Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 42(2008)1, páginas 1-14

Genealogía de permutaciones simples de orden una potencia de dos

Genealogy of simple permutations with order a power of two

Primitivo B. Acosta Humánez

Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España

Dedicado a la memoria de Pere Mumbrú

Resumen. El objetivo central de este artículo es mostrar algunas propiedades de las permutaciones simples de orden una potencia de dos y una fórmula combinatoria para construir su genealogía involucrando dos nuevas operaciones: la operación *pegamiento* y la operación *voltear*. Las permutaciones simples son muy importantes porque corresponden a las órbitas primarias o minimales y, en particular, las permutaciones simples de orden una potencia de dos están relacionadas con la cola derecha en el orden de Sharkovskii.

Palabras y frases clave. Teorema de Bernhardt, grafos de Markov, ordenamiento parcial de permutaciones, operación de voltear, operación de pegamiento, Teorema de Sharkovskii, órbitas simples de Block.

2000 Mathematics Subject Classification. 58F20, 05A05.

Abstract. The aim of this paper is to show some properties of simple permutations with order a power of two and to give a combinatorial formula to determine its genealogy involving two new operations: the *pasting* operation and *reversing*. Simple permutations are very important because corresponds to primary orbits or minimal orbits and in particular, simple permutations with order a power of two are related with the right side in the Sharkovskii's order.

Key words and phrases. Bernhardt's theorem, Markov's graphs, partial ordering of permutations, reversing operation, pasting operation, Sharkovskii's theorem, simple orbits of Block.

1. Introducción

La dinámica unidimensional ha tenido un gran auge debido al Teorema de Sharkovskii, así que surge una nueva rama de los sistemas dinámicos, la denominada *dinámica combinatoria* (véase [1]), rama en la que actualmente hay muchos investigadores interesados en las relaciones algebraicas y combinatorias de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con dinámica minimal. Es aquí en donde las permutaciones simples juegan un papel importante, ya que es en las órbitas primarias o minimales, también conocidas como órbitas simples de Block (véanse [4, 3]), en donde se construyen este tipo de funciones. No obstante, este artículo puede clasificarse en el tema de la dinámica combinatoria.

La idea de analizar los sucesores y antecesores de permutaciones simples de orden una potencia de dos se debe a Chris Bernhardt (véase [2]). En este artículo se presentan dos formas de construir la genealogía de una permutación simple de orden una potencia de dos. La primera (Teorema 3.10) se debe a Bernhardt y la segunda (Proposición 4.4) es un resultado obtenido por el autor con la orientación y asesoría del profesor Pere Mumbrú (Q.E.P.D),[1] durante el curso de doctorado 2004-2005. Esto se hace introduciendo dos operaciones en ciclos y en permutaciones: *pegamiento* y *vuelta*. Estas operaciones fueron definidas para números enteros en [7] y para anillos de polinomios sobre cuerpos conmutativos y otros anillos en [6].

Por razones didácticas que se estiman pertinentes para facilitar la lectura al lector novato, se puede interpretar la Proposición 4.4 como una sucesión de mandatos. Supongamos que existe un reino ideal, en donde como en cualquier familia real, el rey tiene un solo antecesor y puede tener varios herederos o sucesores, de los cuales se escogerá sólo uno para ser el nuevo rey. La diferencia con los reinos actuales es que el heredero al trono será el más parecido al rey y el resto de los sucesores tendrán un título que les garantizará una parte del reino y que será otorgado de acuerdo a su parecido con el rey. El criterio de semejanza entre los sucesores y el rey será el número de cambios (trasposiciones ρ_{i_k}) que se le hacen al rey (permutación simple θ) para convertirse en un sucesor (permutación simple $\eta = \theta^* \circ \rho_{i_1} \circ \ldots \circ \rho_{i_{2m-1}}$). Es decir, la órbita simple más parecida al rey es la que tenga solo una trasposición y la menos parecida será la que tenga más trasposiciones.

2. Preliminares

A lo largo de este escrito, $(S_n, \circ)$ denotará el grupo de permutaciones de n objetos. Con respecto a las funciones, solo consideramos aquellas que son continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, teniendo en cuenta que calcularemos sus imágenes en el conjunto de puntos extremos de una partición realizada en $n-1$ intervalos:

$$P_n = \{x_i, x_{i+1} \in \mathbb{R} : x_i < x_{i+1}, \forall i = 1, \ldots, n-1\}. \tag{1}$$

[1]Una versión preliminar de este artículo fue presentado por el autor en el XV Congreso Nacional de Matemáticas (Bogotá - Colombia, 2005).

La órbita de una función en un punto puede ser descrita como una permutación y para los efectos presentados en este artículo, órbita y permutación tendrán el mismo significado. Una permutación θ actúa sobre un conjunto si actúa sobre cada elemento del conjunto. Se entenderá por antecesor (respectivamente sucesor) al antecesor inmediato (respectivamente sucesor inmediato).

