Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 45(2011)1, páginas 19-30

Regularidad de soluciones viscosas de una ecuación parabólica degenerada

Regularity of Viscose Solutions of a Degenerated Parabolic Equation

Pedro Romero Polo[1], Leonardo Rendón Arbeláez[2]

[1]Universidad del Magdalena, Santa Marta, Colombia

[2]Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Resumen. En el presente trabajo se estudia el problema de Cauchy para cierta ecuación parabólica degenerada. Se obtiene la regularidad Hölder de las soluciones viscosas imponiendo condiciones al exponente m.

Palabras y frases clave. Solución viscosa, principio del máximo, continuidad Hölder.

2000 Mathematics Subject Classification. 35K55, 35K65.

Abstract. In this paper we study the Cauchy problem for certain degenerated parabolic equation. We obtain the Hölder regularity of the viscose solutions imposing conditions over the exponent m.

Key words and phrases. Viscose Solution, Maximum Principle, Hölder Continuity.

1. Introducción

Se estudia el problema de Cauchy para la ecuación

$$u_t = u\Delta u - \gamma|\nabla u|^2 + ku^m, \quad \text{en} \quad \Omega = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

con valor inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

donde $\gamma, m, k \in \mathbb{R}$ con $\gamma \geq 0$ y el dato inicial u_0 satisface

$$u_0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad u_0 \geq 0, \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

La ecuación (1) surge en algunas aplicaciones en Biología y en Física [1, 2, 5]. $u\Delta u$ es el término de difusión, $-\gamma|\nabla u|^2$, es el término de disipación y ku^m se denomina término de reacción. Esta es una ecuación parabólica degenerada en los puntos donde u se anula.

El problema de Cauchy (1), (2) en general, no tiene soluciones clásicas y es necesario llegar a interpretaciones en el sentido de soluciones viscosas.

Este problema es una versión general del problema desarrollado por Lu y Qian [4], el cual es dado por:

$$\begin{cases} u_t = u\Delta u - \gamma|\nabla u|^2, & \text{en } \Omega = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+; \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4}$$

Definición 1. Una función $u \in L^\infty(\Omega) \bigcap L^2_{Loc}([0,+\infty]; H^1_{Loc}(\mathbb{R}^N))$ es llamada *solución débil* de (1), (2) si $u \geq 0$ en casi todas partes ($c.t.p$) en Ω y para toda $T > 0$, la ecuación integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0\psi(x,0)\,dx + \iint\limits_{\Omega} \big(u\psi_t - u\nabla u\cdot\nabla\psi - (1+\gamma)|\nabla u|^2\psi - ku^m\psi\big)\,dx\,dt = 0, \tag{5}$$

se cumple para cualquiera $\psi \in C^{1,1}\big(\overline{\Omega}\big)$ con soporte compacto en $\overline{\Omega}$.

2. Método de viscosidad

Se construye la solución débil por el método de viscosidad. Sea $w_\epsilon(x,t)$ la única solución en $C^{2,1}(\Omega)\cap C\big(\overline{\Omega}\big)\cap L^\infty(\Omega)$ del problema de Cauchy con la ecuación (1) reemplazada por

$$u_t = u\Delta u - \gamma|\nabla u|^2 + ku^m + \epsilon\Delta u, \tag{6}$$

donde $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$.

Es decir:

$$w_{\epsilon t} = w_\epsilon\Delta w_\epsilon - \gamma|\nabla w_\epsilon|^2 + k(w_\epsilon + \epsilon)^m + \epsilon\Delta w_\epsilon. \tag{7}$$

Entonces $u_\epsilon = w_\epsilon + \epsilon$ es una solución clásica del problema de Cauchy con u_0 reemplazado por $u_{0_\epsilon} = u_0 + \epsilon$

$$\begin{cases} u_t = u\Delta u - \gamma|\nabla u|^2 + ku^m; \\ u(x,0)_\epsilon = u_0(x) + \epsilon. \end{cases} \tag{8}$$

$u_\epsilon(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, u_ϵ es solución clásica entonces u_ϵ es solución débil del problema (8), la cual verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(u_0(x) + \epsilon\big)\psi(x,0)\,dx + \iint\limits_{\Omega} \Big(u_{\epsilon(x,t)}\psi_t(x,t) - \nabla u_\epsilon(x,t)\nabla\psi(x,t) - (1+\gamma)|\nabla u_\epsilon(x,t)|^2\psi(x,t) - k u_\epsilon^m(x,t)\psi(x,t)\Big)\,dx\,dt = 0, \quad (9)$$

para cualquier función $\psi(x,t) \in C^{1,1}\big(\overline{\Omega}\big)$ con soporte compacto.

