Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del Valle

REVISTA DE CIENCIAS

Escobar's Conjecture for the First Steklov Eigenvalue on n-ellipsoids

Óscar Andrés Montaño Carreño
Universidad del Valle

Received: November 1, 2016 Accepted: December 22, 2016

Pag. 55-61

Abstract

Let M an ellipsoid in $R^n, n \geq 3$, if the second fundamental form π satisfies $\pi(\upsilon,\upsilon) \geq k\,|\upsilon|^2$ on ∂M, $k > 0$, then the first Steklov eigenvalue $\nu_1(M)$ satisfies the inequality $\nu_1(M) \geq k$. Equality is obtained only if M is the ball of radius $\frac{1}{k}$. This result verifies Escobar's conjecture for n-ellipsoids.

Keywords: Steklov eigenvalue, ellipsoid, second fundamental form.

Conjetura de Escobar para el primer valor propio de Steklov sobre n-elipsoides

Resumen

Sea M un elipsoide en $R^n; n \geq 3$, si la segunda forma fundamental π satisface $\pi(\upsilon,\upsilon) \geq k\,|\upsilon|^2$ sobre ∂M, $k > 0$, entonces el primer valor propio de Steklov $\nu_1(M)$ satisface la desigualdad $\nu_1(M) \geq k$. La igualdad se obtiene si y sólo si M es la bola de radio $\frac{1}{k}$. Este resultado verifica la conjetura de Escobar para n-elipsoides.

Palabras y frases clave: Valor propio de Steklov, elipsoide, segunda forma fundamental.

1 Introducción

Sea $(\overline{M}, g)$ una variedad Riemanniana n-dimensional, compacta, conexa y con frontera suave ∂M. El problema

$$\Delta\varphi = 0 \; en \; M,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \nu\varphi \text{ sobre } \partial M, \tag{1}$$

donde ν es un número real, se conoce como el problema de Steklov [(1)]. Los valores propios para este problema son los mismos que los valores propios del operador Dirichlet-Neumann [(1)] y son a menudo llamados valores propios de Steklov [(2)].

El primer valor propio no cero $\nu_1(M)$ es conocido como el primer valor propio de Steklov y está caracterizado variacionalmente por

$$\nu_1(M) = \text{mín}\left\{R_{[\varphi]} : \int_{\partial m} \varphi d\sigma = 0, \varphi \in C^{\infty}\left(\overline{M}\right)\right\}, \tag{2}$$

donde $R_{[\varphi]} = \frac{\int_M |\nabla_\varphi|^2 dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma}$ es llamado cociente de Rayleigh. Para la bola n-dimensional unitaria $B1(0) \subset \mathbb{R}^n$, el primer valor propio de Steklov es $\nu_1(B) = 1$.

Al igual que en el problema de Dirichlet y de Neumann, en el problema de Steklov se han hecho estimativos geométricos para el primer valor propio. Para dominios acotados y simplemente conexos en el plano xy, en 1954, Weinstock (3) demostró que $\nu_1 \leq \frac{2\pi}{L}$, donde L representa el perímetro de la curva frontera, con igualdad si y sólo si el dominio es un círculo. En 1970, para dominios convexos en el plano, Payne (4) demostró que $\nu_1 \geq k$, donde k es el valor mínimo de la curvatura sobre la frontera del dominio. Posteriormente, en el año 1997, Escobar (5) generalizó el resultado de Payne para variedades bi-dimensionales con curvatura de Gauss no negativa, reemplazando k por la curvatura geodésica k_g de la frontera. El resultado de Escobar es el siguiente:

Teorema 1.1 *Sea $(\overline{M}, g)$ una 2-variedad Riemanniana compacta con frontera. Asumamos que M tiene curvatura Gaussiana no negativa, K y que la curvatura geodésica k_g de la frontera de M, verifica la desigualdad $k_g \geq k > 0$. Entonces, el primer valor propio no cero del problema de Steklov, $\nu_1(M)$ satisface $\nu_1(M) \geq k$. La igualdad se tiene solamente para la bola euclidiana de radio $\frac{1}{k}$.*

En el mismo artículo, para dimensiones mayores, Escobar obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.2 *Sea $(\overline{M}, g)$ una variedad Riemanniana compacta con frontera y dimensión $n \geq 3$. Asumamos que $Ricci(g) \geq 0$ y que la segunda forma fundamental π satisface $\pi(\upsilon, \upsilon) \geq k\,|\upsilon|^2$ sobre $\partial M, k > 0$. Entonces*

$$\nu_1(M) > \frac{k}{2}. \tag{3}$$

Dos años después, Escobar (5) enuncia la siguiente conjetura:

