Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 45(2011)1, páginas 1-17

El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo Kuramoto-Sivashinsky bidimensional periódica

The Cauchy Problem Associated with a Bidimensional Kuramoto-Sivashinsky Type Equation in the Periodical Setting

Juvitsa Campos, Omar Duque,
Guillermo Rodríguez-Blanco

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Resumen. El propósito de este trabajo es abordar el buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$ del problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo Kuramoto-Sivashinsky bidimensional periódica, que modela fenómenos físicos que ocurren en películas delgadas.

Palabras y frases clave. Problema de Cauchy, espacios de Sobolev, ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, localmente bien planteado, globalmente bien planteado.

2000 Mathematics Subject Classification. 53C21, 53C42.

Abstract. In this work, we deal with the local and global wellposedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{T}^2)$ for $s \geq 1$ of the Cauchy problem associated to a bidimensional Kuramoto-Sivashinsky type equation, which models physical phenomena that occurs in thin films.

Key words and phrases. Cauchy problem, Solovev spaces, Kuramoto-Sivashinsky equation, Locally wellposedness, Globally wellposedness.

1. Introducción

En este artículo trataremos el buen planteamiento en $H^s(\mathbb{T}^2)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Delta H - \Delta^2 H - HH_x, & t > 0, (x,y) \in \mathbb{T}^2; \\ H(0) = \phi \in H^s(\mathbb{T}^2). \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

La ecuación (1) fue propuesta en [3] para modelar fenómenos físicos que ocurren en películas delgadas, mas exactamente, H modela (en el contexto de películas delgadas) la evolución de la película deslizándose por una pared, para mayor información a este respecto vea [10] y las referencias contenidas allí.

Observe que, si H no dependiera de y la ecuación en (1) se transforma en la ecuación de Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky, donde el buen planteamiento en $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 1$ fue establecido en [2]. Por tal razón, seguimos las ideas expuestas en [2] para abordar nuestro problema en el caso periódico, que hasta donde conocemos el buen planteamiento en este caso no ha sido tratado. Es bueno observar que, recientemente los problemas en el caso periódico han tomado mucha importancia.

Aquí, probamos que (1) es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T}^2)$, para $s \geq 1$, que es obtenido a partir del estudio del problema local y luego via estimativas a priori para las normas de las soluciones se obtiene el resultado. Es más o menos estándar obtener el resultado local para el caso $s > 1$, pues esto depende del lema de Sobolev. El caso $s = 1$ se obtiene a partir de observar que si $u \in H^1(\mathbb{T}^2)$ entonces $uu_x \in L^1(\mathbb{T}^2)$ lo que nos permite vencer la barrera de Sobolev. Las estimativas a priori, las obtenemos a partir de la estimativa a priori de la norma $H^1(\mathbb{T}^2)$, de la ecuación integral equivalente a (1), y de una estimativa de regularización del semigrupo asociado a la ecuación (1) (ver el teorema 2 abajo).

Antes, de dedicarnos a nuestro problema indicamos una notación básica que usaremos en el transcurso del artículo:

- $\mathcal{P} = C^\infty(\mathbb{T}^2)$.
- $\widehat{f}$, notará la transformada de Fourier de la distribución periódica f.
- $(\alpha)^\vee$ notará la transformada inversa de Fourier de la sucesión de crecimiento lento α.
- $||\cdot||_s$ notará la norma del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$.
- $||\cdot||_X$ notará la norma del espacio de Banach X.
- Para X un espacio de Banach y $T > 0$, $C\big([0,T];X\big)$ será el espacio de las funciones continuas de $[0,T]$ en X dotado de la norma $||f||_{X,\infty} = \sup_{t\in[0,T]} ||f(t)||_X$.
- Si $k = (k_1, k_2)$, $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$.

2. La ecuación lineal

El objetivo de esta sección es establecer ciertas propiedades de la solución correspondiente a la parte lineal de (1). Con este fin, consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} H \in C\big([0,\infty); H^s(\mathbb{T}^2)\big); \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\Delta H + \Delta^2 H = 0, \quad t > 0, (x,y) \in \mathbb{T}^2; \\ H(0) = \phi \in H^s(\mathbb{T}^2), \end{cases} \tag{2}$$

cuya única solución es

$$H(t) = e^{t(-\Delta^2 - \partial_{xx} - \partial_x \Delta)}\phi = \left[e^{t(-|k|^4 + k_1^2 + ik_1|k|^2)}\hat{\phi}\right]^{\vee} = \mathbb{V}(t)\phi, \tag{3}$$

donde, $k = (k_1, k_2)$ y $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$. Más exactamente,

Teorema 1. *$H(t)$ dada por (3) es la única solución de (2), en el siguiente sentido:*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{H(t+h) - H(t)}{h} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\triangle + \triangle^2\right) H(t) \right\|_{s-4}^2 = 0 \tag{4}$$

uniformemente con respecto a $t \geq 0$.

Demostración. Es rutina, ver por ejemplo [8], capítulo 4. ☑

A continuación presentamos dos resultados importantes sobre el semigrupo generado por el operador asociado a la parte lineal de (1).

Teorema 2 (Estimativa de regularización)**.** *Sean $s \in \mathbb{R}$, $\phi \in H^s(\mathbb{T}^2)$ y $\lambda \geq 0$. Entonces, existe $K_\lambda > 0$, que depende solo de λ, tal que,*

$$\big\|\mathbb{V}(t)\phi\big\|_{s+\lambda} \leq K_\lambda \left[1 + \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\lambda}{4}}\right] \|\phi\|_s, \tag{5}$$

para cada $t > 0$.