Por el principio del máximo se tiene que $u_\epsilon \geq \epsilon > 0$, convirtiendo este problema en estrictamente parabólico. Siguiendo las ideas de [1], vemos que en la región $u_\epsilon \geq \epsilon > 0$, se tiene que

$$u(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0} w_\epsilon. \quad (10)$$

Se observa que $u(x,t)$ es solución débil del problema de Cauchy (1), (2).

Definición 2. La solución débil de (1), (2) construida por el método de viscosidad es llamada la solución viscosa.

Ahora para estudiar la regularidad de la solución viscosa del problema de Cauchy (1), (2) utilizamos el método desarrollado por Lu y Quian [4].

En este trabajo, además de la condición $\gamma \geq \sqrt{2N} - 1$, centraremos la atención en el exponente m, y estableceremos condiciones para m con el objeto de conseguir los mismos resultados de regularidad obtenidos en [4].

3. Estimativos del gradiente

Teorema 1 (Teorema principal). *Sean $\gamma \geq \sqrt{2N}-1$, $N \geq 8$, $\alpha \neq -2$, tales que $\alpha^2+(\gamma+1)\alpha+\frac{N}{2} \leq 0$ y $u_0 \in C\big(\mathbb{R}^N\big)\cap L^\infty\big(\mathbb{R}^N\big)$, $u_0 \geq 0$ tal que $\left|\nabla u_0^{1+\alpha/2}\right| \leq M$, con M constante positiva. Si*

(i) Si $k < 0$, $m > \frac{\gamma+1}{4} + \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2-2N}}{4}$, $\gamma \geq 3$, o

(ii) Si $k > 0$, $1 \leq m < \frac{\gamma+1}{4} - \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2-2N}}{4}$, $3 < \gamma < \frac{N+4}{4}$,

entonces existe una solución débil $u(x,t)$ del problema de Cauchy (1), (2) la cual satisface el estimativo $|\nabla u^{1+\alpha/2}| \leq M$.

Demostración. Sea $\{u_\epsilon\}$, una sucesión de soluciones clásicas del problema (8) la cual no es necesariamente monótona, pero tal que $u_\epsilon \to u$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, entonces podemos probar que u es una solución del problema (1), (2) y $u \in C(\overline{\Omega})$, con tal que se pueda aplicar el Lema 6.1 [1], es decir, $u_\epsilon^{(1)} = u_\epsilon$, y así $0 \leq u_\epsilon \leq M$ en $\overline{\Omega}$ y

$$u_\epsilon(x,0) \to u_0(x), \quad \text{en } L^\infty_{Loc}(\mathbb{R}^N), \quad \text{cuando } \epsilon \to 0.$$

Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Entonces para cualquier $n > 0$ existe $\delta_n, \epsilon_n, t_n > 0$ tal que para cualquier $x_0 \in K$, $\epsilon > \epsilon_n$,

$$|u_\epsilon^1(x,t) - u_0(x_0)| < n, \quad \text{para } x \in B_{\delta_n}(x_0) \quad \text{y } 0 \leq t < t_n.$$

Esto origina estimativos uniformes para las derivadas de u_ϵ en $B_{\delta_n}(x_0) \times [0, t_n)$.

Por el Teorema de Arzela-Ascoli podemos extraer una subsucesión que converge uniformemente a una función u en cada cilindro $B_{\delta_n}(x_0) \times [0, t_n)$.

