Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 44(2010)2, páginas 129-147

Representación de medidas vectoriales

Representation of Vector Measures

Martha Guzmán-Partida

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Resumen. En este artículo panorámico se presentan cuatro versiones equivalentes de la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach: el teorema de representación de Riesz, el teorema de Lewis-Stegall, un teorema sobre diferenciabilidad de funciones absolutamente continuas y una caracterización geométrica del espacio.

Palabras y frases clave. Medidas vectoriales, integral de Bochner, propiedad de Radon-Nikodým.

2000 Mathematics Subject Classification. 46G10, 46G12.

Abstract. In this survey article, we give four equivalent classical versions of the Radon-Nikodým property for Banach spaces, namely, the Riesz representation theorem, the Lewis-Stegall theorem, a result on differentiability of absolutely continuous functions and finally, a geometric characterization of the Banach space.

Key words and phrases. Vector measures, Bochner integral, Radon-Nikodým property.

1. Introducción

Uno de los resultados más representativos de la teoría de integración de Lebesgue lo constituye el teorema de Radon-Nikodým, el cual establece condiciones necesarias y suficientes para que una medida escalar λ sea representable como una integral indefinida de Lebesgue con respecto a otra medida escalar μ, esto es, para poder expresar $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ para alguna función medible f y para todo conjunto medible E. Se puede demostrar que la condición requerida para que esto suceda es que λ sea absolutamente continua con respecto a μ; es decir, que $\lambda(E)$ se anule siempre que $\mu(E) = 0$. El teorema de Radon-Nikodým es una especie de teorema fundamental del Cálculo, que bajo condiciones adecuadas para cada uno de los elementos participantes en esta representación, se convierte en el clásico teorema de Cálculo.

En 1913, Johann Radon formuló la primera versión de este teorema de representación y posteriormente, Otton Nikodým en 1930, generalizó el resultado probado por Radon, eliminando algunas hipótesis que lo restringían innecesariamente. Unos pocos años después de haberse publicado el resultado de Nikodým, empezaron a formularse algunas preguntas en relación a la diferenciabilidad de funciones absolutamente continuas en el intervalo $[0, 1]$ y con valores en un espacio de Banach X. Fue así como J. Clarkson en el año de 1936 introdujo la noción de espacios uniformemente convexos con el objeto de demostrar que todas las funciones absolutamente continuas en $[0, 1]$ con valores en un espacio uniformemente convexo resultan ser las integrales de sus derivadas. En este resultado, se encuentra implícita una versión general de la clásica integral de Lebesgue, a saber, la integral de Bochner, llamada así en honor al matemático Salomon Bochner quien la introdujo en el año de 1933, con el objeto de integrar funciones con valores en un espacio de Banach con respecto a medidas positivas. Usando ideas de teoría de la medida vectorial, Clarkson pudo demostrar que algunos de los espacios de Banach familiares no admitían normas equivalentes uniformemente convexas. Por la misma época, N. Dunford y A. Morse introdujeron cierta clase $\mathcal{C}$ de bases de Schauder para poder demostrar que toda función absolutamente continua definida en un subconjunto del espacio euclidiano y con valores en un espacio de Banach con una base de Schauder en $\mathcal{C}$, podía representarse como la integral de Bochner de su derivada.

El estudio de las propiedades de diferenciación de funciones definidas en subconjuntos del espacio euclidiano y con valores en un espacio de Banach X, destacó la importancia del papel jugado por X. En algunos ejemplos de integrales de Bochner era posible obtener diferenciabilidad casi en todas partes, sin importar la naturaleza de X; en otros, las propiedades de diferenciabilidad dependían completamente del espacio imagen como subconjunto de X. Estas observaciones dieron lugar al surgimiento de teoremas tipo Radon-Nikodým. Fueron N. Dunford en 1936 y N. Dunford y B. Pettis en 1940 quienes publicaron las primeras versiones de un teorema de este tipo para espacios de Banach X que son espacios duales. Junto al estudio de problemas relativos a la diferenciación de funciones con valores vectoriales, surgen algunos resultados relativos a la representación de operadores lineales por medio de integrales; desafortunadamente la teoría de funciones con valores en un espacio de Banach sufre un largo receso durante y después de la segunda guerra mundial y es hasta fines de los años cincuenta del siglo pasado que esta teoría resurge con fuerza con el trabajo de A. Grothendieck, R. Bartle, N. Dunford y J. Schwartz, quienes retoman la vieja teoría de la medida vectorial de fines de los treinta y principios de los cuarenta para abordar el estudio de operadores lineales. A mediados de los sesenta, N. Dinculeanu realizó un estudio riguroso de una gran cantidad de resultados de teoría de la medida vectorial que se habían obtenido hasta entonces, compilándolos en una monografía ([6]), hecho que sirvió para reavivar el interés y detonar el desarrollo de la teoría de espacios de Banach. La noción de medida vectorial es central en el estudio de esta teoría; está indisolublemente ligada al estudio de series, integrales, diferenciación, teoremas tipo Radon-Nikodým, representación y clasificación de operadores lineales entre cierto tipo de espacios y clasificación de espacios de Banach.

El interés que nos ocupa en el presente artículo es la representación integral de cierto tipo de medidas vectoriales, o para ser más precisos, la formulación de algunas versiones equivalentes al teorema de Radon-Nikodým para espacios de Banach. Como se ha mencionado anteriormente, este resultado no es válido en general para cualquier espacio normado completo, por lo que la clase de espacios donde este teorema se verifica es conocida como la familia de espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým.