Demostración. Observe que,

$$\begin{aligned} \big\|\mathbb{V}(t)\phi\big\|_{s+\lambda}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \big(1+|k|^2\big)^{s+\lambda} \big|e^{-t\left(|k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2\right)}\widehat{\phi}(k)\big|^2 \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \big(1+|k|^2\big)^{s+\lambda} e^{-2t\left(|k|^4-k_1^2\right)} \big|\widehat{\phi}(k)\big|^2 \\ &\leq \left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^2} \big(1+|k|^2\big)^{\lambda} e^{-2t\left(|k|^4-k_1^2\right)}\right\} \|\phi\|_s^2 \\ &\leq C_1 \left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^2} (1+|k|^{2\lambda}) e^{-2t\left(|k|^4-k_1^2\right)}\right\} \|\phi\|_s^2 \\ &\leq C_1 \left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{-2t(|k|^4-k_1^2)} + \sup_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2\lambda} e^{-2t\left(|k|^4-k_1^2\right)}\right\} \|\phi\|_s^2 \end{aligned} \tag{6}$$

donde $C_1 > 0$, depende sólo de λ. Resta, obtener una cota para los *sup* en la última desigualdad de (6). Con esto en mente, observe que el primer sumando es acotado por 1 pues $|k|^4 = \left(k_1^2 + k_2^2\right)^2 \geq k_1^4 + k_2^4$. Para el segundo sumando tenemos

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2\lambda} e^{-2t\left(|k|^4 - k_1^2\right)} \leq C_2 \left\{ \sup_{k_1\in\mathbb{Z}} k_1^{2\lambda} e^{-2t\left(k_1^4 - k_1^2\right)} + \sup_{k_2\in\mathbb{Z}} k_2^{2\lambda} e^{-2tk_2^4} \right\}, \tag{7}$$

donde $C_2 > 0$, es una constante que sólo depende de λ. Por lo tanto, la desigualdad (5) se sigue de (6), de (7), de observar que $f(r) = r^{2\lambda} e^{-2tr^4}$ alcanza su máximo en $r = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4t}}$, y de la desigualdad

$$\sup_{|k_1|\geq 2} k_1^{2\lambda} e^{-2t\left(k_1^4 - k_1^2\right)} \leq \sup_{|k_1|\geq 2} k_1^{2\lambda} e^{-tk_1^4} \leq \left(\frac{\lambda}{4t}\right)^{\frac{\lambda}{2}}. \tag{8}$$

☑

Teorema 3. *Sean $\psi \in L^1(\mathbb{T}^2)$ y $s > 0$. Entonces, existe $C_s > 0$ que sólo depende de s, tal que,*

$$\|\mathbb{V}(t)\psi\|_s \leq C_s \frac{M(t)}{t^{\frac{4s+3}{8}}} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}, \tag{9}$$

para todo $t > 0$, donde, $M(t)$ es una función continua y creciente con $M(0) = 1$. Más precisamente,

$$M(t) = 1 + t^{\frac{4s+3}{4}} + t^{\frac{4s+2}{4}} + t^{\frac{2s+3}{4}} + t^{\frac{2s+2}{4}} + t^{\frac{2s+1}{4}} + t^{\frac{2s}{4}} + t^{\frac{3}{4}} + t^{\frac{1}{4}}.$$

Demostración. Observe que,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{V}(t)\psi\|_s^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + |k|^2\right)^s \left| e^{-t\left(|k|^4 - k_1^2 - ik_1|k|^2\right)} \widehat{\psi}(k) \right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + |k|^2\right)^s e^{-2t\left(|k|^4 - k_1^2\right)} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^2} \left\{ |\widehat{\psi}(k)|^2 \right\} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + |k|^2\right)^s e^{-2t\left(|k|^4 - k_1^2\right)} \\
&\leq C_s^{(1)} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}^2 \left(1 + \sum_{|k|>1} \left(k_1^{2s} + k_2^{2s}\right) e^{-2t\left(k_1^4 - k_1^2\right)} e^{-2tk_2^4} \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

La serie en la última desigualdad de (10) se descompone en

$$\underbrace{\sum_{|k|>1} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4 - k_1^2\right)} e^{-2tk_2^4}}_{I} + \underbrace{\sum_{|k|>1} k_2^{2s} e^{-2t\left(k_1^4 - k_1^2\right)} e^{-2tk_2^4}}_{II}.$$

Procedemos ahora, a acotar tanto I como II. Con esto en mente, tenemos:

Acotación para I

$$
\begin{aligned}
I &\leq \sum_{|k_1|\geq 1} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_1^2\right)} \sum_{|k_2|\geq 1} e^{-2tk_2^4} + \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_2^2\right)} \\
&\leq \left(2 + \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_1^2\right)}\right) \sum_{|k_2|\geq 1} e^{-2tk_2^4} + \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_2^2\right)} \\
&\leq \left(2 + \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_1^2\right)}\right) \int_0^\infty e^{-2tx^4}\,dx + \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_2^2\right)} \\
&\leq \left(2 + \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_1^2\right)}\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{4\sqrt[4]{2t}} + \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_2^2\right)} \\
&\leq C\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{t}} + \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right) \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-2t\left(k_1^4-k_2^2\right)}\right\} \\
&\leq C\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{t}} + \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right) \sum_{|k_1|\geq 2} k_1^{2s} e^{-6tk_1^2}\right\} \\
&\leq C\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{t}} + \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)\left(\int_0^\infty x^{2s} e^{-6tx^2}\,dx + \sup_{x\in\mathbb{R}} x^{2s} e^{-6tx^2}\right)\right\} \\
&\leq C_s\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{t}} + \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)\left(\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{2}}} + \frac{1}{t^s}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Acotación para II

