

Redefining the Kanzow Complementarity Function

Favián Arenas
Universidad del Cauca

Héctor Jairo Marínez
Universidad del Valle

Rosana Pérez
Universidad del Cauca

Received: October 14, 2014

Accepted: December 16, 2014

Pag. 111-122

Abstract

In the last years, much work has been done with the aim of finding efficient algorithms to solve nonlinear complementarity problem. A well known way to deal with this problem is to reformulate it as a nonsmooth nonlinear system of equations using a nonlinear complementarity function. In this paper, we consider the complementarity-parameter function proposed in [11] and we propose a new form of defining it using a quadratic form with symmetric and positive definite matrix. With this new definition, we prove that the function is well defined and some of its properties. We found some bounds that are useful in the development of convergence theory (local and global) of algorithms that solving nonlinear complementarity problem.

Keywords: complementarity function, nonlinear complementarity problem, quadratic form, positive definite matrix, Lipschitz continuity.

Redefinición de la función de complementariedad de Kanzow

Resumen

En los últimos años, ha aumentado la investigación relacionada con la búsqueda de algoritmos eficientes que resuelvan el problema de complementariedad no lineal mediante su reformulación como un sistema de ecuaciones no lineales, no diferenciable, usando las llamadas funciones de complementariedad. En este artículo, consideramos la función de complementariedad uniparamétrica propuesta en [11] y proponemos una nueva forma de definirla mediante una forma cuadrática, simétrica y definida positiva. Con esta nueva definición, demostramos que la función está bien definida y algunas de sus propiedades. Además, encontramos cotas de gran utilidad en el desarrollo de teorías de convergencia (local y global) de algoritmos que resuelven el problema de complementariedad no lineal.

Palabras clave: función de complementariedad, problema de complementariedad no lineal, forma cuadrática, matriz definida positiva, continuidad Lipschitz.

1 Introducción

Una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x, y) = 0 \iff x \geq 0, y \geq 0, xy = 0, \quad (1)$$

se denomina *función de complementariedad*. Estas funciones han sido muy utilizadas en los últimos años, para reformular *problemas de complementariedad no lineal* como sistemas de ecuaciones no lineales, no diferenciables, lo que permite resolver dichos problemas indirectamente [11, 15, 13].

Geoméricamente, a partir de la equivalencia (1), se infiere que la traza de la función φ obtenida por la intersección con el plano xy , es la curva formada por los semiejes positivos x y y , la cual no es diferenciable en $(0, 0)$. Esta falta de suavidad en la curva implica la no suavidad en la función φ .

En la literatura sobre complementariedad no lineal, existen numerosas *funciones de complementariedad*, pero las más utilizadas han sido la *función mínimo* [14] y la *función de Fischer* [10], definidas respectivamente por

$$\varphi(x, y) = \min\{x, y\}, \quad \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x - y.$$

La función mínimo se puede escribir en forma equivalente como

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}((x + y) - |x - y|),$$

que permite observar la no diferenciable que presenta en puntos de la forma (x, x) . En cuanto a la *función de Fischer*, la no diferenciable se presenta en el punto $(0, 0)$.

En 1998, *Kanzow* y *Kleinmichel* [11] presentaron la *función de complementariedad* φ_λ definida por,

$$\varphi_\lambda(x, y) = \sqrt{(x - y)^2 + \lambda xy} - x - y, \quad (2)$$

donde el parámetro $\lambda \in (0, 4)$. En lo que sigue, haremos referencia a esta función como *función de Kanzow*.

Tanto en la implementación de los algoritmos que utilizan esta estrategia de solución como para el desarrollo de su teoría de convergencia juegan un papel importante las propiedades de la función de complementariedad, entre las que se encuentra el ser *Lipschitz continua*. Los problemas de complementariedad no lineal surgen en diversas aplicaciones como por ejemplo, problemas de contacto mecánico y fricción [1], problemas de mecánica estructural y diseño estructural, problemas de lubricación elasto-hidrodinámicos [12], problemas de equilibrio de tráfico [5], así como en problemas relacionados con modelos de equilibrio económico [9]. Los métodos de homotopía, que son derivados de métodos de punto fijo [20, 8] y los métodos basados en redes neuronales [18, 16, 17] también se pueden resolver como

un problema de complementariedad no lineal. La importancia de problemas de complementariedad en las áreas de física, ingeniería y economía se debe al hecho de que el concepto de complementariedad es sinónimo de la noción de sistema en equilibrio.