Ahora se dan los estimativos uniformes:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N u_{x_i}^2 = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \\ w_t &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N u_{x_i}^2\right)_t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N 2u_{x_i}(u_{x_i})_t = \sum_{i=1}^N u_{x_i}(u_{x_i})_t. \end{aligned} \tag{11}$$

Como $(u_{x_i})_t = (u_t)_{x_i}$, entonces

$$\begin{aligned} w_t &= \sum_{i=1}^N u_{x_i}(u_t)_{x_i} = \sum_{i=1}^N u_{x_i}\left[u_{x_i}\Delta u + u(\Delta u)_{x_i} - \left(\gamma|\nabla u|^2\right)_{x_i} + (ku^m)_{x_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^N u_{x_i}\left[u_{x_i}\Delta u + u\left(\sum_{j=1}^N u_{x_i x_j x_j}\right) - \gamma(2w)_{x_i} + kmu^{m-1}u_{x_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^N u_{x_i}^2\Delta u + u\sum_{i=1}^N u_{x_i}\left(\sum_{j=1}^N u_{x_i x_j x_j}\right) - 2\gamma\sum_{i=1}^N u_{x_i}w_{x_i} + kmu^{m-1}\sum_{i=1}^N u_{x_i}^2 \\ &= 2w\Delta u + u\left(\sum_{i,j=1}^N u_{x_i}u_{x_i x_j x_j} + \sum_{i,j=1}^N u_{x_i}^2 - \sum_{i,j=1}^N u_{x_i}^2\right) - \\ &\qquad\qquad 2\gamma\sum_{i=1}^N u_{x_i}w_{x_i} + 2kmu^{m-1}w \\ &= 2w\Delta u + u\left(\Delta u - \sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j}^2\right) - 2\gamma\sum_{i=1}^N u_{x_i}w_{x_i} + 2kmu^{m-1}w. \end{aligned}$$

Entonces

$$w_t = 2w\Delta u + u\Delta u - u\sum_{i,j=1}^N u_{x_i x_j}^2 - 2\gamma\sum_{i=1}^N u_{x_i}w_{x_i} + 2kmu^{m-1}w. \tag{12}$$

Sea

$$z = f(u) \cdot w \to w = zf(u)^{-1}. \tag{13}$$

Entonces

$$w_{x_i} = \big(f^{-1}\big)_{x_i} z + f^{-1} z_{x_i} \tag{14}$$

$$w_{x_i x_i} = \big(f^{-1}\big)_{x_i x_i} z + 2\big(f^{-1}\big)_{x_i} z_{x_i} + f^{-1} z_{x_i x_i}. \tag{15}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \sum_{i=1}^{N} w_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{N} \big[\big(f^{-1}\big)_{x_i x_i} z + 2\big(f^{-1}\big)_{x_i} z_{x_i} + f^{-1} z_{x_i x_i}\big],\\
\big(f^{-1}\big)_{x_i} &= -f^{-2} f^{'} u_{x_i},\\
\big(f^{-1}\big)_{x_i x_i} &= \big(-f^{-2} f^{-1} u_{x_i}\big)_{x_i}\\
&= \big[\big(f^{-2}\big)_{x_i} f^{'} u_{x_i} + f^{-2}\big(f^{'}\big)_{x_i} u_{x_i} + f^{-2} f^{'} u_{x_i x_i}\big],\\
\big(f^{-1}\big)_{x_i x_i} &= -\big[-2f^{-3} f^{'} u_{x_i} f^{'} u_{x_i} + f^{-2} f^{''} u_{x_i} u_{x_i} + f^{-2} f^{'} u_{x_i x_i}\big]\\
&= -2f^{-3} f^{'2} u_{x_i}^2 - f^{-2} f^{''} u_{x_i}^2 - f^{-2} f^{'} u_{x_i x_i}\\
&= \frac{2ff^{'2}u_{x_i}^2 - f^2 f^{''} u_{x_i}^2}{f^4} - \frac{f^{'}}{f^2} u_{x_i x_i}\\
&= \left(\frac{2f^{'2} - ff^{''}}{f^4}\right) f u_{x_i}^2 - \frac{f^{'}}{f^2} u_{x_i x_i}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \sum_{i=1}^{N} \Bigg\{ \Bigg[\left(\frac{2f^{'2} + ff^{''}}{f^4}\right) f u_{x_i}^2 - \frac{f^{'}}{f^2} u_{x_i x_i} \Bigg] z + \\
&\qquad\qquad 2\big(-f^{-2} f^{'} u_{x_i}\big) z_{x_i} + f^{-1} z_{x_i x_i} \Bigg\}\\
&= f^{-1} \sum_{i=1}^{N} z_{x_i x_i} - 2f^{-2} f^{'} \sum_{i=1}^{N} u_{x_i} z_{x_i} + \\
&\qquad \left(\frac{2f^{'2} - ff^{''}}{f^4}\right) f \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2 z - \frac{f^{'}}{f^2} \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i} z.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\Delta w = f^{-1}\Delta z - 2f^{-2}f^{'}\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}z_{x_i} + 2\left(\frac{2f^{'2} - ff^{''}}{f^4}\right)z^2 - \frac{f^{'}}{f^2}z\Delta u. \qquad (16)$$