En este trabajo presentaremos cuatro versiones equivalentes de la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio X: el teorema de representación de Riesz para operadores lineales en L^1 y con valores en X, el teorema de Lewis-Stegall sobre factorización a través de l^1 de operadores lineales en L^1 que toman valores en X, un resultado sobre diferenciabilidad casi en todas partes de funciones absolutamente continuas $f : [0,1] \to X$ y una caracterización geométrica del espacio en términos de dicha propiedad.

Es necesario mencionar que existen diversas caracterizaciones de la propiedad de Radon-Nikodým para un espacio de Banach X. Algunas de ellas establecen simplemente propiedades de factorización de ciertos operadores lineales, otras aseguran la existencia de máximos de funcionales lineales acotados en ciertos subconjuntos de X; asimismo, otras caracterizaciones describen de algún modo la geometría del espacio de Banach, o establecen convergencia en L^1 de martingalas uniformemente integrables, acotadas en L^1 y con valores en X, o bien, aseguran la existencia de límites radiales de funciones armónicas definidas en el disco unitario y con rango en X. Éstas y otras formulaciones pueden consultarse en [1], [2], [3], [4] y [5].

Existen generalizaciones muy interesantes de la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach, tal es el caso de la propiedad analítica de Radon-Nikodým cuyo objetivo es clasificar aquellos espacios de Banach para los cuales toda medida vectorial con valores en dicho espacio y con coeficientes de Fourier cero para frecuencias negativas, sea representable como una integral de Bochner. Algunas equivalencias de esta propiedad aseguran la existencia de límites radiales de funciones analíticas definidas en el disco unitario y con valores en X (ver [2], [4]) o bien, existencia de límites radiales de funciones conjugadas de temperatura definidas en el cuadrado unitario y con valores en X (ver [8]), así como también convergencia de toda martingala analítica acotada en L^1 ([7]), o bien, separabilidad del espacio de martingalas analíticas acotadas en L^p y con valores en X ([11]). Aunque no tendremos oportunidad de abordar esta propiedad en el presente manuscrito, puede resultar motivante para el lector conocer algunos de estos resultados que en la actualidad continúan siendo objeto de estudio e investigación. Este artículo está organizado en seis secciones. En la segunda sección introducimos la herramienta y resultados estrictamente necesarios para establecer el planteamiento correspondiente al enunciado del teorema de Radon-Nikodým. Asimismo, destacaremos algunos ejemplos que nos ilustrarán la trascendencia de dicho problema. En las siguientes secciones iremos estableciendo cada una de las caracterizaciones a las que nos referimos en párrafos anteriores.

2. Medidas vectoriales e integral de Bochner

Sean X un espacio de Banach, Ω un conjunto no vacío y Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Diremos que una función $\nu : \Sigma \to X$ es una *medida vectorial* (o medida vectorial σ-aditiva) si $\nu(\varnothing) = 0$ y

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

para cada colección $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ de elementos de Σ, ajenos por pares.

Debe notarse que para que esta definición tenga sentido, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$ debe converger incondicionalmente en X. En alguna literatura (como [5] y [6]), se utiliza la expresión medida vectorial σ-aditiva o medida vectorial numerablemente aditiva para designar a una función como ν, mientras que la expresión medida vectorial se utiliza solamente cuando la función de conjunto es finitamente aditiva. Por ejemplo, si Σ es la σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue medibles de $[0, 1]$, la función $\nu_\infty : \Sigma \to L^\infty[0, 1]$ definida como $\nu_\infty(E) = \chi_E$ es sólo finitamente aditiva, mientras que la función $\nu_p : \Sigma \to L^p[0, 1]$, $1 \le p < \infty$, definida como $\nu_p(E) = \chi_E$ es σ-aditiva. También, la función $\tau : \Sigma \to X$ tal que $\tau(E) = T(\chi_E)$, donde $T : L^1[0, 1] \to X$ es un operador lineal continuo, es σ-aditiva.

La *variación* $|\nu|$ de ν es la medida no negativa definida en el espacio medible (Ω, Σ) como

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum\nolimits_j \|\nu(E_j)\|_X\right\},$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto de todas las particiones finitas de E en subconjuntos medibles E_j. Cuando $|\nu|(\Omega) < \infty$, diremos que ν es una *medida de variación acotada* (o variación finita). Posiblemente, los siguientes ejemplos nos ayuden a entender el alcance de esta restricción para ν:

a) Si $\Omega = \mathbb{N}$ y $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ entonces cualquier medida ν en Σ está determinada por alguna elección de vectores $x_i \in X$ tal que $x_i = \nu(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge incondicionalmente en X. Así ν será de variación acotada si y sólo si la serie converge absolutamente, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_X < \infty$.

b) Si Σ es la σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue medibles de $[0,1]$, $X = L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ y $\nu_p : \Sigma \to X$ está definida como antes, entonces ν_p tiene variación acotada si y sólo si $p = 1$.

Diremos que la medida de variación acotada $\nu : \Sigma \to X$ es *absolutamente continua* con respecto a la medida no negativa y finita μ (o también decimos que ν es μ-continua), lo cual escribiremos $\nu \ll \mu$, si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

c_1. $|\nu| \ll \mu$.

c_2. $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$.

c_3. $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta \Longrightarrow |\nu|(E) < \varepsilon$.

Notemos que, en particular, $\nu \ll |\nu|$.