1.1 Conjetura de Escobar

Sea $(\overline{M}, g)$ una variedad Riemanniana compacta con frontera y dimensión $n \geq 3$. Asumamos que $Ricci(g) \geq 0$ y que la segunda forma fundamental π satisface

$$\pi(\upsilon, \upsilon) \geq k\,|\upsilon|^2$$

sobre ∂M, con $k > 0$. Entonces, el primer valor propio de Steklov satisface la desigualdad $\nu_1(M) \geq k$. La igualdad se obtiene solamente para la bola euclidiana de radio $\frac{1}{k}$.

La conjetura análoga para $n = 2$ fue probada por Payne [4] para dominios en el plano y por Escobar [5] para 2-variedades con curvatura Gaussiana no negativa. Montaño en [7] demostró que la conjetura es cierta para métricas rotacionalmente invariantes en la bola n-dimensional.

El propósito de este artículo es demostrar la Conjetura de Escobar para n-elipsoides, es decir, demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.3 *Sea M un elipsoide en $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, si la segunda forma fundamental π satisface $\pi(v,v) \geq k\,|v|^2$ sobre $\partial M, k > 0$, entonces el primer valor propio de Steklov $v_1(M)$ satisface la desigualdad $v_1(M) \geq k$. La igualdad se obtiene si y sólo si M es la bola de radio $\frac{1}{k}$. Este resultado verifica la conjetura de Escobar para n-elipsoides.*

La demostración se hará en tres secciones de la siguiente manera: en la primera sección, encontramos una mejor cota inferior para la segunda forma fundamental; en la segunda sección, estimamos el cociente de Rayleigh para elipsoides y en la tercera sección, demostraremos la conjetura de Escobar para n-elipsoides.

2 Segunda forma fundamental

En esta sección encontramos la mejor cota inferior para la segunda forma fundamental sobre el n-elipsoide. Sea

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 1\}, x = (x_1, \dots, x_n), \tag{4}$$

donde

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2, \; a_1 \geq \cdots a_n > 0, \qquad n \geq 3. \tag{5}$$

La frontera de $M, \partial M$, es el elipsoide n-dimensional

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 1\}. \tag{6}$$

Dado que

$$\begin{aligned} N &= (N_1, \dots, N_n) \\ &= \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \\ &= \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\nabla F}, \dots \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\nabla F}\right) \\ &= \left(\frac{F_1}{||\nabla F||}, \dots, \frac{F_n}{|\nabla F|}\right) \end{aligned}$$

es un campo unitario exterior y normal a ∂M la segunda forma fundamental en x evaluada en $v \in \mathfrak{X}(\partial M)$ (Campos tangentes a ∂M) está dada por

$$\pi(v,v) = \langle DvN, v\rangle.$$

donde $\langle \nabla F, v\rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\pi(v,v) &= \langle DvN, v\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla N_i, v\rangle e_i, v \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \left(\frac{F_{ij}}{|\nabla F|} - \frac{\langle \nabla F, \nabla(F_j)\rangle F_i}{|\nabla F|^3} \right) e_j, v \right\rangle e_j, v \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{F_{ij}}{|\nabla F|} - \frac{\langle \nabla F, \nabla(F_j)\rangle F_i}{|\nabla F|^3} \right) v_i v_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{F_{ij}}{|\nabla F|} v_i v_j \\
&= \frac{\langle (HF)(x)v, v\rangle}{|\nabla F|}.
\end{aligned}$$

En nuestro caso, tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi(v,v) &= \frac{\langle (HF)(x)v, v\rangle}{|\nabla F|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{v_1^2}{a_1^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_1^2}{a_1^4}}} \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{v_1^2}{a_1^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_1^2}{a_n^2 a_1^2}}} \\
&= \frac{a_n}{a_1^2} \langle v, v\rangle.
\end{aligned}$$

Tenemos, entonces, la desigualdad:

$$\pi(v,v) \geq \frac{a_n}{a_1^2} \langle |v|^2\rangle. \qquad (7)$$

La igualdad se obtiene en $x = a_n e_n$ y $v = e_1$, es decir, $\frac{a_n}{a_1^2}$ es la mejor cota inferior para π.