Definición 2.1. El *conjunto de permutaciones* de una función f, denotado por $Perm(f)$, está definido de la siguiente manera: una permutación $\theta \in Perm(f)$ si y solo si existe una partición P_n tal que $f(x_i) = x_{\theta(i)}$, donde $x_i, x_{\theta(i)} \in P_n$. Es decir,

$$Perm(f) = \left\{\theta : f(x_i) = x_{\theta(i)}, \quad x_i, x_{\theta(i)} \in P_n\right\}. \tag{2}$$

Ejemplo 2.2. Sean $P_3 = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$ y $f(x) = \frac{x-1}{x}$, se puede observar que $f^3(-1) = -1$ y su órbita está determinada por la permutación

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 2) \in Perm(f).$$

Definición 2.3. Sean $\theta, \eta \in S_n$, $\mathcal{P}_\theta$ y $\mathcal{P}_\eta$ dados por $\mathcal{P}_\theta = \{f : \theta \in Perm(f)\}$, $\mathcal{P}_\eta = \{g : \eta \in Perm(g)\}$, se dice que θ *fuerza* a η, denotado por $\theta \triangleleft \eta$, si y solo si $\mathcal{P}_\theta \supset \mathcal{P}_\eta$.

Nota 2.4. De acuerdo con la definición 2.3, puede darse cualquiera de los siguientes casos:

- $\mathcal{P}_\theta \supset \mathcal{P}_\eta$, por lo tanto $\theta \triangleleft \eta$,
- $\mathcal{P}_\theta \subset \mathcal{P}_\eta$, por lo tanto $\theta \triangleright \eta$,
- Si los casos 1 y 2 se dan simultáneamente, no hay forzamiento. En este caso se dice que las permutaciones (o también las órbitas de la función) son del mismo tipo. Esto se denota con $\theta \cong \eta$.
- Si los casos 1 y 2 no se dan, se dice que tampoco hay forzamiento.

Definición 2.5. Sean $x_i, x_{i+1} \in \mathbb{R}$, con $i = 1, 2, \ldots, n-1$ tales que $x_i < x_{i+1}$ y $\theta \in Perm(f)$. El *grafo de Markov*, también conocido como $A-$grafo, asociado a f y θ, es el grafo dirigido que tiene $n-1$ vértices, denotados por $J_1, \ldots, J_{n-1}$, y flechas, las cuales son trazadas de $J_m = [x_m, x_{m+1}]$ a $J_k = [x_k, x_{k+1}]$ si y solo si $f(J_m) \supseteq J_k$. Si $k = m$, se traza un arco de J_k sobre sí mismo.

Ejemplo 2.6. Sean $P_3 = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$, $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $\theta = (1, 3, 2)$. En consecuencia, $J_1 = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ y $J_2 = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, de lo cual $f(J_1) = [-1, 2] = J_1 \cup J_2$ y $f(J_2) = \left[-1, \frac{1}{2}\right] = J_1$. Tal como se observa en la Figura 1, el grafo de Markov tiene a J_1 y J_2 como vértices, mientras que los arcos son los que se trazan de J_1 a J_2, de J_1 a J_1 y de J_2 a J_1.

Notación. El orden o la longitud de un ciclo θ será denotado por $|\theta|$. Si $|\theta| = n$, se dice que θ es un $n-$ciclo o también un ciclo de longitud n. El conjunto de los $n-$ciclos de S_n será denotado por C_n. Es decir,

$$C_n = \{\theta \in S_n : |\theta| = n\}. \tag{3}$$

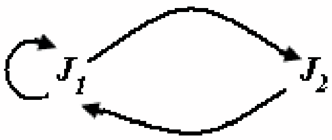

FIGURA 1. Grafo de Markov asociado a $\frac{x-1}{x}$ y $(1,3,2)$.

Ejemplo 2.7. $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{(1,3,2),(1,2,3)\}.$

Nota 2.8. Existe una relación entre el ordenamiento parcial (forzar) y los grafos de Markov: $C_n \ni \theta \triangleleft \eta \in C_m$ si y solo si el grafo de Markov de η tiene un lazo no repetitivo de longitud m (unión disyunta de m arcos) correspondiente a θ. Este ordenamiento parcial está relacionado con el ordenamiento de Sharkovskii de los enteros positivos:

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \ldots \triangleleft 2\cdot 3 \triangleleft 2\cdot 5 \triangleleft 2\cdot 7 \triangleleft \ldots \triangleleft 2^2\cdot 3 \triangleleft 2^2\cdot 5 \triangleleft \ldots \triangleleft 2^2 \triangleleft 1.$$

El teorema de Sharkovskii puede ser interpretado como sigue: si θ es una permutación de orden n y si $n \triangleleft m$, entonces existe una permutación η de orden m tal que $\theta \triangleleft \eta$. Es decir, si $\theta \in C_n$ y $\eta \in C_m$, donde $m \triangleleft n$, entonces $\theta \triangleleft \eta$.

Definición 2.9. Sean $m, n, i \in \mathbb{Z}^+$, $S = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq mn\}$, se define $P(mn, m, i) := \{x \in \mathbb{Z} : (i-1)n < x \leq in\}$ con $i \leq m$. Al conjunto $P(mn, m, i)$ lo llamaremos $i-$ésima *partición natural de* S de tamaño n, en donde i representa el número (ordinal) de la partición, m el número total (cardinal) de particiones y n el número de elementos de la $i-$ésima partición.

Para ilustrar la anterior definición se propone el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.10. Sea $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, la segunda partición natural de S de tamaño 3 es $P(6,2,2) = \{4,5,6\}$.

