                                        | 5105.52***                      | -                                          | -            | -0,004                                            | 31,49                                 | 0,7         |
| Fertilizantes*Maquinaria                      | -0,022                                | -0,012                                          | (-1.98)**                                 | (-0.024)***                                 | (-27.29)***                     | -                                          | -            | (-2.36)***                                        | 11.08**                               | 11.02***    |
| Theta ( $\Theta$ , Box-Cox)                   | 0,04                                  | 0                                               | 0,5                                       | 0,5                                         | 1                               | 0,04                                       | 0            | -                                                 | -                                     | -           |
| Lambda ( $\lambda$ , Box-Cox)                 | -0,03                                 | 0                                               | 0,5                                       | 1                                           | 1                               | -0,03                                      | 0            | -                                                 | -                                     | -           |
| Logaritmo natural de V                        | (-1.34)**                             | (-2.22)***                                      | 11.18***                                  | 11.15***                                    | 25***                           | (-1.28)***                                 | (-2.33)***   | (-2.36)***                                        | 11.08***                              | 11***       |
| Logaritmo natural de U                        | -0,14                                 | (-2.05)***                                      | -5,21                                     | -5,22                                       | -5,84                           | -0,14                                      | (-0.91)***   | (-1.05)***                                        | -5,22                                 | -5,22       |
| Desviación estándar de V ( $\sigma_v$ )       | 0.51***                               | 0.33***                                         | 268***                                    | 265***                                      | 281926*                         | 0.53***                                    | 0.31***      | 0.31***                                           | 254***                                | 245***      |
| Desviación estándar de U ( $\sigma_u$ )       | 0.93***                               | 0.36***                                         | 0,07                                      | 0,07                                        | 0,05                            | 0.93***                                    | 0.63***      | 0.60***                                           | 0,07                                  | 0,07        |
| Varianza del modelo $\sigma_a^2$              | 1.13***                               | 0.24***                                         | 71839***                                  | 70210***                                    | $795 \times 10^7$ ***           | 1.15***                                    | 0.50***      | 0.44***                                           | 64756***                              | 60024***    |
| Parámetro de eficiencia ( $\gamma$ )          | 1.82***                               | 1.09***                                         | 0,0003                                    | 0,003                                       | 0,0000002                       | 1.77***                                    | 2.03***      | 1.93***                                           | 0,0003                                | 0,0003      |
| Logaritmo función de verosimilitud del modelo | -283,00                               | -165                                            | -1753                                     | -1750                                       | -3492                           | -287                                       | -173         | -162                                              | -1740                                 | 1730        |
| Razón de verosimilitud ( $\gamma = 0$ )       | 10.85***                              | 23.17***                                        | 0                                         | 0                                           | 0                               | 10.70***                                   | 15.47***     | 11.50**                                           | 0                                     | 0           |
| Eficiencia técnica (ET, promedio)             | 0,55                                  | 0,74                                            | 0,94                                      | 0,94                                        | 0,96                            | 0,55                                       | 0,65         | 0,66                                              | 0,94                                  | 0,95        |
| Wald                                          | 325***                                | 371***                                          | 302                                       | 315***                                      | 383                             | 321***                                     | 324***       | 365***                                            | 363***                                | 411         |
| Akaike (AIC)                                  | 589                                   | 356                                             | 3531                                      | 3525                                        | 7010                            | 587                                        | 360          | 358                                               | 3513                                  | 3494        |
| Schwarz (SIC)                                 | 631                                   | 402                                             | 3576                                      | 3571                                        | 7056                            | 612                                        | 385          | 418                                               | 3573                                  | 3554        |
| Número de observaciones ( $n$ )               | 250                                   | 250                                             | 250                                       | 250                                         | 250                             | 250                                        | 250          | 250                                               | 250                                   | 250         |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

TABLA 6: Elasticidades y economías a escala de los grandes productores de café.

|                    | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogarítmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada |
|--------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|
| Variables Indep.   | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRC                             |
| Tierra             | -                                     | 0,01                                            | 0,41                                      | 0,11                                        | 0,04                            |
| Trabajo            | -                                     | 0,61                                            | 0,58                                      | 0,68                                        | 0,84                            |
| Fertilizantes      | -                                     | -1,12                                           | 0,06                                      | 0,14                                        | 0,15                            |
| Maquinaria         | -                                     | 0,14                                            | -0,02                                     | 0,04                                        | 0,14                            |
| Economías a escala | -                                     | -0,36                                           | 1,03                                      | 0,97                                        | 1,17                            |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

|                    | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogarítmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática |
|--------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|------------|
| Variables Indep.   | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C          |
| Tierra             | 0,0008                                     | 0,84         | 0,01                                              | -0,23                                 | -41,56     |
| Trabajo            | 0,002                                      | 0,07         | 0,78***                                           | 0,68                                  | 1,13       |
| Fertilizantes      | 0,0007                                     | 0,04         | (-0,58)***                                        | -10,73                                | -41,95     |
| Maquinaria         | -0,0001                                    | -0,009       | 0,05                                              | -0,03                                 | -0,07      |
| Economías a escala | 0,0034                                     | 0,941        | 0,26                                              | -10,31                                | -82,45     |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

productiva dado que aumentar simultáneamente en 1 % la tierra, el trabajo, los fertilizantes y la maquinaria incrementa la producción en 0,26 %.