De (12), (13) y (16) se obtiene

$$\begin{aligned}
z_t &= f^{'}u_t w + f(u)w_t = f^{'}(u\Delta u - 2\gamma w + ku^m)w + f(u)w_t \\
&= f^{'}\big(u\Delta u - 2\gamma w + ku^m\big)w + f(u)\Big[2w\Delta u + u\Delta w - u\sum_{i,j}^{N} u^2_{x_i x_j} - \\
&\qquad 2\gamma\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}w_{x_i} + 2kmu^{m-1}w\Big] \\
&= f^{'}\big(u\Delta u - 2\gamma w + ku^m\big)w + 2f(u)w\Delta u + f(u)u\Delta w - \\
&\qquad uf(u)\sum_{i,j}^{N} u^2_{x_i x_j} - 2\gamma f(u)\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}w_{x_i} + f(u)2kmu^{m-1}w \\
&= f^{'}\big(u\Delta u - 2\gamma w + ku^m\big)w + 2f(u)w\Delta u + f(u)u\Delta w - uf(u)\sum_{i,j}^{N} u^2_{x_i x_j} - \\
&\qquad 2\gamma f(u)\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}\big[-f^{-2}f^{'}u_{x_i}z + f^{-1}z_{x_i}\big] + 2kmf(u)u^{m-1}w \\
&= f^{'}u\Delta u f^{-1}z - 2\gamma f^{'}f^{-2}z^2 + f^{'}ku^m w + 2f(u)f^{-1}z\Delta u + \\
&\qquad f(u)u\Delta w - uf(u)\sum_{i,j=1}^{N} u^2_{x_i x_j} + 2\gamma f(u)f^{-2}f^{'}z\sum_{i=1}^{N} u^2_{x_i} - \\
&\qquad 2\gamma f(u)f^{-1}f^{'}z\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}z_{x_i} + 2kmf(u)u^{m-1}f^{-1}z.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
z_t = u\Delta z - \big(2f^{-1}uf^{'} + 2\gamma\big)\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}z_{x_i} + \left(\frac{4uf^{'2}}{f^3} - \frac{2uf^{''}}{f^2} + \frac{2\gamma f^{'}}{f^2}\right)z^2 \\
+ \big(2\Delta u + 2kmu^{m-1}\big)z - uf(u)\sum_{i,j=1}^{N} u^2_{x_i x_j} + ku^m f^{'}f^{-1}z. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Si escogemos