La siguiente definición se debe a Block, ver [4, 3], por lo que se puede hablar de órbitas o permutaciones simples de Block.

Definición 2.11. Una permutación $\theta \in C_k$ se denomina *simple* si cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\theta \in \{\alpha_{2n-1}, \beta_{2n-1}\}$, donde $2n-1 = k$ y α_{2n-1}, β_{2n-1} están dadas por

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n-1} &= (1, 2n-1, n, n-1, n+1, n-2, n+2, \ldots, 2, 2n-2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots & n+1 & \ldots & 2n-2 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & \ldots & n+1 & \ldots & n-2 & \ldots & 1 & n \end{pmatrix}, \\
\beta_{2n-1} &= (1, n, n+1, n-1, n+2, n-2, \ldots 2, 2n-1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n & n+1 & \ldots & 2n-2 & 2n-1 \\ n & 2n-1 & \ldots & n+2 & n+1 & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

2. $\theta^{2^j}\left[P\left(2^n, 2^j, i\right)\right] = P\left(2^n, 2^j, i\right)$ y $\theta^{2^j}\left[P\left(2^n, 2^{j+1}, i\right)\right] \cap P\left(2^n, 2^{j+1}, i\right) = \emptyset$, donde $k = 2^n$, $1 \leq i \leq 2^j$ y $0 \leq j \leq n-1$.

3. $k = rm$, con r impar y m una potencia de dos, $r > 1$, $m > 1$ tal que existan $\alpha_r, \beta_r \in C_r$ que satisfagan la condición 1 y $\phi \in C_m$ que satisfaga la condición 2 de la siguiente manera: $\theta[P(n,m,i)] = P(n,m,\phi(i))$ y $\theta^m \in \{\alpha_r, \beta_r\}$ cuando θ^m es restringida a $P(n,m,i)$.

Nota 2.12. Las permutaciones simples de orden impar α_n y β_n de la condición 1, corresponden a órbitas o permutaciones del tipo *Stefan* (véanse [4, 3]). Se observa que $\alpha_n \cong \beta_n$, $\alpha_n \triangleleft \alpha_{n-2}$ y que $\beta_n \triangleleft \beta_{n-2}$, pudiéndose determinar cuáles son sus antecesores y sucesores. Las permutaciones simples de orden potencia de dos, que satisfacen la condición 2, también tienen antecesores y sucesores, los cuales serán calculados usando el teorema de Bernhardt de la sección 2 y la proposición 4.4. Las permutaciones simples que satisfacen la condición 3 también son llamadas *fuertemente simples* (véanse [4, 3]). A estas últimas las llamaremos aquí permutaciones simples de orden mixto.

Notación. Si $k \in \mathbb{Z}^+$, se escribe $Sim(k)$ para denotar el conjunto de las permutaciones simples de C_k.

Ejemplo 2.13 (Permutaciones simples)**.** Salvo isomorfismos, se presentan ahora algunos ejemplos basados en las definiciones anteriores.

1. Orden impar
   - $Sim(1) = C_1 = \{(1)\}$
   - $Sim(3) = C_3 = \{(1,2,3), (1,3,2)\}$
   - $Sim(5) = \{(1,3,4,2,5), (1,5,3,2,4)\} \subset C_5$.

2. Orden potencia de dos
   - $Sim(2) = C_2 = \{(1,2)\}$, puesto que $\theta\{1,2\} = \{1,2\}$, $\theta\{1\} = \{2\}$, $\theta\{2\} = \{1\}$, $\theta^2\{1\} = \{1\}$, $\theta^2\{2\} = \{2\}$.
   - $Sim(4) = \{(1,3,2,4), (1,4,2,3)\} \subset C_4$, ya que $\theta\{1,2\} = \{3,4\}$, $\theta\{3,4\} = \{1,2\}$, $\theta\{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$, $\theta^2\{1,2\} = \{1,2\}$, $\theta^2\{3,4\} = \{3,4\}$, $\theta^2\{1\} = \{2\}$, $\theta^2\{2\} = \{1\}, \ldots$
   - $\{(1,5,3,7,2,6,4,8), (1,6,4,7,2,5,3,8)\} \subset Sim(8) \subset C_8$, ya que $\theta\{1,2,3,4,5,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\theta\{1,2,3,4\} = \{5,6,7,8\}$, $\theta\{5,6,7,8\} = \{1,2,3,4\}$, $\theta^2\{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$, $\theta^2\{5,6,7,8\} = \{5,6,7,8\}$, $\theta^2\{1,2\} = \{3,4\}$, $\theta^2\{3,4\} = \{1,2\}$, $\theta^2\{5,6\} = \{7,8\}, \ldots$

3. Orden mixto

- $(1,3,2,5,4,6) \in Sim(6) \subset C_6$, ya que $r=3$, $m=2$, $\alpha_3=(1,3,2)$, $\beta_3=(4,5,6)$, $\phi=(1,2)$, $\theta[P(6,2,1)]=P(6,2,2)$, $\theta[P(6,2,2)]=P(6,2,1)]$, $\left(\theta^2(1),\theta^2(2),\theta^2(3)\right)=(1,3,2)$ y $\left(\theta^2(4),\theta^2(5),\theta^2(6)\right)=(4,5,6)$.