Enseguida abordaremos el concepto de medibilidad vectorial. En lo sucesivo, μ representará siempre una medida no negativa finita definida en una σ-álgebra Σ de subconjuntos de Ω.

Una *función simple* $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$, $x_i \in X$, se llama *medible* si $E_i \in \Sigma$ para cada $i = 1, \ldots, n$. De manera general, una función $f : \Omega \to X$ se llama medible (o fuertemente medible) si existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles tal que $\|f_n(\omega) - f(\omega)\|_X \to 0$ cuando $n \to \infty$ para casi toda $\omega \in \Omega$.

Un resultado muy famoso conocido como *teorema de medibilidad de Pettis* establece que $f : \Omega \to X$ es medible si y sólo si se cumplen cada una de las siguientes condiciones:

i) f es débilmente medible, esto es, para cada $x^* \in X^*$, la función escalar $\langle x^*, f(\cdot)\rangle$ es medible en el sentido usual.

ii) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ tal que $f(\Omega \setminus E)$ es un subconjunto separable de X.

Ahora, veremos como integrar funciones vectoriales. Cuando f es una función simple, digamos $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$, definimos

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i).$$

En general, si $f : \Omega \to X$ es una función medible, diremos que f es *Bochner integrable* si existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles que converge a f casi en todas partes y tal que

$$\int_{\Omega} \|f_n - f_m\|_X \, d\mu \to 0 \quad \text{si} \quad m, n \to \infty.$$

Dado que $\| \int_\Omega f_n\, d\mu - \int_\Omega f_n\, d\mu\|_X \leq \int_\Omega \|f_n - f_m\|_X\, d\mu$, podemos definir la *integral de Bochner* de f como

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Para $E \in \Sigma$ definimos $\int_E f\, d\mu = \int_\Omega f\chi_E\, d\mu$.

Se puede verificar fácilmente que este límite no depende de la elección de la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$, que $\int_\Omega \|f\|_X\, d\mu < \infty$ y que $\| \int_\Omega f\, d\mu\|_X \leq \int_\Omega \|f\|_X\, d\mu$. De hecho, es sencillo demostrar que $f : \Omega \to X$ es Bochner integrable si y sólo si f es medible y $\int_\Omega \|f\|_X\, d\mu < \infty$.

El espacio de clases de equivalencia de funciones Bochner integrables $f : \Omega \to X$ con la norma $\|f\|_1 = \int_\Omega \|f\|_X\, d\mu$ se denota por $L^1(\mu, X)$. Los espacios $L^p(\mu, X)$, $1 < p \leq \infty$ se definen de manera natural.

Las propiedades de la integral de Bochner son similares a las propiedades conocidas en el caso escalar. Por ejemplo:

P_1: Se puede demostrar el teorema de convergencia dominada para estas integrales.

P_2: Si $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ entonces ν es una medida vectorial μ-continua y de variación acotada y $|\nu|(E) = \int_E \|f\|_X\, d\mu$.

P_3: Si $f : \Omega \to X$ es Bochner integrable, Y es un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ entonces $T \circ f : \Omega \to Y$ es Bochner integrable y $\langle T, \int_\Omega f\, d\mu\rangle = \int_\Omega (T \circ f)\, d\mu$.

P_4: Si $f : [0, 1] \to X$ es Bochner integrable en $[0, 1]$ con respecto a la medida de Lebesgue, entonces para casi toda $s \in [0, 1]$ se verifica

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\|_X\, dt = 0$$

y por consiguiente

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t)\, dt = f(s)$$

para casi toda $s \in [0, 1]$.

Cuando X sea el campo de escalares, escribiremos simplemente $L^p(\mu)$.

3. La propiedad de Radon-Nikodým

La cuestión que nos interesa indagar en este artículo puede formularse así: ¿Cuándo una medida vectorial resulta ser una integral de Bochner indefinida? Para poder responder esta pregunta, iniciaremos la presente sección con algunos ejemplos que nos permitirán introducir de manera natural la condición requerida por el espacio de Banach X, a saber, la propiedad de Radon-Nikodým.

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y ν es la medida vectorial

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu,$$

para alguna función $f : \Omega \to X$ Bochner integrable, sabemos que ν es μ-continua y de variación acotada en Σ.

Recíprocamente, supongamos que $\nu : \Sigma \to X$ es cualquier medida vectorial μ-continua y de variación acotada cuyo rango es un subespacio Y de dimensión finita de X. Como en dimensión finita todas las normas son equivalentes, podemos suponer sin pérdida de generalidad que Y es el espacio euclidiano K^n (donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$); así $\nu : \Sigma \to K^n$, por lo que $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ donde $\nu_j : \Sigma \to K$ es una medida escalar μ-continua y de variación acotada para cada $j = 1, \ldots, n$. Por el teorema de Radon-Nikodým para medidas escalares podemos encontrar funciones $f_1, \ldots, f_n \in L^1(\mu)$ tales que para cada $E \in \Sigma$ y cada $j = 1, \ldots, n$

$$\nu_j(E) = \int_E f_j \, d\mu,$$

De aquí se obtiene la representación

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

donde f es la función integrable $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to K^n$.

En general, esto no ocurre para cualquier integral de Bochner, como lo veremos a continuación.

Ejemplo 1. Sea $d\mu = dt$ la medida de Lebesgue en [0,1] y Σ la familia de Lebesgue medibles de [0,1]. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\lambda_n : \Sigma \to \mathbb{R}$ por

$$\lambda_n(E) = \int_E \operatorname{sen}(2^n \pi t) \, dt.$$

Si $E \in \Sigma$, sea $\lambda(E) = \big(\lambda_n(E)\big)_{n=1}^{\infty}$. Usando el lema de Riemann-Lebesgue podemos demostrar que λ es una medida vectorial con valores en el espacio de sucesiones c_0; además resulta ser μ-continua y de variación acotada.