3 Cociente de Rayleigh

Dada $\varphi: M \to \mathbb{R}$ suave, comparamos el cociente de Rayleigh $R_{[\varphi]}$ sobre el elipsoide M definido en (4) con el cociente de Rayleigh $R_{[\varphi \circ f]}$ sobre la bola B, donde

$$f(u) = (a_1 u_1, a_2 u_2, \dots, a_n u_n), a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$$

y

$$B = \{u \in \mathbb{R}^n : |u|^2 < 1, u = (u_1, \dots, u_{n)}\}. \qquad (8)$$

Con el fin de simplificar los cálculos, introducimos las siguientes variables y conjuntos:

$x = (x_1, \dots, x_n), w = (x_1, \dots, x_{n-1}), u = (u_1, \dots, u_n), z = (u_1, \dots, u_{n-1}), x = f(u).$

$$E = \{w \in \mathbb{R}^{n-1} : F(w, 0) < 1\} \qquad (9)$$

$$U = \{z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z|^2 < 1\} \qquad (10)$$

Con la notación precedente, tenemos:

$$R_{[\varphi]} = \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_x}$$

$$= \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 dx}{2\int_E \varphi^2(w, x_n(w)) \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right)^2} dw}$$

$$= \frac{\int_B \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial u_i}\right)^2 a_1 \dots a_n du}{2\int_U \varphi^2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_n^2}{a_i^2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial u_i}\right)^2} a_1 \dots a_{n-1} dz}$$

$$= \frac{\int_B \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial u_i}\right)^2 du}{2\int_U \varphi^2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial u_i}\right)^2} dz}$$

$$\geq \frac{a_n}{a_1^2} \frac{\int_B \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial u_i}\right)^2 du}{2\int_U \varphi^2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial u_i}\right)^2} dz}$$

$$= \frac{a_n}{a_1^2} \frac{\int_B |\nabla\varphi|^2 du}{\int_{\partial B} \varphi^2 d\sigma_u}.$$

Es decir,

$$R_{[\varphi]} \geq \frac{a_n}{a_1^2} \frac{\int_B |\nabla\varphi|^2 du}{\int_{\partial B} \varphi^2 d\sigma_u}. \qquad (11)$$

4 Conjetura de Escobar para n-ellipsoids

Sea ψ primera función propia asociada al valor propio $\nu_1(M)$ y a tal que $\varphi = \psi + a$ satisfaga

$$\int_{\partial B} \varphi \ o\, f d\sigma_u = 0. \tag{12}$$

Dado que ψ es función propia, entonces$\int_{\partial B}(\psi + a)d\sigma x = aA$,con $A = \int_{\partial M} d\sigma_x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nu_1(M) &= \frac{\int_M |\nabla\psi|^2 dx}{\int_{\partial B} \psi^2 d\sigma_x} \\ &= \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_x - a^2 A} \\ &\geq \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_x} \end{aligned}$$

De (11) se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 dx}{\int_{\partial M} \psi^2 d\sigma_x} &\geq \frac{a_n}{a_1^2} \frac{\int_B |\nabla\varphi|^2 du}{\int_{\partial B} \varphi^2 d\sigma_u}. \\ &\geq \frac{a_n}{a_1^2}\ \nu_1(B) \\ &= \frac{a_n}{a_1^2} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\nu_1(M)$ es mayor o igual a la mejor cota inferior para π. La igualdad se obtiene si y sólo si $a_1 = a_n$. En tal caso, M es una bola de radio a_1 y $\nu_1(M) = \frac{1}{a_1}$. La Conjetura de Escobar se satisface para n-elipsoides.

Referencias bibliográficas

1. Montaño OA. Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov en el espacio euclideo, Revista de Ciencias. 2013; 17(2): 95-103.

2. Steklov MW. Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique. Ann Sci École Norm. 1902; 19: 445-490.

3. Weinstock R. Inequalities for a classical eigenvalue problem. J Rational Mech Anal. 1954; 3: 745-753.

4. Payne LE. Some Isoperimetric Inequalities for Harmonic Functions. SIAM J Math Anal. 1970; 1: 354-359.

5. Escobar JF. The Geometry of the First Non-Zero Steklov Eigenvalue. Journal of Functional Analysis. 1997; 150: 544-556.

6. Escobar JF. An isoperimetric inequality and the first Steklov Eigenvalue. Journal of functional analysis. 1999; 165: 101-116.

7. Montaño OA. The Stekloff problem for rotationally invariant metrics on the ball. Revista Colombiana de Matemáticas. 2013; 47(2): 181-190.

Dirección del autor
Oscar Andrés Montaño Carreño
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
oscar.montano@correounivalle.edu.co