Organizamos la presentación de este documento de la siguiente forma: en la Sección 2, presentamos una forma novedosa de redefinir la *función de Kanzow* y la usamos para demostrar que en efecto, la función está bien definida, en la Sección 3, a partir de la nueva definición demostramos algunas de sus propiedades de la *función de Kanzow* y encontramos cotas de gran utilidad en resultados de convergencia de algoritmos que resuelven el problema de complementariedad no lineal. Finalmente, en la Sección 4, hacemos algunos comentarios finales sobre el tema.

2 Una nueva definición de la función Kanzow

En la definición de φ_λ dada por (2) observemos que no es conveniente incluir los extremos del intervalo en el que varía λ ya que, la inclusión de $\lambda = 0$, aumentaría los puntos de no diferenciabilidad de la función ya que φ_0 , definida por $\varphi_0(x, y) = |x - y| - (x + y) = -2 \min\{x, y\}$ no es diferenciable en todos los puntos de la forma (x, x) . Para el extremo $\lambda = 4$, $\varphi_4(x, y) = |x + y| - (x + y)$ es la *función nula*, para todo (x, y) con $x \geq 0$ y $y \geq 0$. En la Figura 1, ilustramos la *función de Kanzow* para algunos valores de λ .

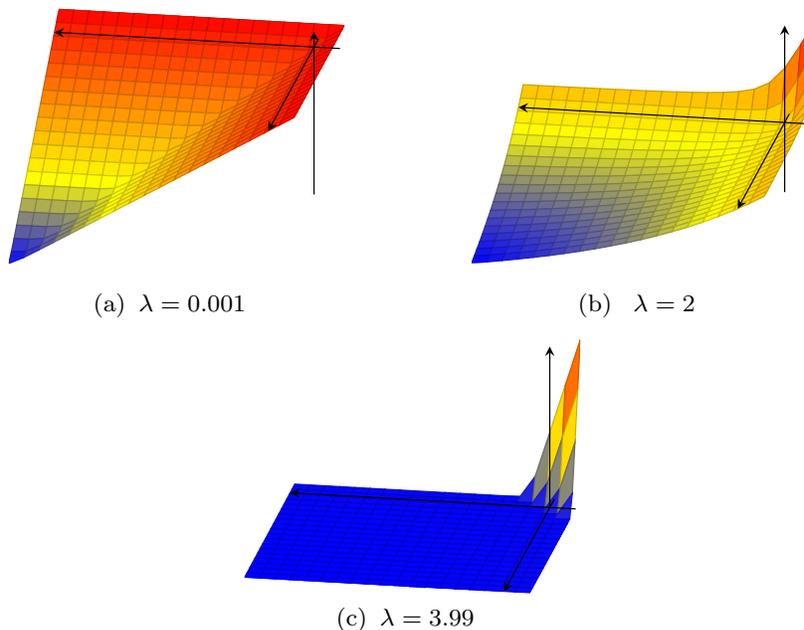


Figura 1: *Función de Kanzow* para algunos valores de λ .

Del estudio de la *función de Kanzow*, observamos que es posible redefinirla en una forma novedosa que presentamos a continuación [3]. Para ello, definiremos una función auxiliar G_λ y notaremos los vectores de \mathbb{R}^2 como vectores columna (matrices de tamaño 2×1).

Para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y para todo $\lambda \in (0, 4)$, sea $G_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$G_\lambda(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T K \mathbf{x}}. \quad (3)$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{2} - 1 \\ \frac{\lambda}{2} - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que la cantidad subradical en (3) coincide con la cantidad subradical en (2):

$$\mathbf{x}^T K \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{2} - 1 \\ \frac{\lambda}{2} - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y)^2 + \lambda xy.$$

Por otra parte, tenemos que la matriz K es *simétrica* con valores propios que son funciones de λ , a saber: $\alpha_1 = \alpha_1(\lambda) = 2 - \lambda/2$ y $\alpha_2 = \alpha_2(\lambda) = \lambda/2$. Dado que $\lambda \in (0, 4)$, estos valores propios son positivos y, por lo tanto, la matriz K es *definida positiva*. Así, para todo vector no nulo \mathbf{x} en \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbf{x}^T K \mathbf{x} = (x - y)^2 + \lambda xy > 0. \quad (4)$$

Para el caso $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, se tiene

$$\mathbf{x}^T K \mathbf{x} = 0. \quad (5)$$

De (4) y (5), tenemos que la función G_λ está bien definida.