- $(1,4,7,8,10,6,9,2,3,5) \in Sim(10) \subset C_{10}$, debido a que $r=5$, $m=2$, $\alpha_5=(1,3,4,2,5)=(6,8,9,7,10)$, $\phi=(1,2)$, $\theta[P(10,2,1)]=P(10,2,2)$, $\theta[P(10,2,2)]=P(10,2,1)$, $\left(\theta^2(1),\theta^2(2),\ldots,\theta^2(4),\theta^2(5)\right)=(1,3,4,2,5)$ y $\left(\theta^2(6),\theta^2(7),\theta^2(8),\theta^2(9),\theta^2(10)\right)=(6,8,9,7,10)$.

3. Antecesores y sucesores

En el artículo original de C. Bernhardt ([2]) se enuncia el lema de Ho pero no se demuestra. Aquí se presenta una prueba alternativa; otra prueba puede verse en [5].

Lema 3.1 (C. W. Ho, [5])**.** *El cardinal del conjunto de permutaciones simples de orden 2^n es $2^{2^n-(n+1)}$. Esto es*

$$Card(Sim(2^n)) = 2^{2^n-(n+1)}. \tag{4}$$

La demostración que daremos aquí se hace por inducción y se debe a sugerencias hechas al autor por parte de C. Bernhardt.

Demostración. Claramente se observa que $Card(Sim(2))=1$. Ahora supongamos que $Card\left(Sim\left(2^k\right)\right)=2^{2^k-(k+1)}$, trazamos puntos para los enteros desde 1 hasta 2^{k+1}, luego trazamos círculos alrededor de los primeros dos puntos, de los dos siguientes, y así sucesivamente hasta llegar a los puntos que corresponden a la última pareja. A través de una permutación simple los círculos son permutados como permutaciones simples de orden 2^k; así cada punto en un círculo tiene dos formas de ir a otro punto, excepto para el último del último círculo puesto que sólo puede ir al punto anterior. Por lo tanto habrán 2^{2^k-1} permutaciones de los puntos en cada círculo y como los círculos son permutados como permutaciones simples de orden 2^k, en total habrá $2^{2^k-(k+1)}2^{2^k-1}=2^{2^{k+1}-(k+2)}$ permutaciones simples de orden 2^{k+1}, es decir, $Card\left(Sim\left(2^{k+1}\right)\right)=2^{2^{k+1}-(k+2)}$. ☑

Ejemplo 3.2. *Claramente se observa que $Card(Sim(4))=2$, puesto que $Sim(4)=\{(1,3,2,4),(1,4,2,3)\}$.*

Lema 3.3. *Si $\theta \in Sim(2^n)$, entonces $\theta^{2^m+1} \in Sim(2^n), \forall m \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Se sigue en forma inmediata de la condición 2 de la definición 2.3 y del hecho de que $\theta^{2^n+1}=\theta$, con $n=m+k$. ☑

Ejemplo 3.4. *Sea la permutación $\theta=(1,3,2,4) \in Sim(4)$, se observa que $\theta^3=(1,4,2,3) \in Sim(4)$.*

Notación. Si $x \in \mathbb{R}$, se escribe $\lfloor x \rfloor$ para denotar la parte entera de x.

Definición 3.5. La permutación $\theta_* \in S_{2^{n-1}}$ se define por

$$\theta_*(k) = \left\lfloor \frac{1}{2}(\theta(2k)+1) \right\rfloor, \quad \theta \in Sim\,(2^n)\,. \tag{5}$$

Definición 3.6. La permutación $\theta^* \in S_{2^{n+1}}$ se define por

$$\theta^*(2k-1) = 2\theta(k) - 1, \quad \theta^*(2k) = 2\theta(k), \quad \theta \in Sim(2^n). \tag{6}$$

Nota 3.7. La permutación θ^* consta de dos 2^n-ciclos disjuntos, además, puede verse en forma inmediata que $(\theta_*)^* \neq \theta$, $(\theta^*)_* = \theta$ y $\theta^* \triangleleft \theta$.

Ejemplo 3.8. Sea $\theta = (1,5,3,7,2,6,4,8) \in Sim(8)$, se tienen las permutaciones

$$\begin{aligned}\theta_* &= (1,3,2,4) \in S_4\,,\\ \theta^* &= (1,9,5,13,3,11,7,15)(2,10,6,14,4,12,8,16) \in S_{16}.\end{aligned}$$

Definición 3.9. Sean i_j, $m \in \mathbb{Z}^+$, la trasposición ρ_{i_j} se define como

$$\rho_{i_j} = \begin{pmatrix} 2i_j - 1 & 2i_j \\ 2i_j & 2i_j - 1 \end{pmatrix} = (2i_j - 1, 2i_j)\,, \tag{7}$$

donde $1 \leq i_j \leq 2^n$ para $1 \leq j \leq 2m-1$.

El conjunto formado por las trasposiciones de la definición anterior forma una *cadena de longitud impar* de trasposiciones. El siguiente teorema nos garantiza la existencia y la forma implícita de obtener sucesores y antecesores; se conoce como el *Teorema de Bernhardt* para permutaciones simples de orden una potencia de dos.