$$f(u) = u^{\alpha}, \qquad (18)$$

dado que,

$$\sum_{i,j=1}^{N} u_{x_ix_j}^2 \geq \frac{1}{N}(\Delta u)^2, \tag{19}$$

de (17), (18) y (19) se tiene que

$$\begin{aligned}
z_t &\leq u\Delta z - 2\big(u^{-\alpha}u\alpha u^{\alpha-1}+\gamma\big)\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}z_{x_i} + \\
&\qquad \left(\frac{4u\alpha^2 u^{2\alpha-2}}{u^{3\alpha}} - \frac{2u\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}}{u^{2\alpha}} + \frac{2\gamma\alpha u^{\alpha-1}}{u^{2\alpha}}\right)z^2 + \\
&\qquad \big(2\Delta u + 2kmu^{m-1} + \alpha k u^{m-1}\big)z - u\cdot u^{\alpha}\frac{1}{N}(\Delta u)^2 \\
&= u\Delta z - 2(\alpha+\gamma)\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}z_{x_i} + \\
&\qquad \big(4\alpha^2u^{-\alpha-1} - 2\alpha^2u^{-\alpha-1} + 2\alpha u^{-\alpha-1} + 2\gamma\alpha u^{-\alpha-1}\big)z^2 + \\
&\qquad 2\big(\Delta u + kmu^{m-1} + \alpha k u^{m-1}\big)z - u^{\alpha+1}\frac{1}{N}(\Delta u)^2.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
z_t \leq u\Delta z - 2(\alpha+\gamma)\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}z_{x_i} + 2\alpha(\alpha+\gamma+1)u^{-\alpha-1}z^2 + \\
2\big(\Delta u + kmu^{m-1} + \alpha k u^{m-1}\big)z - \frac{u^{\alpha+1}}{N}(\Delta u)^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Para $\gamma \geq \sqrt{2N}-1$, si α satisface

$$\alpha^2 + (\gamma+1)\alpha + \frac{N}{2} \leq 0, \tag{21}$$

entonces

$$\begin{aligned}
2\alpha\big(\alpha+\gamma+1\big)&u^{-\alpha-1}z^2 + 2z\Delta u - \frac{u^{\alpha+1}}{N}(\Delta u)^2 \\
&= 2(\alpha^2+(\gamma+1)\alpha)u^{-\alpha-1}z^2 + 2z\Delta u - \frac{u^{\alpha+1}}{N}(\Delta u)^2 \\
&\leq 2\left(-\frac{N}{2}\right)u^{-\alpha-1}z^2 + 2z\Delta u - \frac{u^{\alpha+1}}{N}(\Delta u)^2 \\
&= -\left(Nu^{-\alpha-1}z^2 + 2z\Delta u - \frac{u^{\alpha+1}}{N}(\Delta u)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\leq -\left(\frac{N^2z^2 - 2Nu^{\alpha+1}z\Delta u + u^{2\alpha+2}(\Delta u)^2}{Nu^{\alpha+1}}\right)$$

$$\leq -\frac{(Nz - u^{\alpha+1}\Delta u)^2}{Nu^{\alpha+1}} \leq 0, \quad \text{puesto que } u \geq 0, N > 0.$$

Luego

$$2\alpha(\alpha+\gamma+1)u^{-\alpha-1}z^2 + 2z\Delta u - \frac{u^{\alpha+1}}{N}(\Delta u)^2 \leq 0. \tag{22}$$

Por lo tanto, de (20) y (22) tenemos

$$z_t \leq u\Delta z - 2(\alpha+\gamma)\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}z_{x_i} + (2m+\alpha)\, ku^{m-1}z. \tag{23}$$

Antes de aplicar el principio del máximo, se buscan condiciones para que el coeficiente $(2m+\alpha)ku^{m-1}$ sea negativo.

1) Si $k < 0$ entonces $2m + \alpha > 0$, es decir $m > -\frac{\alpha}{2}$, y como

$$\alpha \in \left[-\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2 - 2N}}{2}, -\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2 - 2N}}{2}\right]$$

entonces

$$-\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\gamma+1}{4} - \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2 - 2N}}{4}, \frac{\gamma+1}{4} + \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2 - 2N}}{4}\right].$$

Así $m > \frac{\gamma+1}{4} + \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2-2N}}{4}$, $\gamma \geq \sqrt{2N} - 1$. Si $N \geq 8$ entonces $\gamma \geq 3$ y por lo tanto $m \geq 1$.