$$
\begin{aligned}
II &\leq \sum_{|k_1|\geq 1} e^{-2t\left(k_1^4-k_1^2\right)} \sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} + \sum_{|k_2|\geq 2} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} \\
&\leq \sum_{|k_1|\geq 1} e^{-2t\left(k_1^4-k_1^2\right)} \sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} + \sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} \\
&\leq C\left(1 + \sum_{|k_1|\geq 2} e^{-6tk_1^2}\right) \sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} \\
&\leq C\left(1 + \int_0^\infty e^{-6tx^2}\,dx\right) \sum_{|k_2|\geq 1} k_2^{2s} e^{-2tk_2^4} \\
&\leq C\left(1 + \int_0^\infty e^{-6tx^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty x^{2s} e^{-2tx^4}\,dx + \sup_{x\in\mathbb{R}} x^{2s} e^{-2tx^4}\right) \\
&\leq C_s\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{1}{t^{\frac{2s+1}{4}}} + \frac{1}{t^{\frac{s}{2}}}\right).
\end{aligned} \tag{12}
$$

La desigualdad en (10) y lo obtenido en (11) y (12) implican que,

$$\left\|\mathbb{V}(t)\psi\right\|_s^2 \leq C_s \|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}^2 \frac{R(t)}{t^{\frac{4s+3}{4}}}. \qquad ☑$$

***Nota* 1.**

(1) Cuando $s = 1$ la desigualdad de este teorema se transforma en:

$$\left\|\mathbb{V}(t)\psi\right\|_1 \leq C\frac{M(t)}{t^{\frac{7}{8}}}\|\psi\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}. \tag{13}$$

Observe, además que, la función $t^{-\frac{7}{8}}$ es localmente integrable alrededor de cero, hecho fundamental que nos permitirá obtener el resultado de buen planteamiento de nuestro problema en cuestión en este caso.

(2) En la demostración del teorema 3 las sumas son acotadas por integrales que, via un cambio de variable se transforman en la conocida función Gamma.

3. La teoría local en H^s, $s \geq 1$

El objetivo de esta sección es establecer el buen planteamiento local para el problema de valor inicial (1), el cual es equivalente a la ecuación integral

$$H(t) = \mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\partial_x H^2(\tau)\, d\tau \tag{14}$$

donde $\mathbb{V}(t)$ es como en (3), y esto es consecuencia de:

Teorema 4. *Sea $H \in C\big([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)\big)$ con $H(0) = \phi$ y $s \geq 1$. Entonces, H es la solución de la ecuación integral* (14) *en $H^s(\mathbb{T}^2)$ si y solamente si, H es la solución del problema* (1) *donde la derivada en el tiempo es tomada en la topología de $H^{s-4}(\mathbb{T}^2)$.*

Demostración. La prueba de este hecho es rutina y es semejante a la del teorema 5.1 de [8], por tal razón la omitimos. ☑

Teorema 5. *Sea $\phi \in H^s(\mathbb{T}^2)$, con $s \geq 1$. Entonces, existe $T_s = T(\|\phi\|_s) > 0$ y una única solución $H \in C\big([0,T_s]; H^s(\mathbb{T}^2)\big)$ de la ecuación integral* (14).

Demostración. La prueba de la existencia de soluciones para la ecuación integral (14) depende esencialmente del teorema del punto fijo de Banach aplicado a un subconjunto adecuado de $C\big([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)\big)$. En efecto, consideremos el espacio métrico completo $(\mathbb{X}(T), d_{s,T})$ definido para $M > 0$ por

$$\mathbb{X}(T) = \big\{H \in C\big([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)\big) \mid \|H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_s \leq M\big\},$$

dotado de la métrica

$$d_{s,T}(H,G) = \sup_{t\in[0,T]} \|H(t) - G(t)\|_s = \|H - G\|_{s,\infty},$$

con $H, G \in \mathbb{X}(T)$. En dicho espacio definimos la aplicación

$$\mathbb{F}H(t) = \mathbb{V}(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\big(H^2(\tau)\big)_x d\tau \tag{15}$$

que para algún $T > 0$ es una contracción. La prueba de esta afirmación la dividiremos en varios pasos:

- Observe que $\mathbb{F}H(t) \in C\big([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)\big)$ si $H \in \mathbb{X}(T)$, lo cual es consecuencia de la definición de continuidad, del hecho de ser $\mathbb{V}$ un semigrupo fuertemente continuo en H^s y de los teoremas 2 y 3.
- Ahora, probemos que para $s \geq 1$, existe $T_1 > 0$ tal que $\mathbb{F}H \in \mathbb{X}(T_1)$, siempre que $H \in \mathbb{X}(T_1)$. Con esto en mente tratamos por separado el caso $s > 1$ y el caso $s = 1$. Comenzaremos, primero con el caso $s > 1$.

$$\begin{aligned}\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\|_s &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\mathbb{V}(t-\tau)\big(H^2(\tau)\big)_x\right\|_s d\tau \\ &\leq K\|H\|_{s,\infty}^2 \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\right] d\tau\end{aligned}$$

que es consecuencia del teorema 2 con $\lambda = 1$. Por lo tanto,

$$\left\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\right\|_s \leq KF(t)\big(M + \|\phi\|_s\big)^2,$$

donde $F(t) = t^{\frac{3}{4}}$ y $K > 0$ es una constante. Eligiendo $T_1 = \frac{M^{\frac{4}{3}}}{K^{\frac{4}{3}}(M+\|\phi\|_s)^{\frac{8}{3}}}$ tenemos lo deseado. El caso $s = 1$ es similar, salvo que en vez de usar el teorema 2 usamos el teorema 3, para obtener,

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\right\|_1 &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\mathbb{V}(t-\tau)H(\tau)H_x(\tau)\right\|_1 d\tau \\ &\leq K\|H\|_{1,\infty}^2 \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7}{8}}}\, d\tau \\ &\leq KP(t)\big(M + \|\phi\|_1\big)^2,\end{aligned}$$

donde $P(t) = t^{\frac{1}{8}}$ y $K > 0$ es una constante. Eligiendo $T_1 = \frac{M^8}{K^8(M+\|\phi\|_1)^{16}}$ tenemos que

$$\left\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{V}(t)\phi\right\|_1 \leq M,$$

para $t \in [0, T_1]$.