Teorema 3.10 (Chris Bernhardt, [2])**.** *Sean $\eta \in Sim\left(2^{n+1}\right)$, $\theta \in Sim\,(2^n)$ y $\phi \in Sim\left(2^{n-1}\right)$. Si $\eta \triangleleft \theta \triangleleft \phi$, entonces $\eta = \theta^* \circ \rho_{i_1} \circ \ldots \circ \rho_{i_{2m-1}}$ y $\phi = \theta_*$.*

Nota 3.11. La permutación ϕ se denomina *el antecesor* de θ y la permutación η se denomina *un sucesor* de θ. Es claro que θ^* no pertenece a $C_{2^{n+1}}$, mientras que θ_* es simple de orden 2^n. Esta última afirmación se verá en la prueba del teorema, así como también el hecho de que el antecesor de una permutación simple es único.

Ejemplo 3.12. Sea $\theta = (1,5,3,7,2,6,4,8) \in Sim(8)$, obtenemos $\theta_* = \phi = (1,3,2,4) \in Sim(4)$ y $\theta^* = (1,9,5,13,3,11,7,15)(2,10,6,14,4,12,8,16) \notin C_{16}$; un sucesor es $\eta = \theta^* \circ \rho_8 = (1,9,5,13,3,11,7,15,2,10,6,14,4,12,8,16) \in Sim(16)$.

Demostración. Sea $\theta \in Sim\,(2^n)$ y $\eta = \theta^* \circ \rho_{i_1} \circ \ldots \circ \rho_{i_{2m-1}}$. Debido a que $\theta \in C_{2^n}$, $\eta^k\left(\{1,2\}\right) \cap \{1,2\} = \emptyset$ para $1 \leq k < 2^n$ y $\eta^{2^k}\left(\{1,2\}\right) = \{1,2\}$. Luego $\left(\eta^{2^n}(1), \eta^{2^n}(2)\right) = e_2$ ó $\left(\eta^{2^{n+1}}(1), \eta^{2^{n+1}}(2)\right) = e_2$, donde e_2 es la permutación idéntica de orden dos. Ahora bien,

$$\left(\eta^{2^n}(1), \eta^{2^n}(2)\right) = \left(\rho_1^{2m-1}(1), \rho_1^{2m-1}(2)\right) = (1,2)\,,$$

y por consiguiente $\eta \in C_{2^{n+1}}$. Como θ es simple y $\eta \in C_{2^{n+1}}$, por la construcción de η se sigue que

$$\eta^{2^n}\left[P\left(2^{n+1},2^n,i\right)\right]=P\left(2^{n+1},2^n,i\right),$$

$$\theta^{2^n}\left[P\left(2^{n+1},2^{n+1},i\right)\right]\cap P\left(2^{n+1},2^{n+1},i\right)=\emptyset,$$

luego $\eta \in Sim\left(2^{n+1}\right)$.

Supongamos ahora que la permutación $\eta \in Sim(2^{n+1})$. Puede verse que si $\theta_1^* \circ \rho_{i_1} \circ \ldots \circ \rho_{i_{2m-1}} = \theta_2^* \circ \rho_{j_1} \circ \ldots \circ \rho_{j_{2k-1}}$, entonces $\theta_1^* = \theta_2^*$ y $\{\rho_{j_1},\ldots,\rho_{j_{2k-1}}\} = \{\rho_{i_1},\ldots,\rho_{i_{2m-1}}\}$, siempre que las cadenas de trasposiciones no contengan repeticiones. Como el número de formas para escoger una cadena de longitud impar de trasposiciones distintas es 2^{2^n-1} y, por el lema de Ho, el número de elementos de $Sim\left(2^n\right)$ es $2^{2^n-(n+1)}$, entonces el número de formas que hay para escoger η es $\left(2^{2^n-(n+1)}\right)\left(2^{2^n-1}\right)=2^{2^{n+1}-(n+2)}$, que corresponde al número de elementos de $Sim\left(2^{n+1}\right)$. Por lo tanto

$$\theta \in Sim\left(2^n\right), \quad \eta = \theta^* \circ \rho_{i_1} \circ \ldots \circ \rho_{i_{2m-1}},$$

y como $\eta_* = (\theta^*)_* = \theta$, se tiene que $\theta_* \in Sim\left(2^{n-1}\right)$, luego $\theta \lhd \theta_*$.

Hemos visto que $\theta \in Sim\left(2^n\right)$. Supongamos ahora que

$$\theta \lhd \varphi_1, \quad \theta \lhd \varphi_2,$$

donde

$$\varphi_1,\varphi_2 \in Sim\left(2^{n-1}\right);$$

entonces en el grafo de Markov asociado a θ existe al menos un lazo de 2^{n-k} vértices que corresponden a puntos periódicos de periodo 2^{n-k}, donde $1 \le k \le n$. Como θ no puede dominar un número infinito de trasposiciones, se tiene que los lazos deben ser distintos y por lo tanto hay un camino que une todos los arcos para formar un lazo de

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^n - 1$$

vértices. Luego este último lazo es único y existe un lazo de longitud 2^{n-k} para cada k, de lo cual $\varphi_1 = \varphi_2$ y podemos concluir que $\phi = \theta_*$. ☑

4. Resultados principales: propiedades y construcción de permutaciones simples

En esta sección se construye explícitamente la genealogía de permutaciones simples de orden una potencia de dos, a partir del pegamiento y la vuelta en ciclos y permutaciones en el grupo S_n. Una técnica similar se ha usado en [7, 6] en el caso del anillo de los números enteros y en el anillo de los polinomios sobre un cuerpo conmutativo.