2) Si $k > 0$ entonces $2m+\alpha < 0$ y así $m < -\frac{\alpha}{2}$. Luego $m < \frac{\gamma+1}{4} - \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2-2N}}{4}$, $\gamma \geq \sqrt{2N} - 1$.
Si $N \geq 8$ entonces $3 \leq \gamma \leq \frac{N+4}{4}$ y por lo tanto $1 \leq m < \frac{\gamma+1}{4} - \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2-2N}}{4}$

Aplicando el principio del máximo en (23) se tiene $|z|_\infty \leq |z_0|_\infty$.

De (11), (13) y (18), si e_i es el vector dirección, entonces

$$\begin{aligned}\left|\nabla(u^{1+\alpha/2})\right|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{N}(u^{1+\alpha/2})_{x_i}e_i\right|^2\\ &= \sum_{i=1}^{N}\left[(1+\alpha/2)u^{\alpha/2}u_{x_i}\right]^2\\ &= (1+\alpha/2)^2u^{\alpha}\sum_{i=1}^{N}u_{x_i}^2 = (1+\alpha/2)^2u^{\alpha}2w\\ &= (1+\alpha/2)^2 2z = 2(1+\alpha/2)^2z = \beta z,\end{aligned}$$

donde $\beta = 2(1+\alpha/2)^2$. También $\left|\nabla\left(u_o^{1+\alpha/2}\right)\right|^2 = \beta z_0$.

Ahora tenemos

$$\begin{aligned}\beta z \le \beta|z|_\infty \le \beta|z_0|_\infty &= \beta\left|\frac{\left|\nabla\left(u_o^{1+\alpha/2}\right)\right|^2}{\beta}\right|_\infty\\ \left|\left|\nabla\left(u_o^{1+\alpha/2}\right)\right|^2\right|_\infty &\le |M^2|_\infty = M^2.\end{aligned}$$

Luego $\left|\left|\nabla\left(u_o^{1+\alpha/2}\right)\right|^2\right|_\infty \le M^2$, entonces $|\nabla u^{(1+\alpha/2)}|_\infty \le M$. ☑

Por este teorema, podemos fácilmente deducir algunas conclusiones acerca de la suavidad de u si $\gamma \ge \sqrt{2N}-1$, $m \ge 1$.

4. Continuidad Hölder de las soluciones viscosas

Corolario 2. *Bajo las mismas condiciones del teorema anterior, la solución viscosa $u(x,t)$ de las ecuaciones* (1) *y* (2) *es Lipschitz continua con respecto a x.*

Considerando el problema (1) y (2), a partir de la prueba del teorema principal se tiene la existencia de un $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha^2 + (\gamma+1)\alpha + \frac{N}{2} \le 0$, $\alpha \ne -2$ tal que $\left|\nabla(u^{1+\frac{\alpha}{2}})\right| \le M$ en $\overline{\Omega}$, bajo las hipótesis $\gamma \ge \sqrt{2N}-1$, $\left|\nabla(u_0^{1+\frac{\alpha}{2}})\right| \le M$, y $m \ge 1$.

De la desigualdad $\alpha^2 + (\gamma+1)\alpha + \frac{N}{2} \le 0$, se deduce que $\alpha < 0$, ya que

$$\alpha \in \left[-\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2-2N}}{2}, -\frac{\gamma+1}{2} + \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2-2N}}{2}\right].$$

En consecuencia, como $\alpha < 0$ y tomando $\alpha \neq -2$, el estimativo siguiente tiene sentido

$$\left|\nabla\big(u^{1+\frac{\alpha}{2}}\big)\right| \leq M \Longleftrightarrow \left|\Big(1+\frac{\alpha}{2}\Big)u^{\frac{\alpha}{2}}\nabla u\right| \leq M \Longleftrightarrow \left|1+\frac{\alpha}{2}\right|\left|u^{\frac{\alpha}{2}}\right|\left|\nabla u\right| \leq M.$$

Entonces, como $u \geq 0$, $\left|\nabla u\right| \leq \left|1+\frac{\alpha}{2}\right|^{-1} u^{-\frac{\alpha}{2}} M \leq M_1$ en $\overline{\Omega}$, puesto que u es acotada y $-\frac{\alpha}{2} > 0$.