Con base en el método de frontera estocástica, estimado mediante máxima verosimilitud, la tabla 7 presenta las estimaciones de las funciones en la tabla 1 para los grandes caficultores en la zona. Puede observarse que la forma funcional de producción cafetera afecta el valor del parámetro de eficiencia ( $\gamma$ ), del promedio de eficiencia técnica ( $ET$ ) y de las economías a escala (tabla 6), debido a sus diferentes resultados bajo cada frontera. Por consiguiente, la función Translogarítmica Minflex Laurent se ajusta a los grandes caficultores porque el valor del criterio Akaike (84) fue el menor, comparado con el de las otras funciones convencionales y flexibles. Asimismo, el parámetro de eficiencia ( $\gamma = 0.03$ ) y las varianzas ( $\sigma_v^2$  y  $\sigma_u^2$ ) no son determinantes (al 5 % y 1 % de importancia).

Lo anterior indica su eficiencia técnica ( $u_i$ ); igualmente, lo evidencia el promedio de eficiencia técnica ubicado en 100 %. Esto significa que este grupo opera con eficiencia técnica, aunque no aleatoria ( $v_i$ ). Esta última tiene efectos negativos sobre la producción del grano de los grandes cafeteros; en otras palabras, si aumentan 1 %, en promedio su producción disminuye 2,20 % anualmente.

A partir de la función de producción Translogarítmica Minflex Laurent fue obtenido el nivel de eficiencia técnica ( $ET_i$ ), de acuerdo con la ecuación (3), para cada grande caficultor. Su distribución puede apreciarse en la figura 4, donde se observa que todos los grandes productores logran el máximo de eficiencia técnica del 100 %. Nuevamente, determina la ausencia de ineficiencia técnica en este grupo.

Una vez estimada las funciones de producción por tamaño de caficultor, son agrupadas las tres muestras para obtener los resultados del sector general. Así, la tabla 8 presenta sus elasticidades y economías a escala derivadas de la función ajustada Translogarítmica Minflex Laurent (tabla 9), calculadas con el fin de en-

TABLA 7: FE de grandes productores de café.

|                                               | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogarítmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogarítmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática  |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------|
| Variables independientes                      | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRC                             | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C           |
| Constante                                     | 16.37***                              | 7.01***                                         | 1477.98                                   | 622.99                                      | 900683.5                        | 16.51**                                    | 5.44***      | 6.80***                                           | 2073.55                               | 718.13      |
| Tierra                                        | (-1.01)**                             | (-2.36)**                                       | (-686.80)***                              | (-102.53)***                                | (-985550)***                    | 0.41***                                    | 0.84***      | (-1.21)*                                          | 65.30                                 | (-134.12)** |
| Trabajo                                       | 0.57***                               | 0.68*                                           | 50.36                                     | 22.37***                                    | 85226.89**                      | 0.31***                                    | 0.07*        | -0.06                                             | 32.52***                              | 27.47***    |
| Fertilizantes                                 | 0.009**                               | -0.17                                           | 3.36                                      | 0.08***                                     | 477.83*                         | 0.0067***                                  | 0.04**       | 0.002                                             | 0.15**                                | 0.05        |
| Maquinaria                                    | 0.46                                  | 1.15***                                         | 73                                        | -9.91                                       | -78787.93                       | -0.10                                      | -0.009       | 0.66*                                             | -71.48                                | -19.80      |
| Tierra <sup>2</sup>                           | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | -0.30                                             | (-1026.97)**                          | 2.11        |
| Trabajo <sup>2</sup>                          | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0.06***                                           | 147.15                                | 0.07***     |
| Fertilizantes <sup>2</sup>                    | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0.009                                             | 3.33                                  | 0.0000029   |
| Maquinaria <sup>2</sup>                       | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | -0.0008                                           | 1.45                                  | -0.0009     |
| Tierra*Trabajo                                | -0.00022                              | 0.62***                                         | 57.57***                                  | 0.007                                       | 7801.62***                      | -                                          | -            | 0.37***                                           | 1.45                                  | -0.0009     |
| Tierra*Fertilizantes                          | 0.0011                                | 0.02                                            | -0.53                                     | 0.004**                                     | 25.56*                          | -                                          | -            | 0.0006                                            | -6.52                                 | (-0.78)**   |
| Tierra*Maquinaria                             | 0.44***                               | 1.09***                                         | 256.9***                                  | 26.75***                                    | 116396.3**                      | -                                          | -            | 0.28**                                            | 640.04***                             | 19.70***    |
| Trabajo*Fertilizantes                         | (-0.08)***                            | 0.07***                                         | 0.60                                      | 0.0003                                      | (-5.96)***                      | -                                          | -            | 0.01                                              | -1.30                                 | 0.0005***   |
| Trabajo*Maquinaria                            | 0                                     | (-1.24)***                                      | (-58.79)***                               | (-1.26)***                                  | (-7092.53)***                   | -                                          | -            | (-0.36)****                                       | (-160.46)***                          | (-1.78)***  |
| Fertilizantes*Maquinaria                      | (-0.004)*                             | 0.043                                           | -3.04                                     | (-0.021)***                                 | -44.84                          | -                                          | -            | 0.02                                              | -6.70                                 | (-0.001)*** |
| Theta ( $\Theta$ , Box-Cox)                   | 0.04                                  | 0                                               | 0.5                                       | 0.5                                         | 1                               | 0.04                                       | 0            | -                                                 | -                                     | -           |
| Lambda ( $\lambda$ , Box-Cox)                 | -0.03                                 | 0                                               | 0.5                                       | 1                                           | 1                               | -0.03                                      | 0            | -                                                 | -                                     | -           |
| Logaritmo natural de V                        | 2.40***                               | (-2.07)***                                      | 14.06***                                  | 13.84***                                    | 32***                           | 2.70***                                    | (-1.92)***   | (-2.20)***                                        | 13.86***                              | 13.50***    |
| Logaritmo natural de U                        | -5.49                                 | -9.18                                           | -5.17                                     | -5.21                                       | (-5.12)                         | -5.48                                      | -0.61        | -9.29                                             | -5.21                                 | -5.22       |
| Desviación estándar de V ( $\sigma_v$ )       | 3.31***                               | 0.35***                                         | 1134.32***                                | 1010.24***                                  | 8876673***                      | 3.87***                                    | 0.38***      | 0.33***                                           | 1022.50***                            | 853.19**    |
| Desviación estándar de U ( $\sigma_u$ )       | 0.06                                  | 0.01                                            | 0.08                                      | 0.07                                        | 0.08                            | 0.06                                       | 0.73         | 0.01                                              | 0.07                                  | 0.07        |
| Varianza del modelo $\sigma_s^2$              | 11***                                 | 0.13***                                         | 1286673***                                | 1020588***                                  | 8.8E+12                         | 14.95***                                   | 0.68***      | 0.11***                                           | 1045503***                            | 727926***   |
| Parámetro de eficiencia ( $\gamma$ )          | 0.02                                  | 0.03                                            | 0.000067                                  | 0.000073                                    | 8.69E-08                        | 0.02                                       | 1.92**       | 0.03                                              | 0.00007                               | 0.00009     |
| Logaritmo función de verosimilitud del modelo | -204.00                               | -30                                             | -659                                      | -650                                        | -1359                           | -216                                       | -67          | -25                                               | -651                                  | -637        |
| Razón de verosimilitud ( $\gamma = 0$ )       | 0                                     | 0                                               | 0                                         | 0                                           | 0                               | 0                                          | 0            | 0                                                 | 0                                     | 0           |
| Eficiencia técnica (ET, promedio)             | 0.95                                  | 0.96                                            | 0.94                                      | 0.94                                        | 0.94                            | 0.95                                       | 0.61         | 0.99                                              | 0.94                                  | 0.94        |
| Wald                                          | 461***                                | 404**                                           | 715***                                    | 921                                         | 1109***                         | 319***                                     | 105***       | 470***                                            | 897***                                | 1323***     |
| Akaike (AIC)                                  | 432                                   | 86                                              | 1345                                      | 1327                                        | 2741                            | 446                                        | 149          | 84                                                | 1336                                  | 1308        |
| Schwarz (SIC)                                 | 461                                   | 116                                             | 1375                                      | 1357                                        | 2769                            | 463                                        | 165          | 124                                               | 1376                                  | 1348        |
| Número de observaciones ( $n$ )               | 78                                    | 78                                              | 78                                        | 78                                          | 78                              | 78                                         | 78           | 78                                                | 78                                    | 78          |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