Redefinición de la Función de Kanzow. Para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y para todo $\lambda \in (0, 4)$, redefinimos la función de Kanzow φ_λ por

$$\varphi_\lambda(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T K \mathbf{x}} - x - y, \quad (6)$$

Dado que G_λ está bien definida, concluimos que φ_λ también está bien definida.

3 Algunas propiedades de la función de Kanzow

En la primera parte de esta sección, demostramos algunas propiedades interesantes de la función G_λ y deducimos algunas cotas relacionadas con esta función; estos resultados los usamos para demostrar que tanto, la *función de kanzow*, como su gradiente (en los puntos donde existe) son localmente Lipschitz continuos y en cada caso, deducimos la constante Lipschitz.

Lema 1. *Sea $\lambda \in (0, 4)$. La función G_λ define una norma sobre \mathbb{R}^2 .*

Demostración. Por (3), $G_\lambda(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T K \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|_K$. Por lo tanto, G_λ define una norma sobre \mathbb{R}^2 , ya que la matriz K es *definida positiva* [19].

El siguiente resultado es válido puesto que $G_\lambda^2(\mathbf{x})$ es una forma cuadrática.

Lema 2. *La función G_λ definida por (3) satisface las siguientes desigualdades, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,*

$$\sqrt{\alpha_{\min}} \|\mathbf{x}\|_2 \leq G_\lambda(\mathbf{x}) \leq \sqrt{\alpha_{\max}} \|\mathbf{x}\|_2, \quad (7)$$

donde α_{\min} y α_{\max} son los valores propios mínimo y máximo respectivamente, de la matriz K definida en (4).

Demostración. Teniendo en cuenta que $G_\lambda(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T K \mathbf{x}}$ y que K , dada por (4), es una matriz *simétrica*, y $\alpha_{\min} > 0$ y $\alpha_{\max} > 0$ son sus valores propios mínimo y máximo, respectivamente, concluimos

$$\alpha_{\min} \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq [G_\lambda(\mathbf{x})]^2 \leq \alpha_{\max} \|\mathbf{x}\|_2^2,$$

de donde obtenemos las desigualdades (7).

Utilizando la primera desigualdad en (7), obtenemos la siguiente cota para el recíproco de $G_\lambda(\mathbf{x})$, válida para todo vector no nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^T K \mathbf{x}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\min}} \|\mathbf{x}\|_2}, \quad (8)$$

la cual usaremos en la demostración del Lema 5.

Observemos que tanto el valor α_{\min} como el valor α_{\max} dependen de λ , en efecto,

$$\alpha_{\min}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & \text{si } \lambda \in (0, 2), \\ 2 - \frac{\lambda}{2}, & \text{si } \lambda \in [2, 4), \end{cases} \quad \alpha_{\max}(\lambda) = \begin{cases} 2 - \frac{\lambda}{2}, & \text{si } \lambda \in (0, 2), \\ \frac{\lambda}{2}, & \text{si } \lambda \in [2, 4), \end{cases}$$

La Figura 2 ilustra las funciones α_{\min} , y α_{\max} , para todo $\lambda \in (0, 4)$.

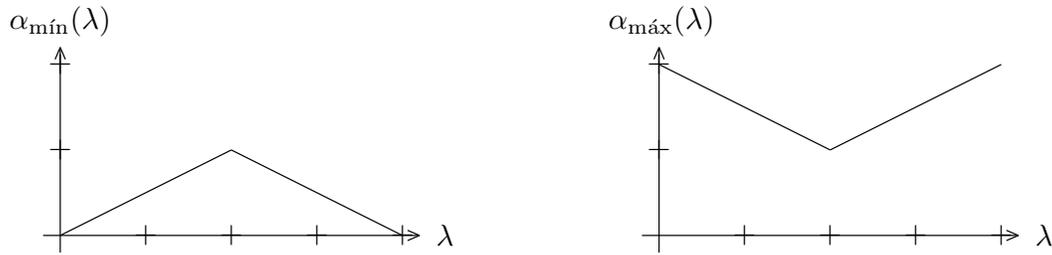


Figura 2: Funciones α_{\min} y α_{\max} .