- La aplicación $\mathbb{F} : \mathbb{X}(T_2) \mapsto \mathbb{X}(T_2)$ es una contracción para algún $T_2 > 0$. Con esto en mente, procederemos como antes separando el caso $s > 1$ y el caso $s = 1$. En el caso $s > 1$ utilizamos el teorema 2 con $\lambda = 1$, para obtener,

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{F}G(t)\big\|_s \\
&\quad \le \int_0^t \big\|\mathbb{V}(t-\tau)\big(\big(H^2(\tau)\big)_x - \big(G^2(\tau)\big)_x\big)\big\|_s \, d\tau \\
&\quad \le \frac{1}{2}\int_0^t K_1 \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \big\|\big(H^2(\tau)\big)_x - \big(G^2(\tau)\big)_x\big\|_{s-1} \, d\tau,
\end{aligned} \tag{16}$$

donde $H(t), G(t) \in \mathbb{X}(T)$. La desigualdad

$$\begin{aligned}
\big\|(\partial_x H^2 - \partial_x G^2)\big\|_{s-1} &= \big\|(H^2 - G^2)_x\big\|_{s-1} \\
&\le \big\|H^2 - G^2\big\|_s \\
&\le \big\|H - G\big\|_s \big\|H + G\big\|_s \\
&\le K_s \big\|H - G\big\|_s \big(\|H\|_s + \|G\|_s\big) \\
&\le K_s \big(M + \|\phi\|_s\big) \|H - G\|_{s,\infty},
\end{aligned} \tag{17}$$

que es consecuencia de $\|H\|_s = \|H(t) - \mathbb{V}(t)\phi + \mathbb{V}(t)\phi\|_s \le (M + \|\phi\|_s)$, de ser el operador ∂_x acotado de H^s en H^{s-1} y de ser H^s una algebra de Banach para $s > 1$, implica que (16) se transforme en

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbb{F}H(t) - \mathbb{F}G(t)\big\|_s \\
&\quad \le K\big(M + \|\phi\|_s\big)\big\|H - G\big\|_{s,\infty} \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\right] d\tau \\
&\quad \le K\big(M + \|\phi\|_s\big) F(t) \big\|H - G\big\|_{s,\infty},
\end{aligned} \tag{18}$$

donde $F(t) = t^{\frac{3}{4}}$. Eligiendo $0 < T_2 < \frac{1}{K^{\frac{4}{3}}(M+\|\phi\|_s)^{\frac{4}{3}}}$ tenemos que $\mathbb{F}$ es una contracción. Para el caso $s = 1$ procedemos de forma similar al caso $s > 1$, salvo que en este caso en vez de emplear el teorema 2, empleamos el teorema 3. Luego,

$$
\begin{aligned}
\big\|\mathbb{F}H(t)-\mathbb{F}G(t)\big\|_1 &\leq \int_0^t \big\|\mathbb{V}(t-\tau)\big(\big(H^2(\tau)\big)_x-\big(G^2(\tau)\big)_x\big)\big\|_1\,d\tau\\
&\leq K\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7}{8}}}\big\|HH_x(\tau)-GG_x(\tau)\big\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\,d\tau\\
&\leq K\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7}{8}}}\big\|H-G\big\|_1\big(\|H\|_1+\|G\|_1\big)\,d\tau\\
&\leq K\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7}{8}}}\big\|H-G\big\|_1\big(M+\|\phi\|_1\big)\,d\tau\\
&\leq KP(t)\big\|H-G\big\|_{1,\infty}\big(M+\|\phi\|_1\big)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

donde $P(t)=t^{\frac{1}{8}}$. Observe que la tercera desigualdad en (19) es consecuencia de

$$
\begin{aligned}
\big\|HH_x-GG_x\big\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} &\leq \big\|(H-G)H_x\big\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}+\big\|G(H-G)_x\big\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\\
&\leq \big\|(H-G)\big\|_0\|H_x\|_0+\|G\|_0\big\|(H-G)_x\big\|_0\\
&\leq \big\|H-G\big\|_1\big(\|H\|_1+\|G\|_1\big).
\end{aligned}
$$

Eligiendo $0<T_2<\frac{1}{K^8(M+\|\phi\|_1)^8}$ en (19) tenemos que $\mathbb{F}$ es una contracción. Por lo tanto, si $0<T_s\leq\{T_1,T_2\}$, el teorema del punto fijo de Banach garantiza que existe una única $H(t)\in\mathbb{X}(T_s)$ tal que $\mathbb{F}H(t)=H(t)$.