Supongamos que existe una función Bochner integrable $f : [0,1] \to c_0$ tal que para cada subconjunto medible E de $[0,1]$ se tiene

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Si expresamos $f = (f_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $f_n : [0,1] \to K$, vemos que cada f_n es una función medible pues $f_n = \Lambda_n \circ f$, con $\Lambda_n : c_0 \to K$ definido por

$\Lambda_n(x) = x_n$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, el cual es un funcional lineal continuo. Además, se tiene la representación para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $E \in \Sigma$

$$\lambda_n(E) = \int_E f_n(t)\, dt.$$

Se sigue de lo anterior que $f_n(t) = \operatorname{sen}(2^n \pi t)$ para casi toda $t \in [0,1]$.

Si ahora consideramos los conjuntos

$$E_n = \bigl\{t \in [0,1] : f_n(t) \geq 1/\sqrt{2}\bigr\},$$

podemos demostrar que $\mu(E_n) = 1/4$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, puesto que

$$\{t \in [0,1] : f(t) \notin c_0\} = \operatorname{lím\,sup} E_j$$

obtenemos

$$\mu\bigl(\{t \in [0,1] : f(t) \notin c_0\}\bigr) \geq \operatorname{lím\,sup} \mu(E_j) = 1/4$$

y de esto resulta que

$$\mu\bigl(\{t \in [0,1] : f(t) \in c_0\}\bigr) \leq 3/4$$

lo cual es imposible. Por tanto, λ resulta ser una medida vectorial con valores en c_0, μ-continua y de variación acotada que no posee derivada de Radon-Nikodým respecto a μ.

Ejemplo 2. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita sin átomos. Si definimos $\nu : \Sigma \to L^1(\mu)$ como $\nu(E) = \chi_E$ entonces ν es una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Si existiera una función Bochner integrable $g : \Omega \to L^1(\mu)$ tal que

$$\nu(E) = \int_E g\, d\mu$$

para cada $E \in \Sigma$, entonces definiendo el operador $T : L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)$ como $T(f) = \int_\Omega fg\, d\mu$, vemos que T es un operador compacto por lo que $\{T(\chi_E) : E \in \Sigma\}$ es un subconjunto relativamente compacto de $L^1(\mu)$; pero por otra parte, puesto que μ no tiene átomos podemos encontrar una sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$, tal que $\mu(E_n) = \mu(\Omega)/2$ y $\mu(E_n \triangle E_m) = \mu(\Omega)/4$ si $m \neq n$, por lo que $\|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}\|_1 = \mu(E_n \triangle E_m) = \mu(\Omega)/4$ y así $\{T(\chi_{E_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ no posee subsucesión convergente, lo cual es absurdo.

De nueva cuenta, se tiene un ejemplo de una medida vectorial μ-continua y de variación acotada sin derivada de Radon-Nikodým respecto a μ.

En el mismo sentido, tenemos el siguiente:

Ejemplo 3. Sea $X = C[0,1]$, $d\mu = ds$ la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y Σ la familia de Lebesgue medibles de $[0,1]$. Defínase $\nu : \Sigma \to X$ como $\nu(E)(t) =$

$\mu\big(E \cap [0,t]\big)$. Entonces $|\nu| = \mu$ por lo que claramente ν es μ-continua y de variación acotada. Si pudiéramos representar para cada $E \in \Sigma$

$$\mu\big(E \cap [0,t]\big) = \int_E f(s,t)\,ds,$$

entonces necesariamente $f(s,t) = 1$ para casi toda $s \leq t$ y $f(s,t) = 0$ para casi toda $s > t$. Pero en tal caso, $f(s,\cdot) \notin X$, lo cual es imposible.

Como en el caso escalar, existe una relación muy cercana entre la existencia de derivadas de Radon-Nikodým y la representabilidad de operadores lineales en el espacio L^1. Los siguientes ejemplos nos muestran esta situación:

Ejemplo 4. Sea (Ω,Σ,μ) el espacio de Lebesgue correspondiente a $[0,1]$ y definamos $T : L^1(\mu) \to c_0$ como

$$Tf = \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sen}(2^n\pi t)\,d\mu(t)\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Entonces $T \in \mathcal{L}\big(L^1(\mu), c_0\big)$ y el ejemplo 1 nos permite demostrar que es imposible encontrar una función $g \in L^\infty(\mu, c_0)$ tal que

$$Tf = \int_0^1 fg\,d\mu$$

para cada $f \in L^1(\mu)$. Así, el operador T no es representable.

Ejemplo 5. Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita sin átomos y T el operador identidad en $L^1(\mu)$. Si existiera $g \in L^\infty\big(\mu, L^1(\mu)\big)$ tal que

$$f = Tf = \int_\Omega fg\,d\mu$$

para cada $f \in L^1(\mu)$, en particular tendríamos que $\chi_E = \int_E g\,d\mu$ para cada $E \in \Sigma$, lo cual es imposible de acuerdo al ejemplo 2 y esto muestra que T no es representable.

Las relaciones existentes entre los ejemplos 1 y 4 y entre los ejemplos 2 y 5, no son meramente accidentales, como lo veremos a continuación. Antes requerimos dar las siguientes definiciones.