Definición 4.1 (Pegamiento y vuelta en ciclos y permutaciones)**.** Sea $\theta \in S_n$ tal que $\theta = (u)(v) = (i_1, \ldots, i_k)(i_{k+1}, \ldots, i_n)$, donde $1 \leq k \leq n$, $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, (u) y (v) son ciclos disjuntos. El pegamiento de (u) con (v) es un $n-$ciclo definido por la relación

$$(u) \diamond (v) = (u, v) = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n). \tag{8}$$

La vuelta del ciclo (u) se define como

$$\widetilde{(u)} = (i_k, i_{k-1}, \ldots, i_2, i_1), \text{ si } (u) = (i_1, \ldots, i_k). \tag{9}$$

Sean $\alpha \in S_m$, $\beta \in S_n$ el pegamiento (a izquierda y a derecha) de las permutaciones, $\alpha \in S_m$ y $\beta \in S_n$ son permutaciones de S_{n+m} definidas por:

- el pegamiento a izquierda de α con β, denotado como $\alpha| \diamond \beta$; es una permutación de S_{n+m} dada por

$$\alpha| \diamond \beta = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m & m+1 & \ldots & m+n \\ \alpha(1)+n & \ldots & \alpha(m)+n & \beta(1) & \ldots & \beta(n) \end{pmatrix} \tag{10}$$

- el pegamiento a derecha de α con β, denotado como $\alpha \diamond |\beta$; es una permutación de S_{n+m} dada por

$$\alpha \diamond |\beta = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m & m+1 & \ldots & m+n \\ \alpha(1) & \ldots & \alpha(m) & \beta(1)+m & \ldots & \beta(n)+m \end{pmatrix}. \tag{11}$$

La vuelta de α, denotada por $\tilde{\alpha}$ es una permutación de S_m dada por

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m-1 & m \\ \alpha(m) & \alpha(m-1) & \ldots & \alpha(2) & \alpha(1) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ejemplo 4.2. Sean α, β y γ las permutaciones

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\ \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \\ \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1,2,4)(3,6,5,7) = (u)(v), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\
\alpha| \diamond \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \\
\beta \diamond |\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\alpha}| \diamond \tilde{\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\beta} \diamond |\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \\
\widetilde{\alpha| \diamond \beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \\
(u) \diamond (v) &= (1, 2, 4, 3, 6, 5, 7), \\
\widetilde{(u)} &= (4, 2, 1).
\end{aligned}$$

Nota 4.3. Como consecuencias inmediatas de la definición anterior se tiene que si $\alpha \in S_m$, $\beta \in S_n$, $\gamma \in S_k$, $(u) = (i_1, \ldots, i_{s_1})$, $(v) = (i_1, \ldots, i_{s_2})$, $(w) = (i_1, \ldots, i_{s_3})$, entonces

1. $\tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha$ (si se le da dos veces la vuelta a una permutación se tiene la permutación original),
2. $(\alpha| \diamond \beta) | \diamond \gamma = \alpha| \diamond (\beta| \diamond \gamma)$, $(\alpha \diamond |\beta) \diamond |\gamma = \alpha \diamond | (\beta \diamond |\gamma)$ (asociatividad del pegamiento de permutaciones tanto a izquierda como a derecha),
3. $\widetilde{\alpha| \diamond \beta} = \tilde{\beta} \diamond |\tilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha \diamond |\beta} = \tilde{\beta}| \diamond \tilde{\alpha}$
4. $(\tilde{\tilde{u}}) = (u)$ (si se le da dos veces la vuelta a un ciclo se tiene el ciclo original),
5. $((u) \diamond (v)) \diamond (w) = (u) \diamond ((v) \diamond (w))$ (asociatividad del pegamiento de ciclos)

Proposición 4.4. *Sean $n = 2^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\theta_1 = \phi_1 = (1)$, θ_n y ϕ_n permutaciones definidas como:*

$$\theta_n = e_{\frac{n}{2}} | \diamond \theta_{\frac{n}{2}}, \tag{13}$$

$$\phi_n = \widetilde{e_{\frac{n}{2}}} | \diamond \tilde{\phi}_{\frac{n}{2}} = \widetilde{\phi_{\frac{n}{2}} \diamond |e_{\frac{n}{2}}}, \tag{14}$$

donde la permutación $e_{\frac{n}{2}}$ está dada por

$$e_{\frac{n}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \frac{n-2}{2} & \frac{n}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & \frac{n-2}{2} & \frac{n}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

1. $\varphi = (\theta_n \circ \rho_k) \circ (\phi_n \circ \rho_j)$, $\forall \varphi \in Sim(n)$, *donde* ρ_k *y* ρ_j *son composiciones de trasposiciones de longitud impar,*
2. $\theta_n \cong \phi_n, \quad \theta_{2n} \lhd \theta_n \lhd \theta_{\frac{n}{2}}, \quad \phi_{2n} \lhd \phi_n \lhd \phi_{\frac{n}{2}}$,
3. $\theta_n,\ \phi_n \in Sim(n)$,
4. $(\theta_{2n})_* = \theta_n = \left(\theta_{\frac{n}{2}}\right)^* \circ \rho_{\frac{n}{2}}, \quad (\phi_{2n})_* = \phi_n = \left(\phi_{\frac{n}{2}}\right)^* \circ \rho_1 \ldots \rho_{\frac{n-2}{2}}$.