Resta, mostrar la unicidad de la solución en el espacio $C\big([0,T];H^s(\mathbb{T}^2)\big)$. Para ello procederemos como antes, separando el caso $s>1$ del caso $s=1$. En el caso $s>1$ utilizamos el teorema 2 con $\lambda=1$. Con esto en mente, sean H y G soluciones del problema de Cauchy (1) con condiciones iniciales $H(0)=\phi$ y $G(0)=\varphi$ respectivamente. Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\big\|H(t)-G(t)\big\|_s\\
&\quad\leq \big\|\mathbb{V}(\phi-\varphi)\big\|_s+\frac{1}{2}\int_0^t \big\|\mathbb{V}(t-\tau)\cdot\big(\big(H^2(\tau)\big)_x-\big(G^2(\tau)\big)_x\big)\big\|_s\,d\tau\\
&\quad\leq \big\|\phi-\varphi\big\|_s+\frac{1}{2}\int_0^t\left[1+\left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\right]\big\|\big(H^2(\tau)\big)_x-\big(G^2(\tau)\big)_x\big\|_{s-1}\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Eligiendo T_s si es necesario, para que $\frac{1}{\sqrt[4]{t-\tau}}\geq 1$, (20) se transforma en

$$
\begin{aligned}
&\big\|H(t)-G(t)\big\|_s\leq\\
&\qquad\big\|\phi-\varphi\big\|_s+K\big(\|H\|_{s,\infty}+\|G\|_{s,\infty}\big)\int_0^t\frac{1}{\sqrt[4]{t-\tau}}\big\|H(\tau)-G(\tau)\big\|_s\,d\tau
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Esta desigualdad junto con la proposición 12 del apéndice implican el resultado. Aplicando el teorema 3 para $s=1$, tenemos

$$\begin{aligned}\big\|H(t)-G(t)\big\|_1 \leq \\ \big\|\phi-\varphi\big\|_1+\frac{1}{2}\int_0^t K\frac{1}{(t-\tau)^{7/8}}\big\|\big(H^2(\tau)\big)_x-\big(G^2(\tau)\big)_x\big\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\,d\tau,\end{aligned} \quad (22)$$

luego (22) se transforma en

$$\begin{aligned}\big\|H(t)-G(t)\big\|_1 \leq \\ \big\|\phi-\varphi\big\|_1+K\big[\|H\|_{1,\infty}+\|G\|_{1,\infty}\big]\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{7/8}}\big\|H(\tau)-G(\tau)\big\|_1\,d\tau.\end{aligned} \quad (23)$$

Análogamente, la proposición 12 del apéndice y esta última desigualdad implican el resultado para $s=1$. ☑

Teorema 6. *El problema* (1) *para* $s\geq 1$ *es localmente bien planteado. Más precisamente, existen* $T>0$ *y una única* $H\in C\big([0,T];H^s(\mathbb{T}^2)\big)$ *que satisfacen* (1)*. Además, la aplicación* $\phi\mapsto H$ *es continua en el siguiente sentido: si* $\phi_n\mapsto\phi_\infty$ *en* $H^s(\mathbb{T}^2)$ *y si* $H_n\in C\big([0,T_n];H^s(\mathbb{T}^2)\big)$*, son las soluciones de* (1) *con dato inicial* $H_n(0)=\phi_n$*,* $n=1,2,\ldots$*, entonces, para* $T\in(0,T_\infty)$ *las soluciones* H_n *pueden extenderse si es necesario para todo* n *suficientemente grande al intervalo* $[0,T]$ *y*

$$\lim_{n\mapsto\infty}\sup_{t\in[0,T]}\big\|H_n(t)-H_\infty(t)\big\|_s=0.$$

Demostración. La existencia y la unicidad de la solución se siguen del teorema 4 y del teorema 5. Resta, demostrar la dependencia continua. En efecto, la demostración del teorema 5 implica que el tiempo de existencia T es una función continua de $\|\phi\|_s$. Por lo tanto, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $T_n>T$ para todo $n\geq\mathbb{N}$. Así que H_n está definido en $[0,T]$ para tales n. Como H_n, $n=1,2,\ldots$ es solución de (1) con dato inicial $H_n(0)=\phi_n$, $n=1,2,\ldots$ se sigue que,

$$\|H_n(t)\|_s-\|\phi_n\|_s\leq M,$$

para todo $n\geq N$. Luego

$$\|H_n(t)\|_s\leq\|\phi_n\|_s+M\leq R+M, \quad (24)$$

donde $R=\sup_{1\leq n\leq\infty}\|\phi_n\|_s$. Si $s>1$, combinamos (21) con (24) para obtener

$$\begin{aligned}\big\|H_n(t)-H_\infty(t)\big\|_s \leq \\ \big\|\phi_n-\phi_\infty\big\|_s+K(R+M)\int_0^t\frac{1}{\sqrt[4]{(t-\tau)}}\big\|H_n(\tau)-H_\infty(\tau)\big\|_s\,d\tau\end{aligned} \quad (25)$$

y el resultado se sigue de (25), junto con la proposición 12 del apéndice. Si $s = 1$, el resultado es consecuencia de (23), de la acotación (24) y de la proposición 12 del apéndice. ☑

Teorema 7. *Si* $H \in C\big([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)\big)$, $s \geq 1$, *es la solución de* (1) *con dato inicial* $H(0) = \phi \in H^s(\mathbb{T}^2)$ *obtenida en el teorema 6, entonces* $H \in C\big((0,T]; H^r(\mathbb{T}^2)\big)$ *para* $r > s$. *Es decir* $H \in C\big((0,T]; \mathcal{P}\big)$.

Demostración. Si $0 < \lambda < 3$ y $s > 1$ el teorema 2 con $s-1$ en vez de s y $\lambda+1$ en vez de λ, implica que,

$$\|H\|_{s+\lambda} \leq \left[1 + \frac{1}{t^{\frac{\lambda}{4}}}\right]\|\phi\|_s + K_s\|H\|_{s,\infty}^2 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1+\lambda}{4}}}\right) d\tau. \tag{26}$$

Como la integral de (26) es finita, tenemos que $H \in C\big((0,T]; H^{s+\lambda}(\mathbb{T}^2)\big)$. Iterando este argumento obtenemos lo requerido para $s > 1$. Si $0 < \lambda < 1/4$ y $s = 1$, el teorema 3 implica que

$$\begin{aligned}\|H\|_{1+\lambda} &\leq \left[1 + \frac{1}{t^{\frac{\lambda}{4}}}\right]\|\phi\|_1 + K\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7+4\lambda}{8}}}\big\|H(\tau)H_x(\tau)\big\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\, d\tau \\ &\leq \left[1 + \frac{1}{t^{\frac{\lambda}{4}}}\right]\|\phi\|_1 + K\|H\|_{1,\infty}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7+4\lambda}{8}}}\, d\tau,\end{aligned} \tag{27}$$

donde la última integral de (27) es finita. Por lo tanto, $H \in C\big((0,T]; H^{s+\lambda}(\mathbb{T}^2)\big)$. Iterando estos argumentos obtenemos el resultado para $s = 1$. ☑

4. La teoría global en $H^s, s \geq 1$

El objetivo de esta sección es establecer estimativas a priori para las soluciones de (1) con el fin de obtener el buen planteamiento global en $H^s(\mathbb{T}^2)$ para $s \geq 1$.