Definición 1. Diremos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto al espacio de medida (Ω,Σ,μ) si para cada medida vectorial $\nu : \Sigma \to X$, μ-continua y de variación acotada, existe una función $g \in L^1(\mu, X)$ tal que $\nu(E) = \int_E g\,d\mu$ para cada $E \in \Sigma$.

Diremos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým si X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a cada espacio de medida finita.

Definición 2. Diremos que un operador lineal acotado $T : L^1(\mu) \to X$ es Riesz representable (o representable) si existe una función $g \in L^\infty(\mu, X)$ tal que $Tf = \int_\Omega fg\, d\mu$ para cada $f \in L^1(\mu)$.

De acuerdo a los ejemplos 1 y 2, c_0 no tiene la propiedad de Radon-Nikodým y $L^1(\mu)$ tampoco, si μ no tiene átomos. Asimismo, los ejemplos 4 y 5 exhiben operadores lineales con valores en c_0 y en $L^1(\mu)$, respectivamente, que no son representables.

El siguiente resultado establece una relación fundamental entre ambas propiedades. Su demostración es directa y sencilla y la omitimos.

Proposición 1. *Dado $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu), X)$, defínase $\lambda : \Sigma \to X$ como $\lambda(E) = T(\chi_E)$. Entonces T es representable si y sólo si existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que para cada $E \in \Sigma$*

$$\lambda(E) = \int_E g\, d\mu.$$

En tal caso, $g \in L^\infty(\mu, X)$ y para cada $f \in L^1(\mu)$ se tiene que

$$T(f) = \int_\Omega fg\, d\mu.$$

Además $\|T\| = \|g\|_\infty$.

La conexión precisa entre las propiedades definidas anteriormente se establece en el siguiente teorema cuya prueba esbozaremos de manera muy general.

Teorema 1. *Sea X un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Entonces X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ) si y sólo si cada operador $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu), X)$ es representable.*

Demostración. Si $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu), X)$ y definimos $\lambda(E) = T(\chi_E)$ en Σ, obtenemos una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ), existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que $\lambda(E) = \int_E g\, d\mu$ y por la proposición 1 concluimos que T es representable.

Recíprocamente, sea $\lambda : \Sigma \to X$ una medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Aplicando el teorema de descomposición de Hahn a las medidas escalares $|\lambda|$ y μ, es posible encontrar una sucesión $(E_n)_{n=1}^\infty$ de conjuntos ajenos de Σ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ y una sucesión de operadores $(T_n)_{n=1}^\infty$ definidos en la clase de funciones simples escalares tales que

$$T_n(f) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \lambda(E_n \cap A_j)$$

si $f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$. Cada T_n puede extenderse a un operador en $\mathcal{L}\big(L^1(\mu), X\big)$ y así, existe $g_n \in L^\infty(\mu, X)$ tal que

$$T_n(f) = \int_\Omega f g_n \, d\mu.$$

Definiendo $g : \Omega \to X$ como $g(\omega) = g_n(\omega)$ si $\omega \in E_n$ obtenemos una función en $L^1(\mu, X)$ tal que

$$\lambda(E) = \int_E g \, d\mu,$$

esto es, X tiene la propiedad de Radon-Nikodým respecto a (Ω, Σ, μ). ☑

Hasta el momento sólo conocemos dos espacios que no tienen la propiedad de Radon-Nikodým: c_0 y $L^1(\mu)$ cuando μ no tiene átomos. Puede demostrarse que el espacio de sucesiones l^1 tiene la propiedad de Radon-Nikodým, al igual que todo espacio de Hilbert, todo espacio de Banach reflexivo y todo subespacio de un espacio dual separable. También, los espacios de Hardy sobre el disco unitario $H^p(D)$, $1 \leq p < \infty$, y el espacio $\mathcal{L}(l^p, l^q)$, $1 \leq q < p < \infty$, tienen la propiedad de Radon-Nikodým. Por otra parte, los siguientes espacios no tienen la propiedad de Radon-Nikodým: c, l^∞, $L^\infty[0,1]$, $C(\Omega)$ si Ω es un espacio topológico compacto y Hausdorff, $L(X)$ si $X = L^p$. Una lista más amplia de ejemplos puede encontrarse en [5].

Otro hecho interesante de resaltar en torno a la propiedad de Radon-Nikodým lo constituye el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [5]:

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, $1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $L^p(\mu, X)^*$ es isométricamente isomorfo a $L^q(\mu, X^*)$ si y sólo si X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a μ.

4. El teorema de Lewis-Stegall

En esta sección presentaremos otra formulación equivalente de la propiedad de Radon-Nikodým. Esta formulación destaca de manera singular el papel del espacio de sucesiones l^1. Fue establecida de manera implícita por D. Lewis y C. Stegall en 1973 y de manera explícita por H. Rosenthal en 1975.