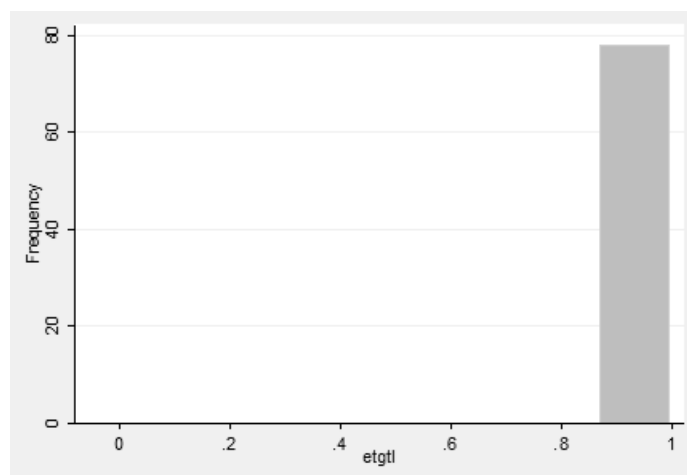


FIGURA 4: Eficiencia técnica de los grandes productores de café.

TABLA 8: Elasticidades y economías a escala del sector general de productores de café.

|                                                                                               | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogarítmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|
| Variables Indep.                                                                              | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRC                             |
| Tierra                                                                                        | 0,004                                 | 0,88                                            | 0,46                                      | 0,11                                        | -4,53                           |
| Trabajo                                                                                       | -0,002                                | 0,41                                            | 0,57                                      | 0,72                                        | 4,14                            |
| Fertilizantes                                                                                 | -0,005                                | -0,004                                          | 0,12                                      | 0,24                                        | 1,98                            |
| Maquinaria                                                                                    | 0,002                                 | 0,02                                            | 0,04                                      | 0,05                                        | -0,24                           |
| Economías a escala                                                                            | -0,001                                | 1,306                                           | 1,19                                      | 1,12                                        | 1,35                            |
| Indica relevancia estadística en los niveles del (*) 10 %, (**) 5 % y (***) 1 % de anualmente |                                       |                                                 |                                           |                                             |                                 |

|                    | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogarítmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática |
|--------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|------------|
| Variables Indep.   | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C          |
| Tierra             | 0,004                                      | 0,91         | 0,69***                                           | 5,97                                  | 1,21       |
| Trabajo            | 0,002                                      | 0,30         | 0,41***                                           | -0,43                                 | 0,57       |
| Fertilizantes      | 0,0004                                     | 0,03         | 0,26***                                           | -3,68                                 | 0,84       |
| Maquinaria         | 0,0002                                     | 0,02         | 0,11                                              | 0,09                                  | 0,1        |
| Economías a escala | 0,0066                                     | 1,26         | 1,47                                              | 1,95                                  | 2,72       |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de anualmente

tender apropiadamente la incidencia de los principales insumos empleados (tierra, trabajo, fertilizantes y maquinaria) en la producción del grano y su rendimiento.