Nota 4.5. La proposición 4.4 indica que el ordenamiento parcial restringido a $\bigcup_n Sim\,(2^n)$, para las permutaciones θ_n y ϕ_n, da lugar a las ramas principales de un árbol, pudiéndose determinar inmediatamente quiénes son sus antecesores y sucesores. Usaremos la notación $a \hookrightarrow b$ para indicar que a es el *antecesor inmediato* de b. De esta forma, se observa que $\theta_2 = \phi_2$, luego θ_4 y ϕ_4 tienen el mismo antecesor, pero sus sucesores son respectivamente θ_8 y ϕ_8. Procediendo inductivamente, se tienen las ramas principales

$$\theta_1 \hookrightarrow \theta_2 \hookrightarrow \theta_4 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \theta_{2^k} \hookrightarrow \ldots$$

$$\phi_1 \hookrightarrow \phi_2 \hookrightarrow \phi_4 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \phi_{2^k} \hookrightarrow \ldots$$

Se prueba ahora sí la proposición 4.4.

Demostración de la proposición 4.4. En primer lugar, debido a que $k = 2^{n+1}$, puede verse que las fórmulas (13) y (14) se expanden como

$$\theta_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \frac{n}{2} & \frac{n+2}{2} & \frac{n+4}{2} & \ldots & n \\ \frac{n+2}{2} & \frac{n+4}{2} & \frac{n+6}{2} & \ldots & n & \theta_{\frac{n}{2}}(1) & \theta_{\frac{n}{2}}(2) & \ldots & \theta_{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right) \end{pmatrix},$$
$$\phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \frac{n-2}{2} & \frac{n}{2} & \frac{n+2}{2} & \frac{n+4}{2} & \ldots & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & \frac{n+4}{2} & \frac{n+2}{2} & \phi_{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right) & \phi_{\frac{n}{2}}\left(\frac{n-2}{2}\right) & \ldots & \phi_{\frac{n}{2}}(1) \end{pmatrix}.$$

Entonces

1. consecuencia inmediata del teorema de Bernhardt (Teorema 3.10),
2. consecuencia de $\theta_n,\ \phi_n \in C_n$ y de la nota 2.8,
3. por la definición 4.1, la nota 4.3 y como $n = 2^{k+1}$, se tiene
$$\theta_{2^{k+1}}^{2^j} = \theta_{2^k}^{2^{j-1}} \diamond |\theta_{2^k},$$
así que para $1 \le i \le 2^j$, $0 \le j \le k$ y $\varphi_{2^k}(m) = 2^k + \theta_{2^k}(m)$,
$$\begin{aligned} \theta_{2^{k+1}}^{2^j}\left[P\left(2^{k+1}, 2^j, i\right)\right] &= \theta_{2^k}^{2^{j-1}}\left[P\left(2^{k+1}, 2^{j-1}, i\right)\right] \cup \varphi_{2^k}\left[P\left(2^{k+1}, 2^j, 2^{j-1}+i\right)\right] \\ &= \left[P\left(2^{k+1}, 2^{j-1}, i\right)\right] \cup \left[P\left(2^{k+1}, 2^j, 2^{j-1}+i\right)\right] \\ &= P\left(2^{k+1}, 2^j, i\right), \end{aligned}$$
además,
$$\theta_{2^k}^{2^{j-1}}\left[P\left(2^{k+1}, 2^{j-1}, i\right)\right] \cap \varphi_{2^k}\left[P\left(2^{k+1}, 2^j, 2^{j-1}+i\right)\right] = \emptyset,$$
de lo cual se tiene que
$$\theta_{2^{k+1}}^{2^j}\left[P\left(2^{k+1}, 2^j, i\right)\right] \cap P\left(2^{k+1}, 2^{j+1}, i\right) = \emptyset,$$
y por lo tanto $\theta_{2^{k+1}}$ es una permutación simple. Mediante el mismo razonamiento se demuestra que $\phi_{2^{k+1}}$ es una permutación simple.

4. Como θ_n y ϕ_n son permutaciones simples, el teorema de Bernhardt garantiza la existencia del único antecesor y al menos un sucesor. Usando las definiciones 3.5 y 3.6 se procede inductivamente y se obtiene el resultado deseado.

Como consecuencia se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4.6. *Si α es una permutación simple de orden $n = 2^{k+1}$, entonces $\alpha^2 = (\alpha)_* \diamond |\alpha_*$, donde α_* es el antecesor de α. Además, si θ_n es como en la ecuación* (13) *y ϕ_n es como en la ecuación* (14)*, entonces existen dos pares de ciclos disjuntos (u_1), (u_2) y (v_1), (v_2) y una permutación $\eta_{2n} \in Sim(2n)$, $\eta_{2n} \neq \phi_{2n}$ tales que $(\theta_n)^* = (u_1)(u_2)$, $\theta_{2n} = (u_1) \diamond (u_2)$ y $(\phi_n)^* = (v_1)(v_2)$, $\eta_{2n} = (v_1) \diamond (v_2)$.*