Teorema 2. *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto al espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) si y sólo si todo operador lineal acotado $T : L^1(\mu) \to X$ admite una factorización $T = LS$,*

$$\begin{tikzcd} L^1(\mu) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & X \\ l^1 \arrow[ur, "L"'] & \end{tikzcd}$$

donde $L : l^1 \to X$ *y* $S : L^1(\mu) \to l^1$ *son operadores lineales continuos.*

En tal caso, para cada $\varepsilon > 0$*, los operadores* L*,* S *pueden escogerse de tal modo que* $\|S\| \leq \|T\| + \varepsilon$ *y* $\|L\| \leq 1$*.*

Demostración. Supongamos que $T : L^1(\mu) \to X$ admite tal factorización. Puesto que l^1 tiene la propiedad de Radon-Nikodým, existe una función Bochner integrable con respecto a μ, $g : \Omega \to l^1$ tal que para cada $f \in L^1(\mu)$ se tiene que

$$S(f) = \int_\Omega fg\, d\mu.$$

Así, para toda $f \in L^1(\mu)$ se verifica

$$T(f) = L(S(f)) = \int_\Omega fL(g)\, d\mu$$

y como para casi toda $\omega \in \Omega$ tenemos que

$$\|L(g(\omega))\|_X \leq \|L\| \|g(\omega)\|_{l^1} \leq \|L\| \|g\|_{L^\infty(\mu, l^1)},$$

entonces $L(g) \in L^\infty(\mu, X)$. Por consiguiente, T es Riesz representable y así X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ).

Recíprocamente, supongamos que X tiene la propiedad de Radon-Nikodým con respecto a (Ω, Σ, μ). Sea $T : L^1(\mu) \to X$ un operador lineal acotado. Puesto que T es representable, existe $g \in L^\infty(\mu, X)$ tal que

$$T(f) = \int_\Omega fg\, d\mu$$

para cada $f \in L^1(\mu)$ y $\|T\| = \|g\|_\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Dado que g es medible, es posible encontrar una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ de funciones medibles que toman una cantidad a lo sumo numerable de valores en X y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|g - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Sean $g_1 = f_1$, $g_n = f_n - f_{n-1}$, $n \geq 2$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| g - \sum_{m=1}^{n} g_m \right\|_\infty = \|g - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{1}$$

Ahora, escribamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$g_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n,k} \chi_{E_{n,k}}$$

donde $(E_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de Σ ajenos por pares.

Nótese también que para cada $n \geq 2$ tenemos

$$\|g_n\| = \|f_n - f_{n-1}\| \leq \|f_n - g\| + \|g - f_{n-1}\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}},$$

por lo que para toda $n \geq 2$,

$$\|x_{n,k}\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}.$$

Enseguida, definamos $S : L^1(\mu) \to l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ mediante

$$S(f)(n,k) = \|x_{n,k}\|_X \int_{E_{n,k}} f \, d\mu$$

para $f \in L^1(\mu)$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|S(f)\|_{l^1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n,k}\|_X \left| \int_{E_{n,k}} f \, d\mu \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{1,k}\|_X \int_{E_{1,k}} |f| d\mu + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n,k}\|_X \int_{E_{n,k}} |f| \, d\mu.
\end{aligned}$$

Ahora, como para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|x_{1,k}\|_X &\leq \|g_1\|_\infty \leq \|g - g_1\|_\infty + \|g\|_\infty \\
&= \|g - f_1\|_\infty + \|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \|T\|,
\end{aligned}$$

y también $\|x_{n,k}\|_X < \varepsilon/2^n$ para cada $n \geq 2$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|S(f)\|_{l^1} &\leq (\|T\| + \varepsilon/2) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_{1,k}} |f| \, d\mu + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \int_{E_{n,k}} |f| \, d\mu \\
&\leq (\|T\| + \varepsilon) \int |f| \, d\mu;
\end{aligned}$$

esto es, $\|S(f)\|_{l^1} \leq (\|T\| + \varepsilon)\|f\|_1$ para cada $f \in L^1(\mu)$. Por tanto, $\|S\| \leq \|T\| + \varepsilon$.

Ahora definamos $L : l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to X$ mediante

$$L((\alpha_{n,k})) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,k} \frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|_X}$$

(con la convención usual $\frac{0}{0} = 0$).

Vemos que

$$\|L((\alpha_{n,k}))\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{n,k}| = \|(\alpha_{n,k})\|_{l^1},$$

por lo que $\|L\| \leq 1$.

Finalmente, notamos que si $f \in L^1(\mu)$, entonces

$$\begin{aligned}
(LS)(f) = L(S(f)) &= L\Bigg(\bigg(\|x_{n,k}\|_X \int_{E_{n,k}} f\,d\mu\bigg)\Bigg) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n,k}\|_X \int_{E_{n,k}} f\frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|_X}\,d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} f g_n\,d\mu \\
&= \int_{\Omega} fg\,d\mu = T(f),
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se obtiene aplicando el teorema de convergencia dominada ya que por (1) se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n = g$ casi en todas partes (de hecho, uniformemente excepto en un conjunto de medida cero) y para cada $n \geq 2$, $\left\|\sum\limits_{m=1}^{n} g_m\right\|_\infty \leq \left\|g - \sum\limits_{m=1}^{n} g_m\right\|_\infty + \|g\|_\infty \leq \varepsilon/2^{n+1} + \|g\|_\infty < \varepsilon + \|g\|_\infty$. ☑

De cierta forma, el teorema anterior destaca el papel que juega el espacio de sucesiones l^1 en la propiedad Radon-Nikodým de un espacio de Banach. A primera vista, parecería que todo espacio con dicha propiedad contiene una copia de l^1; sin embargo, el espacio de Hilbert l^2 tiene la propiedad de Radon-Nikodým y claramente, l^2 no contiene alguna copia de l^1 (sabemos que l^2 está propiamente incluido en l^1).

Aunque no lo demostraremos aquí, vale la pena mencionar que el teorema anterior junto con el hecho de que todo espacio dual separable tiene la propiedad de Radon-Nikodým, pueden ser utilizados para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3. *Sea B un subespacio complementado e infinito dimensional de $L^1[0,1]$. Si B es isomorfo a un espacio dual separable entonces B es isomorfo a l^1.*

Una demostración de esta afirmación puede consultarse en [10].