En este sentido, la elasticidad del factor tierra lo revela como el insumo más importante (1 % de importancia) en el sector general cafetero, lo cual refleja un incremento de 0,69 % en la producción del grano cuando las hectáreas cultivadas de café aumentan 1 %, seguido por la intensidad de trabajo y fertilizantes (relevantes al 1 % de importancia), porque ampliando su uso parcialmente en 1 % la producción crece 0,41 % y 0,26 % respectivamente.

La cantidad de maquinaria resultó irrelevante (no significativa en el 1 %, 5 % y 10 % de importancia) en el cultivo del sector general. Este grupo exhibe rendimientos crecientes a escala en su actividad productiva, dado que aumentar simultáneamente en 1 % la tierra, el trabajo, los fertilizantes y la maquinaria incrementa la producción en 1,47 %.

Con base en el método de frontera estocástica, estimado mediante máxima verosimilitud, la tabla 9 presenta las estimaciones de las funciones en la tabla 1 para el sector general de caficultores en la zona, donde puede observarse que la forma funcional de producción cafetera afecta el valor y la relevancia estadística del parámetro de eficiencia ( $\gamma$ ), del promedio de eficiencia técnica ( $ET$ ) y de las economías a escala (tabla 8), debido a sus diferentes resultados bajo cada frontera.

Por consiguiente, la función Translogarítmica Minflex Laurent se ajusta al sector general de caficultores porque el valor del criterio Akaike (1.625) fue el menor, comparado con el de las otras funciones convencionales y flexibles. Asimismo, el parámetro de eficiencia ( $\gamma = 0.99$ ) y las varianzas ( $\sigma_v^2$  y  $\sigma_u^2$ ) son determinantes (al 5 % y 1 % de importancia).

Lo anterior indica ineficiencia técnica ( $u_i$ ) y aleatoria ( $v_i$ ) con efectos negativos sobre la producción del grano. En otras palabras, si  $u_i$  y  $v_i$  aumentan individualmente 1 %, en promedio la producción disminuye anualmente 1,87 % y 1,85 % respectivamente. Igualmente, lo muestra el promedio de eficiencia técnica (72 %) logrado por este grupo de cultivadores de café, inferior al 100 %.

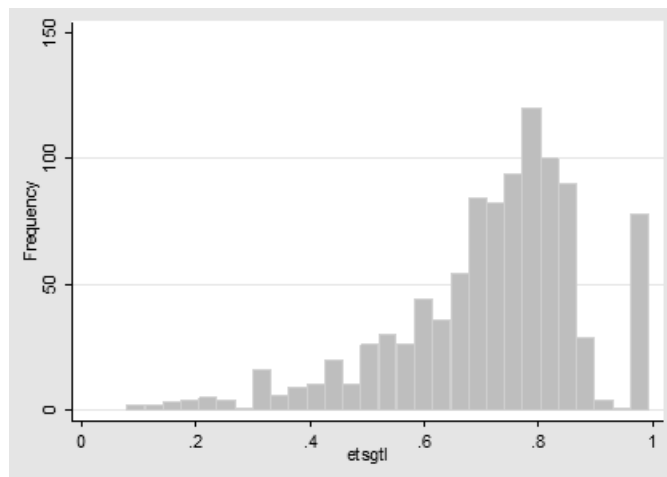


FIGURA 5: Eficiencia técnica del sector general de productores de café.

El nivel de eficiencia técnica ( $ET_i$ ) del sector general puede apreciarse en la figura 5, obtenido agrupando este valor de los resultados expuestos para cada unidad productiva analizada, con el objetivo de no sobrestimar o subestimar esta medida, dada la heterogeneidad de producción en cada rango de tamaño cafetero. También porque no son directamente comparables la eficiencia técnica del pequeño

TABLA 9: FE del sector general de productores de café.