Teorema 8. *Sean*

$$T^* = \sup\big\{T > 0 \mid \exists! H \in C\big([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2)\big) \text{ satisfaciendo } (1)\big\},$$

donde $s \geq 1$ *y* G *la solución maximal de* (1) *en* $[0, T^*)$. *Si* $T^* < \infty$, *entonces*

$$\lim_{t \uparrow T^*} \|G\|_s = \infty.$$

Demostración. Supongamos que $T^* < \infty$ y que existe $B > 0$ tal que,

$$\|G(t)\|_s \leq B \tag{28}$$

para todo $t \in [0, T^*)$. La ecuación integral (14), los teoremas 2 y 3 y la hipótesis de acotación (28) implican que existe $\lim_{t\uparrow T^*} G(t) = \psi$ en H^s, pues $\big\{G(t)\big\}_t$ es una red de Cauchy en H^s. Por lo tanto $[0,T^*)$ no será el intervalo maximal de existencia lo cual contradice la elección de T^*, pues podemos tomar G_1 solución de la ecuación en cuestión con dato inicial ψ y, como es usual, se verifica que $\widetilde{G}$, definida por $\widetilde{G}(t)=G(t)$ si $t\in[0,T^*)$, y $\widetilde{G}(t)=G_1(T^*+t)$ si $t\geq T^*$, es solución de la ecuación en un intervalo de tiempo $[0,T]$, con $T>T^*$. ☑

Proposición 9. *Sea* $H\in C\big([0,T];H^1(\mathbb{T}^2)\big)$ *la solución de* (1) *dada por el teorema 6. Entonces,*

$$\|H\|_0^2 \leq \|\phi\|_0^2 \tag{29}$$

$$\|H_x\|_0^2 \leq \|\phi_x\|_0^2 e^{C(1+\|\phi\|_0^4)t} \tag{30}$$

$$\|H_y\|_0^2 \leq \|\phi_y\|_0^2 e^{C(1+\|\phi\|_0^4)t} \tag{31}$$

observe que (30) *y* (31) *implican que* $\|\nabla H\|_0^2\leq\|\nabla\phi\|_0^2 e^{C\left(1+\|\phi\|_0^4\right)t}$.

Demostración. La estimativa en (29) es consecuencia del teorema 7, de multiplicar (1) por H y luego integrar por partes. Posteriormente, tenemos en cuenta que $\int_{\mathbb{T}^2} H^2H_x\,dxdy=0$, que $\big\langle\partial_x\Delta H,H\big\rangle_0=0$, que $\big\langle\partial_x^2H,H\big\rangle_0=-\big\langle\partial_xH,\partial_xH\big\rangle_0$ y que $\big\langle\Delta^2H;H\big\rangle_0=\|\Delta H\|_0^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t\|H\|_0^2 &= -\|\Delta H\|_0^2+\|\partial_xH\|_0^2\\
&= -\sum_{k_1,k_2}\big(k_1^4+k_2^4\big)\big|\widehat{H}(k_1,k_2,t)\big|^2+\sum_{k_1,k_2}k_1^2\big|\widehat{H}(k_1,k_2,t)\big|^2\\
&= \sum_{k_1,k_2}\big[k_1^2-\big(k_1^4+k_2^4\big)\big]\big|\widehat{H}(k_1,k_2,t)\big|^2\\
&\leq \sum_{k_2}\sum_{|k_1|\geq2}\big(-k_1^4+k_1^2\big)\big|\widehat{H}(k_1,k_2,t)\big|^2-\sum_{k_1,k_2}k_2^4\big|\widehat{H}(k_1,k_2,t)\big|^2\\
&\leq \sum_{k_2}\sum_{|k_1|\geq2}-3k_1^2\big|\widehat{H}(k_1,k_2,t)\big|^2-\sum_{k_1,k_2}k_2^4\big|\widehat{H}(k_1,k_2,t)\big|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{1}{2}\partial_t\|H\|_0^2\leq0$ e integrando de 0 a t, se obtiene (29).

Para demostrar (30), hacemos uso del teorema 7 y luego derivamos (1) con respecto a x, para obtener

$$H_{tx}+H_x^2+HH_{xx}+\partial_x\Delta H_x=-\Delta^2H_x-\partial_x^2H_x. \tag{32}$$

Haciendo $V=H_x$ en (32), dicha ecuación se transforma en,

$$V_t+V^2+HV_x+\partial_x\triangle V=-\Delta^2V-\partial_x^2V. \tag{33}$$

Ahora, multipliquemos (33) por V e integremos sobre $\mathbb{T}^2$, para obtener

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 = -\int_{\mathbb{T}^2} V^3\,dxdy - \int_{\mathbb{T}^2} HVV_x\,dxdy - \|\Delta V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2. \tag{34}$$