5. Diferenciabilidad y propiedad de Radon-Nikodým

En esta sección abordaremos de manera muy general, la conexión existente entre la propiedad de Radon-Nikodým de un espacio de Banach X y las propiedades de diferenciabilidad de funciones definidas en un intervalo de la recta y con valores en X.

Definición 3. Sea $f : I \to X$, donde I es un intervalo de la recta y sea $\varepsilon > 0$. Diremos que la función f es ε-diferenciable en t_0 si existen $\delta > 0$ y $x_0 \in X$ tales que

$$\|f(t_0 + h) - f(t_0) - hx_0\|_X \leq \varepsilon|h|$$

para cada h que satisfaga $|h| < \delta$.

Notemos que f es diferenciable en t_0 si y sólo si f es ε-diferenciable en dicho punto para cada $\varepsilon > 0$.

Como en el caso escalar, podemos definir la noción de función vectorial absolutamente continua y función Lipschitz, a saber:

Definición 4. Sea $f : I \to X$, donde I es un intervalo de la recta.

(1) Diremos que f es Lipschitz, si existe una constante positiva C tal que $\|f(t) - f(s)\|_X \leq C|t - s|$ para todo par de puntos $t, s \in I$.

(2) Diremos que f es absolutamente continua en I, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \|f(t_i') - f(t_i)\|_X < \varepsilon$ para toda colección finita de subintervalos de I ajenos por pares $\{(t_i, t_i')\}_{i=1}^{n}$ que satisfaga $\sum_{i=1}^{n}(t_i' - t_i) < \delta$.

El siguiente resultado, cuya demostración presentaremos de manera parcial, establece una relación precisa entre estas nociones, diferenciabilidad y la propiedad de Radon-Nikodým.

Teorema 4. *Sea X un espacio de Banach. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

ii) Toda función absolutamente continua $f : [0,1] \to X$ es diferenciable casi en todas partes.

iii) Toda función Lipschitz $f : [0,1] \to X$ tiene un punto de ε-diferenciabilidad para cada $\varepsilon > 0$.

Demostración. ***i)*** $\Longrightarrow$ ***ii)*** Sea $f : [0,1] \to X$ absolutamente continua. Si $V : [0,1] \to \mathbb{R}$ denota la variación de f, es decir,

$$V(t) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{m} \|f(s_j) - f(s_{j-1})\|_X : 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t\right\},$$

entonces V es una función real absolutamente continua. Por consiguiente, existe una medida positiva finita μ en $[0,1]$ que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y tal que $V(t) = \mu\big([0,t]\big)$. Definamos $\lambda : \mathcal{B}[0,1] \to X$, donde $\mathcal{B}[0,1]$ es la familia de subconjuntos de Borel de $[0,1]$, del modo siguiente:

Si A es abierto, expresamos $A = \bigcup (a_i, b_i)$ donde $\big\{(a_i,b_i)\big\}_i$ es una colección ajena por pares y a lo sumo numerable de intervalos abiertos, y definimos $\lambda(A) = \sum_i \big(f(b_i) - f(a_i)\big)$.

Si A es cualquier boreliano, escogemos una sucesión decreciente de conjuntos abiertos $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $A \subset G_n$ y $\mu(G_n) \to \mu(A)$. Como $\mu(G_n \setminus G_m) \to 0$ si $m,n \to \infty$ entonces existe $\lim_{n\to\infty} \lambda(G_n)$ y así podemos definir $\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(G_n)$.

No es difícil demostrar que λ está bien definida y que resulta ser una medida vectorial de variación acotada tal que para cada $A \in \mathcal{B}[0,1]$ se verifica $\|\lambda(A)\|_X \le \mu(A)$; así $\lambda \ll \mu$. Como X tiene la propiedad de Radon-Nikodým, existe una función Bochner integrable $g : [0,1] \to X$ tal que

$$f(t) - f(0) = \lambda\big([0,t]\big) = \int_0^t g(s)\, ds.$$

Se sigue de la propiedad P_4 de la sección 2 que f es diferenciable y $f'(t) = g(t)$ para casi toda $t \in [0,1]$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Toda función Lipschitz es absolutamente continua en $[0,1]$ por lo que la conclusión es inmediata.

iii) $\Longrightarrow$ i) La demostración de esta implicación requiere de una herramienta más sofisticada, a saber, la teoría de martingalas en espacios de Banach, la cual, por razones de espacio y claridad, no consideramos en este manuscrito. Sin embargo, el lector interesado puede consultar [1] para una demostración de esta implicación, y [5] para un estudio profundo de la teoría de martingalas en espacios de Banach. ☑

La demostración *iii)* $\Longrightarrow$ *i)* que aparece en [1], al parecer, fue publicada por vez primera en 1994 por S. Quian (ver [9]). La demostración de *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* se obtiene de manera directa a partir de la teoría clásica de funciones absolutamente continuas.

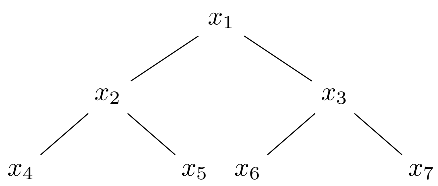
6. Geometría de espacios con la propiedad de Radon-Nikodým

La teoría de martingalas de funciones Bochner integrables permite conectar la propiedad de Radon-Nikodým con propiedades geométricas de un espacio de Banach X. En esta sección mencionaremos brevemente un par de propiedades.