|                                                       | Cuadrática<br>generalizada<br>Box-Cox | Translogaritmica<br>(Translog desde<br>Box-Cox) | Leontief<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática<br>generalizada<br>desde Box-Cox | Cuadrática,<br>raíz<br>cuadrada | Elasticidad de<br>sustitución<br>constante | Cobb-Douglas | Translogaritmica<br>(Minflex Laurent<br>Translog) | Leontief<br>generalizada<br>(Diewert) | Cuadrática   |
|-------------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------|--------------|
| Variables independientes                              | CGBC                                  | TLBC                                            | LGBC                                      | CGBC                                        | CRG                             | ESC                                        | CD           | TLML                                              | LG                                    | C            |
| Constante                                             | 5.14***                               | 4.14***                                         | -107,87                                   | -43,99                                      | (-457418.2)***                  | 4.69***                                    | 4.36***      | 3.80***                                           | 36,07                                 | -95,70       |
| Tierra                                                | 1.61***                               | 0.99***                                         | (-106.32)***                              | -3,35                                       | (-576025.4)***                  | 1.65***                                    | 0.91***      | 0.79***                                           | (-102)***                             | 42.99***     |
| Trabajo                                               | 0.81***                               | 0.43***                                         | 39.19***                                  | 16.54***                                    | 53213.72***                     | 0.68***                                    | 0.30***      | 0.02***                                           | 15.41***                              | 13.83***     |
| Fertilizantes                                         | 0.05***                               | 0,02                                            | 1.93***                                   | 0.008***                                    | 339.91***                       | 0.05***                                    | 0.03***      | 0.27***                                           | 0.12***                               | 0.03***      |
| Maquinaria                                            | 0.36***                               | 0.17***                                         | 72.14***                                  | 10,58                                       | -25891.59                       | 0.07**                                     | 0.02***      | 0.22***                                           | 39.14**                               | 14,99        |
| Tierra <sup>2</sup>                                   | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | (-0.10)***                                        | (-149.44)***                          | (-2.75)***   |
| Trabajo <sup>2</sup>                                  | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0.10***                                           | 7,33                                  | 0.02***      |
| Fertilizantes <sup>2</sup>                            | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0.01***                                           | 1.37***                               | 0.0000042*** |
| Maquinaria <sup>2</sup>                               | -                                     | -                                               | -                                         | -                                           | -                               | -                                          | -            | 0.03***                                           | -0,59                                 | 1,21         |
| Tierra*Trabajo                                        | 0,04                                  | (-0.08)**                                       | 48.16***                                  | 0,05                                        | 8163.86***                      | -                                          | -            | (-0.02)***                                        | 97.93***                              | 0,08         |
| Tierra*Fertilizantes                                  | (-0.02)*                              | (-0.02)**                                       | (-0.59)*                                  | 0.00085*                                    | 14.74***                        | -                                          | -            | -0.00009                                          | 0,82                                  | 0.002**      |
| Tierra*Maquinaria                                     | 0.18***                               | 0.08***                                         | 106.41***                                 | 18.80***                                    | 80672.76***                     | -                                          | -            | 0,01                                              | 255.14***                             | 10.51***     |
| Trabajo*Fertilizantes                                 | (-0.22)***                            | 0,01                                            | 0,15                                      | 0.000183*                                   | (-5.57)***                      | -                                          | -            | -0.001                                            | (-1.61)***                            | 0.00006      |
| Trabajo*Maquinaria                                    | -                                     | (-0.14)***                                      | (-27.56)***                               | (-0.92)***                                  | (-5574.9)***                    | -                                          | -            | (-0.05)***                                        | (-2.52)***                            | (-0.01)***   |
| Fertilizantes*Maquinaria                              | -0,003                                | -0,002                                          | (-0.94)**                                 | (-0.01)***                                  | -14,52                          | -                                          | -            | -0,002                                            | (-2.52)***                            | (-0.01)***   |
| Theta ( $\Theta$ , Box-Cox)                           | 0.08***                               | 0                                               | 0,5                                       | 0,5                                         | 1                               | 0.08***                                    | 0            | -                                                 | -                                     | -            |
| Lambda ( $\lambda$ , Box-Cox)                         | 0.15***                               | 0                                               | 0,5                                       | 1                                           | 1                               | 0.15***                                    | 0            | -                                                 | -                                     | -            |
| Logaritmo natural de V                                | 0,12                                  | (-1.80)***                                      | 11.86***                                  | 11.71**                                     | 29.54***                        | 0.43***                                    | (-1.61)***   | (-1.85)***                                        | 11.72***                              | 11.47***     |
| Logaritmo natural de U                                | 0,03                                  | (-0.72)***                                      | -5,30                                     | -5,30                                       | -5,12                           | -7,63                                      | (-0.79)***   | (-1.87)***                                        | -5,21                                 | -5,21        |
| Desviación estándar<br>de V ( $\sigma_v$ )            | 1,06                                  | 0.41***                                         | 377***                                    | 350***                                      | 2598910***                      | 1.24***                                    | 0.45***      | 0.40***                                           | 350***                                | 310***       |
| Desviación estándar<br>de U ( $\sigma_u$ )            | 0,03                                  | (-0.72)***                                      | -5,31                                     | -5,31                                       | -5,13                           | -7,63                                      | (-0.80)***   | (-1.88)***                                        | -5,21                                 | -522         |
| Varianza del modelo<br>$\sigma_\varepsilon^2$         | 2,15                                  | 0.65***                                         | 141864.5***                               | 122352***                                   | 47500000000                     | 1.54***                                    | 0.65***      | 0.31***                                           | 122422.7***                           | 96126.67***  |
| Parámetro de eficien-<br>cia ( $\gamma$ )             | 0,96                                  | 1.72***                                         | 0,0002                                    | 0,0002                                      | 0,00000003                      | 0,02                                       | 1.50***      | 0.99***                                           | 0,002                                 | 0,0002       |
| Logaritmo función de<br>verosimilitud del mo-<br>delo | -1603                                 | -860                                            | -7277                                     | -7204                                       | -16028                          | -1617                                      | -897         | -795                                              | -7203                                 | -7084        |
| Razón de verosimili-<br>tud ( $\gamma = 0$ )          | 3.59***                               | 33.31***                                        | 0                                         | 0                                           | 0                               | 0                                          | 24***        | 65***                                             | 0                                     | 0            |
| Eficiencia técnica<br>(ET, promedio)                  | 0,52                                  | 0,62                                            | 0,95                                      | 0,95                                        | 0,94                            | 0,98                                       | 0,63         | 0,72                                              | 0,94                                  | 0,94         |
| Wald                                                  | 6545***                               | 5416***                                         | 10906***                                  | 12803***                                    | 14221***                        | 6379***                                    | 4592***      | 0.06***                                           | 12796***                              | 16566***     |
| Akaike (AIC)                                          | 3232                                  | 1727                                            | 14579                                     | 14433                                       | 32079                           | 3249                                       | 1807         | 1625                                              | 14442                                 | 14202        |
| Schwarz (SIC)                                         | 3291                                  | 1791                                            | 14643                                     | 14497                                       | 32138                           | 3283                                       | 1841         | 1708                                              | 14525                                 | 14285        |
| Número de observa-<br>ciones ( $n$ )                  | 990                                   | 990                                             | 990                                       | 990                                         | 990                             | 990                                        | 990          | 990                                               | 990                                   | 990          |

Indica relevancia estadística en los niveles del (\*) 10 %, (\*\*) 5 % y (\*\*\*) 1 % de importancia

con la de un grande o mediano caficultor, debido a las amplias diferencias en sus condiciones tecnológicas en el cultivo del grano.