Es importante observar que la *función de Kanzow*, φ_λ no es diferenciable en $(0,0)$. Para cualquier otro vector de \mathbb{R}^2 , el vector gradiente de φ_λ en \mathbf{x} está definido por

$$\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2(x-y) + \lambda y}{2G_\lambda(\mathbf{x})} - 1 \\ \frac{-2(x-y) + \lambda x}{2G_\lambda(\mathbf{x})} - 1 \end{pmatrix} = \nabla G_\lambda(\mathbf{x}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Para su uso posterior, denotaremos las derivadas parciales de G_λ de la siguiente manera:

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_\lambda(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{2(x-y) + \lambda y}{2G_\lambda(\mathbf{x})} \quad y \quad \psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_\lambda(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{-2(x-y) + \lambda x}{2G_\lambda(\mathbf{x})}. \quad (10)$$

Otro resultado que utilizaremos más adelante es la siguiente desigualdad demostrada en [11],

$$\|\nabla G_\lambda(\mathbf{x})\|_2 \leq \sqrt{2}. \quad (11)$$

A partir de (9), encontramos una expresión matricial para $\nabla G_\lambda(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned} \nabla G_\lambda(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2G_\lambda(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} 2(x-y) + \lambda y \\ -2(x-y) + \lambda x \end{pmatrix} = \frac{1}{2G_\lambda(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} 2x + (\lambda - 2)y \\ (\lambda - 2)x + 2y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2G_\lambda(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} 2 & \lambda - 2 \\ \lambda - 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \frac{1}{2G_\lambda(\mathbf{x})} 2K \mathbf{x} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\nabla G_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} K \mathbf{x}, \quad (12)$$

donde K está definida por (4). Además, dado que A es simétrica,

$$\|K\|_2 = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} = \max\left\{2 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right\} = \alpha_{\max}(\lambda).$$

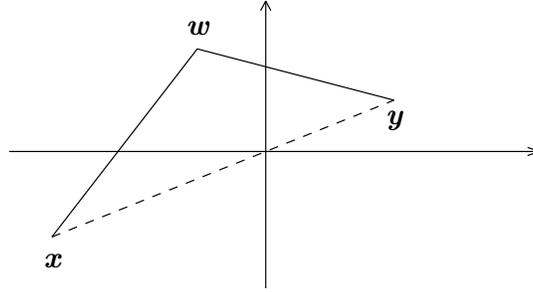


Figura 3: Desigualdad triangular.

Puesto que $\|K\|_2$ depende de λ y $\lambda \in (0, 4)$, se tiene que

$$\|K\|_2 = \alpha_{\text{máx}}(\lambda) < 2. \quad (13)$$

Otra de las propiedades importantes de la *función de Kanzow* es que es *uniformemente continua*, más aún, es *Lipschitz continua*, de acuerdo con el siguiente lema.

Lema 3. *La función de Kanzow es Lipschitz continua. Es decir, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$,*

$$|\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \varphi_\lambda(\mathbf{y})| \leq 2\sqrt{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2.$$

Demostración. Supongamos que el vector cero de \mathbb{R}^2 no está en el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. De acuerdo al *teorema del valor medio* [2], se garantiza que existe un vector \mathbf{z} en el segmento abierto (\mathbf{x}, \mathbf{y}) tal que,

$$\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \varphi_\lambda(\mathbf{y}) = \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Así, usando la desigualdad de *Cauchy-Schwartz*, tenemos que $|\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \varphi_\lambda(\mathbf{y})| \leq \|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$. Por (11),

$$|\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \varphi_\lambda(\mathbf{y})| \leq \sqrt{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2. \quad (14)$$