Definición 5. Diremos que un subconjunto $D \subset X$ no es σ-dentable si existe $\varepsilon > 0$ tal que cada $x \in D$ tiene la forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, donde $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$, $x_i \in D$ y $\|x - x_i\|_X \geq \varepsilon$ para toda i.

Un ejemplo de un conjunto no σ-dentable lo constituye un δ-árbol infinito acotado.

Recordamos que un *árbol infinito* en X es una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X con la propiedad $x_n = (x_{2n} + x_{2n+1})/2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El siguiente diagrama nos ilustra este concepto:



Resulta útil pensar que x_1 es el tronco del árbol y que x_j, para $j = 2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$ es el k-ésimo crecimiento anual. El ejemplo prototipo de un árbol infinito no trivial puede encontrarse en el espacio $L^1[0,1)$: Sean $x_1 = \chi_{[0,1)}$, $x_2 = 2\chi_{[0,1/2)}$, $x_3 = 2\chi_{[1/2,1)}$ y en general, $x_i = 2^{k-1}\chi_{I_{k,i}}$ para $i = 2^{k-1}, \ldots, 2^k - 1$ y $k \geq 1$, donde

$$I_{k,i} = \big[(i - 2^{k-1})/2^{k-1}, (i - 2^{k-1} + 1)/2^{k-1}\big).$$

Observemos además que $\|x_1 - x_2\|_1 = 1$ y en general se tiene que $\|x_n - x_{2n}\|_1 = \|x_n - x_{2n+1}\|_1 = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Un *δ-árbol infinito* en X es un árbol infinito $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X para el cual $\|x_n - x_{2n}\|_X \geq \delta$ y $\|x_n - x_{2n+1}\|_X \geq \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$; el ejemplo anterior en $L^1[0,1)$ constituye un ejemplo de un 1-árbol infinito.

La teoría de martingalas en espacios de Banach permite demostrar que *no existe un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým que contenga un δ-árbol infinito acotado.*

Definición 6. Diremos que un subconjunto $D \subset X$ es no dentable si existe $\varepsilon > 0$ tal que cada $x \in D$ está contenido en la envolvente convexa y cerrada del complemento relativo a D de la bola abierta $B_\varepsilon(x)$.

Se tiene entonces que todo conjunto no σ-dentable es no dentable, o equivalentemente, dentabilidad implica σ-dentabilidad.

Puede demostrarse que *un espacio de Banach que contiene un conjunto no dentable acotado es un espacio de Banach sin la propiedad de Radon-Nikodým.*

El siguiente resultado, que presentaremos sin prueba, es la evidencia de que la propiedad de Radon-Nikodým es una propiedad geométrica de espacios de Banach.

Teorema 5. *(Rieffel-Maynard-Huff-Davis-Phelps) Sea X un espacio de Banach. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Todo subconjunto acotado de X es dentable.

(2) Todo subconjunto acotado de X es σ-dentable.

(3) X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Es posible obtener propiedades geométricas espectaculares, equivalentes a la propiedad de Radon-Nikodým. Por ejemplo, se puede mostrar que un espacio de Banach X carece de dicha propiedad si y sólo si existen un subconjunto A cerrado y acotado de X y un subconjunto K convexo, abierto y acotado tales que $A \subset K$ y ambos conjuntos poseen la misma envolvente convexa y cerrada. Igualmente, puede probarse que un espacio de Banach carece de la propiedad de Radon-Nikodým si y solamente si posee un subconjunto A cerrado y acotado tal que ningún funcional lineal continuo alcanza un valor máximo en A. Éstas y otras caracterizaciones sorprendentes, pueden consultarse en la excelente monografía [5].

Referencias

[1] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis 1*, Colloquium Publications (Providence, United States), vol. 48, AMS, 2000.

[2] O. Blasco, *Radon-Nikodým versus Fatou*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones, vol. 20, 1997, pp. 1–5.

[3] R. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets With the Radon-Nikodým Property*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 993, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1983.

[4] A. Bukhvalov and A. Danilevich, *Boundary Properties of Analytic and Harmonic Functions with Values in Banach Spaces*, Math. Notes **32** (1982), 104–110, English Translation.

[5] J. Diestel and J. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys (Providence, United States), vol. 15, AMS, 1977.

[6] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Pergamon Press, New York, United States, 1967.

[7] G. Edgar, *Analytic Martingale Convergence*, J. Funct. Anal. **69** (1986), 268–280.

[8] M. Guzmán-Partida and S. Pérez-Esteva, *A Formulation of the Analytic Radon-Nikodým Property by Temperature Functions*, Arch. Math. **67** (1996), 510–518.

[9] S. Qian, *Nowhere Differentiable Lipschitz Maps and the Radon-Nikodým Property*, J. Math. Anal. Appl. **185** (1994), 613–616.

[10] H. Rosenthal, *The Banach Spaces* $C(K)$ *and* $L^p(\mu)$, Bull. Am. Math. Soc. **81** (1975), no. 5, 763–781.

[11] B. Shangquan, *A new Characterization of the Analytic Radon-Nikodým Property*, Proc. Am. Math. Soc. **128** (2000), no. 4, 1017–1022.

(Recibido en abril de 2010. Aceptado en octubre de 2010)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Rosales y Luis Encinas, 83000
Hermosillo, Sonora
México
e-mail: martha@gauss.mat.uson.mx