En la figura 5 se observa sesgo negativo, implicando que la mayor parte de los caficultores está ubicadas por encima del promedio (72 %) y por debajo del 80 % de *ET*. Esto indica ineficiencia técnica para el sector cafetero en la zona de estudio colombiana; únicamente entre 50 y 80 productores son eficientes técnicamente por alcanzar el 100 % de *ET*.

## 5. Conclusiones y sugerencias

De acuerdo con el objetivo planteado y los resultados obtenidos en la sección anterior, mediante frontera estocástica, se presentan las principales conclusiones y sugerencias del caso para pequeños, medianos y grandes productores de café ubicados en la zona cafetera colombiana (Caldas, Quindío y Risaralda). Este estudio determinó la función de producción cafetera, las economías a escala y la eficiencia técnica por tipo de productor.

En este sentido, y con información estadística microeconómica sobre el cultivo, recolectada en 2004 en 999 fincas cafeteras, pudo establecerse una función de producción cafetera flexible Translog minflex Laurent para pequeños, medianos y grandes cultivadores del grano, determinada mediante frontera estocástica, empleando los resultados del criterio Akaike en las estimaciones de máxima verosimilitud y mínimos cuadrados ordinarios, una vez estimadas las distintas funciones de producción cafeteras convencionales y flexibles en la tabla 1.

La metodología de frontera estocástica exige previamente una función de producción adecuada o correctamente especificada para evaluar y estimar las economías a escala y la eficiencia técnica en determinada actividad (en este caso el cultivo de café), porque el parámetro de eficiencia ( $\gamma$ ) y los estimadores del modelo son susceptibles a la forma funcional, como se apreció en las tablas 2, 4, 6 y 8.

De acuerdo con Greene (2002, p. 104), es incorrecto en funciones como la Translogarítmica Minflex Laurent analizar la relevancia de los estimadores, interpretar sus resultados directamente e inferir algún tipo de afirmación sobre si el comportamiento y la intensidad de los insumos cafeteros son complementarios, sustitutos o exhiben productividad marginal decreciente según los signos (negativos o positivos) parciales de los parámetros en los términos cuadráticos y las interacciones del modelo estimado.

Por tanto, deben calcularse las elasticidades y las economías a escala derivadas de la función ajustada (Translogarítmica Minflex Laurent), como fueron presentadas en las tablas 1, 3, 5 y 7 con el fin de entender apropiadamente la incidencia de los principales insumos empleados (tierra, trabajo, fertilizantes y maquinaria) en la producción del grano y su rendimiento por unidad productiva cafetera.

Con los valores encontrados de las elasticidades y economías a escala puede concluirse que el factor tierra es el insumo más importante para desarrollar la actividad ejercida por los pequeños cultivadores, seguido por la intensidad de fertilizantes y maquinaria. La cantidad de trabajo, aunque es relevante, mantiene

una relación inversa con la producción, dado que este grupo genera gran parte de mano de obra consumida en las explotaciones cafeteras campesinas y empresariales, y sus hectáreas cultivadas son de poca extensión. Esta situación no les obliga a demandar jornaleros, sustituidos por el trabajo propio de los minifundistas propietarios.

Igualmente, este grupo de caficultores exhibe rendimientos crecientes a escala en su actividad productiva, aunque son ineficientes técnicamente. Así, el cultivo del grano para ellos es afectado negativamente por la ineficiencia aleatoria y técnica, con 20 % en promedio por mejorar en esta última. Esto indica que no están asignando ni empleando adecuadamente los principales insumos en el área productiva en café, mano de obra, cantidad de químicos y maquinaria, los cuales pueden controlar para no incurrir en costos más altos de producción, baja productividad y competitividad en el sector. Lo anterior también sucede en las explotaciones cafeteras campesinas o medianas, y en el sector general, pero con un 30 % promedio de eficiencia técnica a mejorar.

El caso contrario ocurre en las grandes unidades cafeteras o empresariales, las cuales exhiben rendimientos decrecientes a escala, eficiencia técnica e ineficiencia estocástica. Esta última, señala existencia de factores externos no controlables por este grupo de cafeteros que afectan negativamente el desempeño adecuado de su producción; igualmente sucede en la actividad de los pequeños, medianos y sector general cafetero.

Entre estos factores pueden resaltarse los climáticos, el control de plagas en fincas vecinas, las medidas institucionales (adoptadas por el gobierno, la Federación Nacional de Cafeteros en Colombia y los organismos internacionales de café) la incertidumbre de la producción internacional de café y la volatilidad de los precios externos del grano. Los resultados señalaron también que la cantidad de mano de obra es el factor más importante para las explotaciones empresariales, dado que este grupo necesita la mayor proporción laboral ofrecida en el sector, porque su gran extensión en las hectáreas cultivadas de café obliga a demandar el trabajo requerido para atender la producción. Por esta razón, el factor tierra no es significativo para ellos y se le resta importancia en el análisis de la actividad. Por consiguiente, los resultados obtenidos en este estudio ayudan a entender cuáles deberían ser las políticas orientadas al aumento de productividad y competitividad del cultivo en la región cafetera de Colombia.