Si el vector cero está en el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, elegimos un vector \mathbf{w} que *no pertenezca* a él y tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ y $\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$, como se indica en la Figura 3. Aplicamos, el resultado (14) a los segmentos $[\mathbf{x}, \mathbf{w}]$ y $[\mathbf{w}, \mathbf{y}]$ junto con la desigualdad triangular y obtenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \varphi_\lambda(\mathbf{y})| &\leq |\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \varphi_\lambda(\mathbf{w}) + \varphi_\lambda(\mathbf{w}) - \varphi_\lambda(\mathbf{y})| \\ &\leq |\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \varphi_\lambda(\mathbf{w})| + |\varphi_\lambda(\mathbf{w}) - \varphi_\lambda(\mathbf{y})| \\ &\leq \sqrt{2} (\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|_2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|_2) \leq 2\sqrt{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2. \end{aligned} \quad (15)$$

De (14) y (15), φ_λ es *Lipschitz continua* con constante $2\sqrt{2}$.

Corolario 1. *La función G_λ es Lipschitz continua. Es decir, para todo \mathbf{x} y \mathbf{y} en \mathbb{R}^2 ,*

$$|G_\lambda(\mathbf{x}) - G_\lambda(\mathbf{y})| \leq 2\sqrt{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2. \quad (16)$$

El siguiente lema proporciona cotas para cada una de las derivadas parciales de G_λ y el **Lema 2.6** garantiza que el gradiente de φ_λ también es una función localmente *Lipschitz continua*.

Lema 4. *Sea $\lambda \in (0, 4)$. Las derivadas parciales de G_λ definidas en (10) satisfacen las siguientes desigualdades*

$$|\chi(\mathbf{x})| \leq 1 \quad y \quad |\psi(\mathbf{x})| \leq \sqrt{2}, \quad (17)$$

para todo vector no nulo \mathbf{x} en \mathbb{R}^2 .

Demostración. Iniciamos con el análisis de la función χ . Dado que $\lambda \in (0, 4)$, se tiene que $y^2\lambda(\lambda - 4) \leq 0$, equivalentemente $y^2\lambda^2 - 4y^2\lambda \leq 0$.

Adicionamos los términos $4x^2 + 4xy\lambda - 8xy + 4y^2$ y, después de algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos las siguientes desigualdades

$$(2x - 2y + y\lambda)^2 \leq 4(x^2 + xy\lambda - 2xy + y^2) \leq 4((x - y)^2 + xy\lambda).$$

Además, por (4), se tiene $(x - y)^2 + xy\lambda = \mathbf{x}^T K \mathbf{x} > 0$, para todo vector no nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Así,

$$\begin{aligned} |2(x - y) + y\lambda| &\leq 2\sqrt{(x - y)^2 + xy\lambda} = 2G_\lambda(\mathbf{x}) \\ \frac{|2(x - y) + y\lambda|}{2G_\lambda(\mathbf{x})} &\leq 1 \\ |\chi(\mathbf{x})| &\leq 1. \end{aligned}$$

Para acotar la función ψ , aplicamos (11) y obtenemos

$$|\psi(\mathbf{x})| \leq \|\nabla G_\lambda(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{2},$$

lo cual completa la prueba.

Lema 5. *Sean φ_λ la función de Kanzow, \mathbf{w} un vector no nulo de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{B}(\mathbf{w}; \epsilon)$ una bola que no contiene al vector cero, con $0 < \epsilon < \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_2$. Entonces, existe $\eta_\lambda > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; \epsilon)$,*

$$\|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \leq \eta_\lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2. \quad (18)$$

Demostración. Sean \mathbf{x} y $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. De (9) y (12),

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 &= \|\nabla G_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla G_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \leq \left\| \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} K \mathbf{x} - \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{z})} K \mathbf{z} \right\|_2 \\ &\leq \|K\|_2 \left\| \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} \mathbf{x} - \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{z})} \mathbf{z} \right\|_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Luego, de (13) y (19), tenemos la desigualdad

$$\|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \leq 2 \left\| \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} \mathbf{x} - \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{z})} \mathbf{z} \right\|_2.$$

Sumamos y restamos la expresión $\frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})}\mathbf{z}$ para obtener

$$\|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \leq \frac{2}{G_\lambda(\mathbf{x})}\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2 + 2\left|\frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} - \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{z})}\right|\|\mathbf{z}\|_2. \quad (20)$$