Ejemplo 4.7 (Genealogía de θ_n)**.**

$$(1) \hookrightarrow (1,2) \hookrightarrow (1,3,2,4) \hookrightarrow (1,5,3,7,2,6,4,8)$$
$$\hookrightarrow (1,9,5,13,3,11,7,15,2,10,6,14,4,12,8,16) \hookrightarrow \dots$$

Ejemplo 4.8 (Genealogía de ϕ_n)**.**

$$(1) \hookrightarrow (1,2) \hookrightarrow (1,4,2,3) \hookrightarrow (1,8,4,5,2,7,3,6)$$
$$\hookrightarrow (1,16,8,9,4,13,5,12,2,15,7,10,3,14,6,11) \hookrightarrow \dots$$

5. Conclusiones

Las permutaciones de la proposición 4.4 satisfacen las condiciones del teorema de Bernhardt y por lo tanto tal proposición se puede considerar como un corolario. Además, al utilizar cualquier permutación de la proposición 4.4, el lema 3.1, el lema 3.3, el corolario 4.6 y las trasposiciones de la definición 3.9 podemos construir un árbol completo con todas las permutaciones simples de orden una determinada potencia de dos, observando así cual es el antecesor y los sucesores de cada permutación.

De otra parte, si suponemos que el reino ideal $(Sim\,(2^n))$ fue fundado por el rey θ_1, éste tiene como único sucesor al rey θ_2. Luego el rey θ_2 tiene dos sucesores que son θ_4 y ϕ_4, pero el trono es heredado por θ_4 mientras que ϕ_4 sólo recibe una parte del reino y así sucesivamente el trono lo hereda $\theta_{2^{k+1}}$ ya que

$$\theta_{2^{k+1}} = (\theta_{2^k})^* \circ \rho_{2^k},$$

lo cual indica que basta aplicar una trasposición a la permutación θ^* para obtener el sucesor más parecido al antecesor θ. El resto del reino lo heredan los demás sucesores de tal forma que el que menos recibe es ϕ_{2^k} puesto que

$$\phi_{2^{k+1}} = (\phi_{2^k})^* \circ \rho_1 \dots \rho_{2^k-1},$$

es decir, hay que aplicar $2^k - 1$ trasposiciones a la permutación ϕ^* para obtener el sucesor más parecido al antecesor ϕ. Como era de esperarse, la mitad de los sucesores $\theta \in Sim\left(2^k\right)$, miembros del reino, corresponden a iteraciones de θ_{2^k} y la otra mitad a iteraciones de ϕ_{2^k}, (lema 3.3), es decir

$$Sim\left(2^k\right) = \Theta_{2^k} \cup \Phi_{2^k} = \left\{\theta_{2^k}^{2m+1} : \quad m \in \mathbb{Z}^+\right\} \cup \left\{\phi_{2^k}^{2m+1} : \quad m \in \mathbb{Z}^+\right\},$$

$$Card\left(\Theta_{2^k}\right) = Card\left(\Phi_{2^k}\right) = 2^{2^k - k - 2}.$$

También hay que decir que θ_n y ϕ_n son las ramas extremas del árbol genealógico del reino $Sim(n)$.

Finalmente, quedan al lector interesado las siguientes preguntas: ¿cómo es la fórmula combinatoria para obtener la genealogía de permutaciones simples de orden mixto?, ¿se pueden encontrar ejemplos explícitos de funciones continuas que tengan como órbita permutaciones simples?, ¿qué propiedades cumplen estas funciones?. Estas cuestiones no pudieron ser abordadas en este artículo, pero pueden dar origen a futuras investigaciones.

Agradecimientos. El autor desea agradecer al profesor Pere Mumbrú (Q.E.P.D.) por su asesoría durante y después del curso de doctorado que dio lugar a este artículo como trabajo final de su asignatura; a Chris Bernhardt por su colaboración para demostrar el lema de Ho; a Lluis Alsedá por la eficaz revisión de la versión de este escrito; a la Universidad Sergio Arboleda por el apoyo recibido para participar en el XV Congreso Nacional de Matemáticas, Bogotá, 2005. Finalmente, el autor también agradece las valiosas observaciones de sus estudiantes de la XIV promoción de la especialización en matemática aplicada con énfasis en sistemas dinámicos de la Universidad Sergio Arboleda (en especial a Camilo Vargas y Sergio Carrillo) y, por supuesto, a los anónimos revisores científico y literario.

Referencias

[1] Alsedá, L., Llibre, J., and Misiurewicz, M. *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, vol. 5 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing, 2000.

[2] Bernhardt, C. Simple permutations with order a power of two. *Ergodic Theory and Dynamical Systems 4* (1984), 179–186.

[3] Block, L. Simple periodic orbits or mappings of the interval. *Trans. Amer. Math. Soc. 254* (1979), 391–398.

[4] Block, L. *Dynamic in one dimension*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1986.

[5] Ho, C. On the structure of minimum orbits of periodic points for maps on the real line. Preprint.

[6] Humánez, P. A. On pasting and reversing operations over some rings. Preprint.

[7] Humánez, P. A. La operación pegamiento y el cuadrado de los números naturales. *Civilizar 3* (2003), 85–97.

(Recibido en agosto de 2006. Aceptado en septiembre de 2007)

Departamento de Matemática Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, CP 08034
Barcelona, España
e-mail: primitivo.acosta@upc.edu