Las instituciones encargadas de prestar asesoría de eficiencia técnica a los productores de café en Colombia deben fortalecerse y apoyar principalmente a los pequeños y medianos productores, porque a que estos grupos son la mayor parte de caficultores del país y constituyen los sectores más vulnerables a cambios estructurales del mercado internacional por la ineficiencia técnica y estocástica presentada en su actividad.

Para los pequeños y medianos caficultores se requiere incentivar el acceso a tierras productivas en café; y para los empresariales, desincentivar el uso de químicos y promover la mano de obra. Los resultados encontrados son importantes para formulación de políticas cafeteras en Colombia. Así, las entidades encargadas de orientarlas pueden continuar recolectando este tipo de información microeconómica.

co, en el tiempo por unidad de producción y continuar con este tipo de estudios bajo distintas metodológicas analíticas que lleven a deducciones cuantitativas para implementar y fortalecer la política cafetera colombiana.

## Agradecimientos

Agradecemos al profesor Andrés L. Medaglia (profesor asociado al Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Los Andes) por los comentarios brindados a nuestro trabajo. Igualmente a los cuatro árbitros que con su trabajo voluntario, cuidadoso y observaciones constructivas contribuyeron a mejorar significativamente el resultado final del presente artículo. Finalmente a Tania Paola Barraza González (Matemática de la Universidad del Atlántico, Barranquilla) por realizar voluntariamente la edición final del documento en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

[Recibido: agosto de 2010 — Aceptado: abril de 2011]

## Referencias

- Aigner, D., Lovell, C. & Schmidt, P. (1977), 'Formulation and estimation of stochastic frontier production model', *Journal of Econometrics* **6**, 21–37.
- Banco Mundial (2002), 'Estudio del sector cafetero en Colombia: resumen ejecutivo', *Ensayos sobre Economía Cafetera* **15**(18), 27–32.
- Battese, G. & Broca, S. (1991), 'Functional forms of stochastic frontier production functions and models for technical inefficiency effects: A comparative study for wheat farmers in Pakistan', *Journal of Productivity Analysis* **8**, 395–414.
- Battese, G. & Coelli, T. (1988), 'Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalized frontier production function and panel data', *Journal of Econometrics*, **38**(3), 387–399.
- Behr, A. & Tente, S. (2008), 'Stochastic frontier analysis by means of maximum likelihood and the method of moments', *Banking and Financial Studies* (19).  
\*<http://econpapers.repec.org/RePEc:zbw:bubdp2:200819>
- Cárdenas, G., Vedenov, D. & Houston, J. (2008), Analysis of production efficiency of Mexican coffee-producing districts, Technical report, American Agricultural Economics Association.  
\*<http://ageconsearch.umn.edu/handle/19470>
- Chiang, A. (1984), *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3 edn, McGraw-Hill, New York.
- Coelli, T. (1995), 'Estimators and hypothesis test for a stochastic frontier function: a Monte Carlo analysis', *Journal of Productivity Analysis* **6**(4), 247–268.

- Coelli, T. J. & Fleming, E. M. (2003), Diversification economies and specialisation efficiencies in a mixed food and coffee smallholder farming system in Papua New Guinea, Technical report, International Association of Agricultural Economists.  
\*<http://ideas.repec.org/p/ags/iaae03/25841.html>
- Diewert, W. E. (1974), Applications of duality theory, in M. D. Intriligator & D. A. Kendrick, eds, 'Frontiers of Quantitative Economics', Vol. II, Amsterdam, North-Holland, pp. 106–171.
- Donnell, C. & Griffiths, W. (2006), 'Estimating state-contingent production frontiers', *American Journal of Agricultural Economics* **88**(1), 249–266.
- García, J. & Ramírez, J. (2002), 'Sostenibilidad económica de las pequeñas explotaciones cafeteras colombianas', *Ensayos sobre Economía Cafetera* **15**(18), 73–89.
- Greene, W. (1998), *Análisis Econométrico*, 3 edn, Prentice Hall, New York.
- Greene, W. (2002), *Econometric Analysis*, 5 edn, Prentice Hall, New York.
- Guhl, A. (2004), 'Café y cambio de paisaje en la zona cafetera colombiana', *Ensayos sobre Economía Cafetera* (20), 137–153.
- Joachim, B., Kalilou, S., Ibrahim, D. & Gwendoline, N. (2003), 'Factors affecting technical efficiency among coffee farmers in Côte D'Ivoire: Evidence from the centre west region', *African Development Review* **15**, 1–66.
- Konstantinos, G., Kien, T. & Vangelis, T. (2003), 'On the choice of functional form in stochastic frontier modeling', *Empirical Economics* **28**, 75–100.
- Kumbhakar, S. (1993), 'Short-Run Returns to Scale, Farm-Size, and Economic Efficiency', *Journal Review of Economics and Statistics* **75**, 336–341.
- Lohr, L. & Park, T. (2006), 'Technical efficiency of U.S. organic farmers: The complementary roles of soil management techniques and farm experience', *Agricultural and Resource Economics Review* **35**, 327–338.
- Meesen, W. & Van den Broeck, J. (1977), 'Efficiency estimation from Cobb Douglas production functions with composed error', *International Economic Review* **18**, 435–444.
- Mendieta, J. & Perdomo, J. (2008), *Fundamentos de Economía del Transporte: Teoría, Metodología y Análisis de Política*, 1 edn, Ediciones Uniandes, Bogotá, Colombia.
- Mosheim, R. (2002), 'Organizational type and efficiency in the Costa Rican coffee processing sector', *Journal of Comparative Economics* **30**, 296–316.
- Nicholson, W. (2002), *Microeconomic Theory*, South-Western Thomson Learning, United States.