Del segundo sumando, tenemos

$$\left|\frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} - \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{z})}\right| = \left|\frac{G_\lambda(\mathbf{z}) - G_\lambda(\mathbf{x})}{G_\lambda(\mathbf{x})G_\lambda(\mathbf{z})}\right|,$$

por la continuidad *Lipschitz* de G_λ (**Corolario 2.4**),

$$\left|\frac{1}{G_\lambda(\mathbf{x})} - \frac{1}{G_\lambda(\mathbf{z})}\right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{G_\lambda(\mathbf{x})G_\lambda(\mathbf{z})}\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2. \quad (21)$$

Luego, de las desigualdades (20) y (21), tenemos

$$\|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \leq \frac{2}{G_\lambda(\mathbf{x})}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}\|\mathbf{z}\|_2}{G_\lambda(\mathbf{z})}\right)\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2$$

y por (8),

$$\|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha_{\min}}\|\mathbf{x}\|_2}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_{\min}}}\right)\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2.$$

Por otro lado, dado que $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; \epsilon)$,

$$\left|\|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{w}\|_2\right| < \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|_2 < \epsilon,$$

equivalentemente $-\epsilon < \|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{w}\|_2 < \epsilon$, en particular $-\epsilon + \|\mathbf{w}\|_2 < \|\mathbf{x}\|_2$, y por la hipótesis, $\epsilon \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|_2$, obtenemos que $\|\mathbf{x}\|_2 > \epsilon$.

Finalmente, para $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; \epsilon)$, concluimos que,

$$\|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\mathbf{z})\|_2 \leq \eta_\lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2,$$

donde

$$\eta_\lambda = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{\min}(\lambda)}\epsilon}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_{\min}(\lambda)}}\right). \quad (22)$$

Corolario 2. *Las funciones χ y ψ descritas en (10) satisfacen la desigualdades siguientes.*

$$|\chi(\mathbf{x}) - \chi(\hat{\mathbf{x}})| \leq \eta_\lambda |y - \hat{y}| \quad y \quad |\psi(\mathbf{x}) - \psi(\hat{\mathbf{x}})| \leq \eta_\lambda |y - \hat{y}|. \quad (23)$$

para todo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y todo $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ siendo η_λ dado por (22).

Demostración. Claramente, a partir de (9) y (10),

$$\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \chi(\mathbf{x}) - \chi(\hat{\mathbf{x}}) \\ \psi(\mathbf{x}) - \psi(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}.$$

Por propiedades de la *norma dos*, $|\chi(\mathbf{x}) - \chi(\hat{\mathbf{x}})| \leq \|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\|_2$ y por el **Lema 5**, $\|\nabla\varphi_\lambda(\mathbf{x}) - \nabla\varphi_\lambda(\hat{\mathbf{x}})\|_2 \leq \eta_\lambda \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 = \eta_\lambda |y - \hat{y}|$, por lo tanto,

$$|\chi(\mathbf{x}) - \chi(\hat{\mathbf{x}})| \leq \eta |y - \hat{y}|.$$

En forma análoga, se demuestra la desigualdad, $|\psi(\mathbf{x}) - \psi(\hat{\mathbf{x}})| \leq \eta |y - \hat{y}|$.

4 Conclusiones

Las llamadas *funciones de complementariedad* son de gran utilidad para reformular el problema de Complementariedad no lineal como un sistema de ecuaciones no lineales, no diferenciable [6, 11, 15]. Una de estas funciones, de amplio uso porque representa una familia de funciones de complementariedad uniparamétrica fue propuesta en 1998 [11], la cual denominamos *función de Kanzow*. Dos de las funciones de complementariedad más conocidas y utilizadas son casos particulares de esta familia. En efecto, cuando el parámetro es dos, obtenemos la *función de Fisher* [10] y cuando el parámetro tiende a cero, obtenemos un múltiplo de la *función mínimo* [14].

En el presente artículo, proponemos una nueva forma de definir la *función de Kanzow* usando una función cuadrática auxiliar con matriz *simétrica y definida positiva*. Esta nueva definición nos permitió realizar un estudio detallado de la función, demostrar algunas de sus propiedades y deducir algunas cotas de gran utilidad para demostrar convergencia (local y global) de algoritmos para resolver problemas de complementariedad no lineal [3, 4].