Observemos que $\int_{\mathbb{T}^2} HVV_x\,dxdy = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2} V^3\,dxdy$, por lo tanto (34) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} HVV_x\,dxdy - \|\Delta V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2\\ &\le \int_{\mathbb{T}^2} |H||V||V_x|\,dxdy - \|\Delta V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2.\end{aligned} \tag{35}$$

En (35), aplicando Hölder, Cauchy-Schwartz y (29) obtenemos que

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 \le -\|\Delta V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 + \|V\|_\infty\|\phi\|_0\|V_x\|_0. \tag{36}$$

La desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (proposición 11 del apéndice) transforma (36) en

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 \le -\|\Delta V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 + \|\Delta V\|_0^{\frac{3}{2}}\|V\|_0^{1/2}\|\phi\|_0. \tag{37}$$

La desigualdad de Young transforma (37) en

$$\frac{1}{2}\partial_t\|V\|_0^2 \le -\|\Delta V\|_0^2 + \|\partial_x V\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon^4}\big(\|V\|_0^{1/2}\|\phi\|_0\big)^4 + \frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\|\Delta V\|_0^2. \tag{38}$$

Eligiendo $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ se obtiene que

$$\partial_t\|V\|_0^2 \le -\|\Delta V\|_0^2 + 2\|\partial_x V\|_0^2 + C\|\phi\|_0^4\|V\|_0^2. \tag{39}$$

Como $-\|\Delta V\|_0^2 + 2\|\partial_x V\|_0^2 \le \|V\|_0^2$, tenemos que (39) se transforma en

$$\partial_t\|V\|_0^2 \le C\big(1 + \|\phi\|_0^4\big)\|V\|_0^2.$$

Si integramos de 0 a t obtenemos

$$\|V\|_0^2 \le \|\phi_x\|_0^2 + C\big(1 + \|\phi\|_0^4\big)\int_0^t \|V(t')\|_0^2\,dt'. \tag{40}$$

Por lo tanto la desigualdad de Gronwall aplicada a (40) implica que

$$\|H_x\|_0^2 \le \|\phi_x\|_0^2 e^{C\left(1+\|\phi\|_0^4\right)t}. \tag{41}$$

Para demostrar (31), hacemos uso del teorema 7 y luego derivamos (1) con respecto a y, para obtener

$$H_{ty} + H_y H_x + HH_{xy} + \partial_x\triangle H_y = -\Delta^2 H_y - \partial_x^2 H_y. \tag{42}$$

Haciendo $W = H_y$ en (42), dicha ecuación se transforma en

$$W_t + WV + HW_x + \partial_x \triangle W = -\Delta^2 W - \partial_x^2 W \tag{43}$$

Ahora, multipliquemos (43) por W e integremos sobre $\mathbb{T}^2$, para obtener

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \|W\|_0^2 = -\int_{\mathbb{T}^2} HW_xW\,dxdy- \\ \int_{\mathbb{T}^2} W^2V\,dxdy - \int_{\mathbb{T}^2} HVV_x\,dxdy - \|\Delta W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2\end{aligned} \tag{44}$$

Observemos que $\int_{\mathbb{T}^2} VW^2\,dxdy = -2\int_{\mathbb{T}^2} WW_xH\,dxdy$, por lo tanto (44) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \|W\|_0^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} HWW_x\,dxdy - \|\Delta W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 \\ &\le \int_{\mathbb{T}^2} |H||W||W_x|\,dxdy - \|\Delta W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2.\end{aligned} \tag{45}$$

En (45), aplicando Hölder, Cauchy-Schwartz, y (29) obtenemos que

$$\frac{1}{2}\partial_t \|W\|_0^2 \le -\|\Delta W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 + \|W\|_\infty \|\phi\|_0 \|W_x\|_0. \tag{46}$$

La desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (vea proposición 11 del apéndice) transforma (46) en

$$\frac{1}{2}\partial_t \|V\|_0^2 \le -\|\Delta W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 + \|\Delta W\|_0^{\frac{3}{2}} \|W\|_0^{1/2} \|\phi\|_0. \tag{47}$$

La desigualdad de Young transforma (47) en

$$\frac{1}{2}\partial_t \|W\|_0^2 \le -\|\Delta W\|_0^2 + \|\partial_x W\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon^4}\big(\|W\|_0^{1/2}\|\phi\|_0\big)^4 + \frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\|\Delta W\|_0^2. \tag{48}$$

Eligiendo $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ se obtiene que

$$\partial_t \|W\|_0^2 \le -\|\Delta W\|_0^2 + 2\|\partial_x W\|_0^2 + C\|\phi\|_0^4 \|W\|_0^2. \tag{49}$$

Como $-\|\Delta W\|_0^2 + 2\|\partial_x W\|_0^2 \le \|W\|_0^2$, tenemos que (49) se transforma en,

$$\partial_t \|W\|_0^2 \le C\big(1 + \|\phi\|_0^4\big)\|W\|_0^2.$$

Si integramos de 0 a t tenemos

$$\|W\|_0^2 \le \|\phi_y\|_0^2 + C\big(1 + \|\phi\|_0^4\big)\int_0^t \|W(t')\|_0^2\,dt'. \tag{50}$$

Por lo tanto la desigualdad de Gronwall aplicada a (50) implica que

$$\|H_y\|_0^2 \le \|\phi_y\|_0^2 e^{C\left(1+\|\phi\|_0^4\right)t}. \tag{51}$$

☑

Teorema 10. *El problema* (1) *es globalmente bien puesto es* $H^s(\mathbb{T}^2)$*, para* $s \geq 1$.