- Ornelas, F., Shumway, R. & Ozuna, T. (1994), 'Using quadratic Box-Cox for flexible functional form selection and unconditional variance computation', *Empirical Economics* **19**, 639–645.
- Perdomo, J. (2006), Estimación de funciones de producción y eficiencia técnica en el eje cafetero colombiano: una aplicación con fronteras estocásticas vs DEA, Tesis de maestría, Universidad de los Andes, Facultad de Economía, Bogotá, Colombia.
- Perdomo, J. (2010), 'Una propuesta metodológica para estimar los cambios sobre el valor de la propiedad: estudio de caso para Bogotá aplicando *propensity score matching* y precios hedónicos espaciales', *Lecturas de Economía* **73**, 49–65.
- Perdomo, J. (2011), 'A methodological proposal to estimate changes of residential property value: Case study developed in Bogota', *Applied Economics Letters* **18**(7), 605–610.
- Perdomo, J. & Hueth, D. (2010), Funciones de producción y eficiencia técnica en el eje cafetero colombiano: una aproximación con frontera estocástica, Technical report, Universidad de los Andes.  
\*<http://ideas.repec.org/p/col/000089/007606.html>
- Perdomo, J., Hueth, D. & Mendieta, J. (2007), 'Factores que afectan la eficiencia técnica en el sector cafetero de colombiano: una aplicación con análisis envolvente de datos', *Ensayos sobre Economía Cafetera* **22**, 121–140.
- Perdomo, J. & Mendieta, J. (2007), 'Factores que afectan la eficiencia técnica y asignativa en el sector cafetero de colombiano: una aplicación con análisis envolvente de datos', *Revista Desarrollo y Sociedad* **60**, 1–45.
- Ramírez, L., Silva, G., Valenzuela, L., Villegas, A. & Villegas, L. (2002), 'Comisión de ajuste de la institucionalidad cafetera', *Ensayos sobre Economía Cafetera* (17).
- Reinhard, S., Lovell, K. & G., T. (1999), 'Econometric estimation of technical and environmental efficiency: An application to Dutch dairy farms', *American Journal in Agriculture* **81**, 44–60.
- Rios, A. R. & Shively, G. E. (2005), Farm size and nonparametric efficiency measurements for coffee farms in Vietnam, Technical report, American Agricultural Economics Association.  
\*<http://ideas.repec.org/p/ags/aaea05/19159.html>
- Rosales, R., Perdomo, J., Morales, C. & Urrego, A. (2010), *Fundamentos de Econometría Intermedia: Teoría y Aplicaciones*, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Saravia, S. (2007), A Stochastic Frontier Model of the Nicaraguan Coffee Sector: Analyzing Efficiency and Performance Under Changing Political Environment, II International Symposium on Economic Theory, Policy and Application, Athens, Greece.

Thanda, K. & Matthias von, O. (1999), Stochastic Frontier Production Function and Technical Efficiency Estimation: A Case Study on Irrigated Rice in Myanmar, Deutscher Tropentag, Berlin.

Wollni, M. (2007), Productive and Efficiency of Specialty and Conventional Coffee Farmers in Costa Rica: Accounting for the Use of Different Technologies and Self-Selection, Technical report, Department of Applied Economics and Management.

\*<http://ageconsearch.umn.edu/handle/9956>

## Apéndice

### Varianza de los estimadores mediante máxima verosimilitud en la frontera estocástica

De acuerdo con Behr & Tente (2008, 19-20), Greene (1998, 2002), la ecuación (2) y características del componente estocástico ( $\eta_i = v_i + u_i$ ), la varianza de los estimadores mediante máxima verosimilitud en la frontera estocástica está determinada por las condiciones de primer orden en el logaritmo de la función de verosimilitud ( $\ln f$ ) de la siguiente manera:

$$\ln f(\sigma_s^2, \hat{\beta}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma_s^2) + \sum_{i=1}^n \ln[1 - \varphi(z_i)] - \frac{n}{2\sigma_s^2} \sum_{i=1}^n \left[ q_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) \right]^2$$

$$\frac{\partial \ln f(\sigma_s^2, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = \frac{n}{\sigma_s^2} \sum_{i=1}^n \left[ q_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) \right] x_i + \frac{\gamma}{\sigma_s} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\varphi^*}{1 - \varphi(z_i)} \right) x_i,$$

$$\varphi^* = \ln[1 - \varphi(z_i)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(\sigma_s^2, \hat{\beta})}{\partial \sigma_s^2} &= -\frac{n}{\sigma_s^2} + \frac{1}{2\sigma_s^4} \sum_{i=1}^n \left[ q_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma_s^3} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\varphi^*}{1 - \varphi(z_i)} \right) \left[ q_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln f(\sigma_s^2, \hat{\beta})}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{2\sigma_s^4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\varphi^*}{1 - \varphi(z_i)} \right) \left[ q_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, \hat{\beta}) \right]$$

Por consiguiente, la matriz  $\mathbf{W}$  contiene las condiciones de primer orden, y la matriz de varianza y covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud ( $Var[\hat{\beta}]$ ) se estima consistentemente como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln f(\sigma_s^2, \hat{\beta})}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \ln f(\sigma_s^2, \hat{\beta})}{\partial \sigma_s^2} \\ \frac{\partial \ln f(\sigma_s^2, \hat{\beta})}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad Var[\hat{\beta}] = \left( \widehat{\mathbf{W}}' \widehat{\mathbf{W}} \right)^{-1}$$