Agradecimientos

A la Universidad del Cauca por proveer tiempo a dos de los autores para la realización de este artículo cuyo contenido hace parte del proyecto de investigación *Optimización en Aplicaciones* inscrito en VRI ID 3908.

Referencias bibliográficas

- [1] Anitescu, Mihai, Cremer, James F. and Potra, Florian A. (1997). On the Existence of Solutions to Complementarity Formulations of Contact Problems with Friction, p. 12-21, SIAM Publications.
- [2] Apostol, Tom M. (1976). Análisis Matemático, Reverté, Barcelona.
- [3] Arenas, Favián. (2013). Métodos secantes de cambio mínimo para el problema de complementariedad no lineal. Tesis de Maestría. Universidad del Cauca. Popayán.

- [4] Arias, Carlos A. (2014). Un algoritmo quasi Newton global para problemas de complementariedad no lineal. Tesis de Maestría. Universidad del Cauca. Popayán.
- [5] Chen, Antony, Oh, Jun-Seok, Park, Dongjoo and Recker, Will. (2010). Solving the bicriteria traffic equilibrium problem with variable demand and nonlinear path costs, Vol. 217, No.7, p. 3020-3031, Applied Mathematics and Computation.
- [6] De Luca, T., Facchinei, F. and Kanzow, C. (1996). A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems, Vol. 29, p. 407-439. Mathematical Programming.
- [7] Dieudonné, Jean. (1969). Treatise on Analysis, p. 92. Academic Press. New York-London.
- [8] Ding, Jundi and Yin, Hongyou. (2007). A new homotopy method for solving non-linear complementarity problems, Vol. 16, p. 155-163. Numerical Mathematics.
- [9] Ferris, Michael C. and Pang, Jong-Shi. (1997). Engineering and economic applications of complementarity problems, Vol. 39, p. 669- 713. SIAM Review.
- [10] Fischer, Andreas and Kanzow, Christian. (1996). On finite termination of an iterative method for linear complementarity problems, Vol. 74, No. 3, p. 279-292. Mathematical Programming, Springer-Verlag. New York, Inc.
- [11] Kanzow, Christian and Kleinmichel, Helmut. (1998). A New Class of Semismooth Newton-Type Methods for Nonlinear Complementarity Problems, Vol. 11, No. 3, p. 227-251. Computational Optimization and applications. Kluwer Academic Publishers.
- [12] Kostreva, Michael. (1984). Elasto-hydrodynamic lubrication: A non-linear complementarity problem, Vol. 4, No. 4, p. 337-397. International Journal for Numerical Methods in Fluids. John Wiley and Sons.
- [13] Lopes, Vera L. R., Martínez, Jose M. and Rosana Pérez. (1999). On the local convergence of quasi-Newton methods for nonlinear complementary problems, Vol. 30, P 3-22. Applied Numerical Mathematics.
- [14] Pang, Jong-Shi and Qi, Liqun. (1993). Nonsmooth Equations: Motivation and Algorithms, Vol. 3, No. 3, p. 443-465. SIAM Journal on Optimization.
- [15] Qi, Liqun and Sun, Jie. (1993). A nonsmooth version of Newton's method, Vol. 58, p. 353-367. Mathematical Programming. Springer Verlag. Berlin.
- [16] Liao, Li-Zhi and Qi, Houduo. (1999). A neural network for the linear complementarity problem, Vol. 29, p. 9-18. Mathematical and computing modelling.
- [17] Liao, Li-Zhi, Qi, Houduo and Qi, Liqun. (2001). Solving nonlinear complementarity problems with neural networks, Vol. 131, p. 343-359. Computational and applied Mathematics.

- [18] Youshen, Xia and Gang, Feng. (2007). A neural network for solving nonlinear projection equations, Vol. 5, p. 577-589. Neural Networks.
- [19] Watkins, David S. (1991). Fundamentals of matrix computations, John Wiley and Sons, New York.
- [20] Xu, Qing y Dang, Chuangyin. (2007). A new homotopy method for solving non-linear complementarity problems, Vol. 57, p. 681-689. Numerical mathematics.

Dirección de los autores

Favián Arenas

Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán - Colombia
farenas@unicauca.edu.co

Héctor Jairo Martínez

Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
hector.martinez@correounivalle.edu.co

Rosana Pérez

Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán - Colombia
rosana@unicauca.edu.co