Demostración. Como consecuencia de la proposición 9 el problema (1) es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{T}^2)$. Si $0 < \theta < \frac{1}{4}$ el teorema 3 implica que,

$$\begin{aligned}
\|H\|_{1+\theta} &\leq \|\mathbb{V}(t)\phi\|_{1+\theta} + \int_0^1 \left\|\mathbb{V}(t-\tau)\big(HH_x(\tau)\big)\right\|_{1+\theta} d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta} + K\int_0^t \frac{M(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{4(1+\theta)+3}{8}}}\|HH_x\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}\, d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta} + K(T)\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7+4\theta}{8}}}\|H\|_0\|H_x\|_0\, d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta} + K(T)\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{7+4\theta}{8}}}\|H\|_1\, d\tau.
\end{aligned}$$

De la proposición 9 tenemos que $\|H\|_1$ es acotada, y estoy junto con la desigualdad anterior, implican que $\|H\|_{1+\theta}$ es acotada. Si $0 < \rho < 3$, el teorema 2 implica que,

$$\begin{aligned}
\|H\|_{1+\theta+\rho} &\leq \|\phi\|_{1+\theta+\rho} + K\int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{\frac{1+\rho}{4}}\right]\left\|\partial_x H^2(\tau)\right\|_\theta d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta+\rho} + K\int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{\frac{1+\rho}{4}}\right]\left\|H^2(\tau)\right\|_{1+\theta} d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{1+\theta+\rho} + K\int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{t-\tau}\right)^{\frac{1+\rho}{4}}\right]\left\|H(\tau)\right\|_{1+\theta}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|H\|_{1+\theta+\rho}$ es acotada, pues $\|H\|_{1+\theta}$ lo es. Continuando con este proceso se concluye que el problema (1) es globalmente bien puesto es $H^s(\mathbb{T}^2)$, para $s \geq 1$. ☑

***Nota* 2.**

(1) Los casos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ se tratan de forma similar y se obtienen resultados semejantes pues para estos casos la desigualdad obtenida en el teorema 2 es la misma y la desigualdad obtenida en el teorema 3 es esencialmente la misma salvo que la función M se transforma en una función del mismo tipo pero teniendo a e^t como factor.

(2) Creemos que aplicando las técnicas usadas en [5],[7],[9] y [1] es posible obtener resultados positivos de buen planteamiento para nuestro problema en cuestión, en espacios de Sobolev con baja regularidad. Resultados en esta dirección serán el producto de una próxima publicación.

5. Apéndice

Proposición 11 (Desigualdad de Galiardo-Nirenberg)**.** *Si h es medible y de media cero en $\mathbb{T}^2$. Entonces, para $1 \leq p, q, r \leq \infty$ existe $C \geq 0$, tal que*

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha h\|_{L^r\left(\mathbb{T}^2\right)} \leq C \|h\|^{1-\theta}_{L^p\left(\mathbb{T}^2\right)} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha h\|^{\theta}_{L^q\left(\mathbb{T}^2\right)}, \tag{52}$$

donde $\frac{j}{m} < \theta < 1$ y $\frac{1}{r} = \frac{j}{2} + \theta(\frac{1}{q} - \frac{m}{2}) + (1-\alpha)\frac{1}{p}$.

Demostración. Véase por ejemplo [4]. ☑

Proposición 12. *Sean $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta + \gamma > 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ y g una función no negativa tal que $t^{\gamma-1} g(t)$ es integrable localmente sobre $0 \leq t \leq T$, y suponga que*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \tau^{\gamma-1} g(\tau)\, d\tau$$

en $(0, T)$. Entonces,

$$g(t) \leq a E_{\beta,\gamma}\Big(\big(b\Gamma(\beta)\big)^{\frac{1}{\nu}} t \Big)$$

donde $\nu = \beta + \gamma - 1 > 0$, $E_{\beta,\gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{m\nu}$ con $c_0 = 1$ y $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu+\gamma)}{\Gamma(m\nu+\gamma+\beta)}$ para $m \geq 0$ y Γ es la bien conocida función Gama.

Demostración. Vea [6, Lemma 7.1.2]. ☑

Agradecimiento. Los autores agradecen las sugerencias del referee, las cuales ayudaron enormemente en la presentación y mejora de este trabajo.

Referencias

[1] Esfahani A., *On the Benney Equation*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **139A** (2009), 1121–1144.

[2] H. A. Biagioni, J. L. Bona, R. Iorio, and M. Scialom, *On the Korteweg-de Vries-Kuramoto-Sivashinsky Equation*, Adv. Diff. Eq. **1** (1996), 1–20.

[3] L. Frenkel and K. Indireshkumar, *Wavy Film Flows Down an Inclined Plane: Perturbation Theory and General Evolution Equation*, Phys. Rev. E **60** (1999), 41–43.

[4] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, United States, 1976.

[5] A. Grünrock, M. Panthe, and J. Silva, *On KP-II Type Equations on Cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), 2335–2358.

[6] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equation*, Lectures Notes in Mathematics **840** (1957).

[7] A. D. Ionescu and C. E. Kenig, *Local and Global Well-Posedness of Periodic KP-I Equations*, Ann. of Math. Stud. **163** (2007), 181–211.

[8] Jr. R. J. Iório and V. de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, vol. 70, Cambridge studies in avanced mathematics, 2001.

[9] F. Linares, A. Pastor, and J. C. Saut, *Well-Posedness for the ZK Equation in a Cylinder and on the Background of a KdV Soliton*, Comm. PDE **35** (2010), 1674–1689.

[10] Saprykin S., Demekhin E., and Kalliadasis S., *Two-Dimensional Wave Dynamics in Thin Films. I. Stationary Solitary Pulses*, Phys. Fluids **17** (2005), no. 117105, 1–16.

(Recibido en abril de 2010. Aceptado en enero de 2011)

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Carrera 30, calle 45
Bogotá, Colombia
e-mail: jmcamposp@unal.edu.co
e-mail: oduqueg@unal.edu.co
e-mail: grodriguezb@unal.edu.co