Por el teorema del valor medio, tenemos:

$$u(x_1,t) - u(x_2,t) = \nabla u\big(x_1 + \theta(x_2 - x_1), t\big) \cdot (x_1 - x_2), \quad \text{para algún } \theta \in (0,1).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left|u(x_1,t) - u(x_2,t)\right| &\leq \left|\nabla u\big(x_1+\theta(x_2-x_1),t\big)\right| |x_1 - x_2| \\ &\leq M_1 |x_1 - x_2|, \quad \text{para todo } (x_1,t),(x_2,t) \in \Omega.\end{aligned}$$

Así se tiene que $u(x,t)$ es Lipschitz continua en x.

Ahora, aplicamos el resultado de Gilding [3], para conseguir la continuidad Hölder en la variable t.

Sea u_ϵ la solución clásica de (8) con $u_\epsilon \,\epsilon\, C^{2,1}(\Omega) \cap C\big(\overline{\Omega}\big) \cap L^\infty(\Omega)$. Se sabe que $u(x,t) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} u_\epsilon(x,t)$.

Ahora,

$$\begin{aligned}\left|\nabla(u_0+\epsilon)^{1+\frac{\alpha}{2}}\right| &= \left|\Big(1+\frac{\alpha}{2}\Big)(u_0+\epsilon)^{\frac{\alpha}{2}}\nabla u_0\right| \\ &= \left|1+\frac{\alpha}{2}\right|(u_0+\epsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|\nabla u_0| \\ &\leq \left|1+\frac{\alpha}{2}\right| u_0^{\frac{\alpha}{2}}|\nabla u_0| \\ &= \left|\Big(1+\frac{\alpha}{2}\Big)u_0^{\frac{\alpha}{2}}\nabla u_0\right| = \left|\nabla\Big(u_0^{1+\frac{\alpha}{2}}\Big)\right| \leq M.\end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el mismo procedimiento de la prueba del teorema principal se tendría que u_ϵ es Lipschitz continua respecto a la variable espacial, con constante M. Es decir,

$$\left|u_\epsilon(x_1,t) - u_\epsilon(x_2,t)\right| \leq M|x_1 - x_2|, \quad \text{para todo } (x_1,t),\ (x_2,t) \in \Omega. \tag{24}$$

Consideremos el operador parabólico

$$L(z) = u_\epsilon \Delta z - \gamma \sum_{i=1}^{N} u_{\epsilon_{x_i}} z_{x_i} + k u_\epsilon^{m-1} z - z_t = 0; \tag{25}$$

entonces $z = u_\epsilon$, satisface la ecuación (25) en Ω. Ahora, para cada $R > 0$ y $T > 0$, de (25) se tiene que,

$$z_t = u_\epsilon \Delta z - \gamma \sum_{i=1}^{N} u_{\epsilon_{x_i}} z_{x_i} + k u_\epsilon^{m-1} z, \quad \text{en } B_{2R}(0) \times (0,T],$$

donde $B_{2R}(0)$ es la bola abierta de centro en 0 y radio $2R$ en $\mathbb{R}^N$.

Nótese que $u_\epsilon \in C^{2,1}\big(B_{2R}(0) \times (0,T]\big)$.

Ahora, u_ϵ es acotada en $\overline{B_{2R}(0)} \times (0,T]$ y también lo es ∇u_ϵ. Luego, existe una constante $\mu > 0$ para todo $(x,t) \in B_{2R}(0) \times (0,T]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} u_\epsilon(x,t) = N u_\epsilon(x,t) \le \mu, \quad \left(\sum_{i=1}^{N} \Big(\gamma u_{\epsilon_{x_i}}\Big)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \mu, \quad \text{es decir } \big|\gamma \nabla u_\epsilon\big| \le \mu,$$

y también $\big|k u_\epsilon^{m-1}(x,t)\big| \le |k| \frac{\mu^{m-1}}{N^{m-1}}$, $m > 1$ en $B_{2R}(0) \times (0,T]$.

De (24), tenemos también la continuidad Hölder en la variable x, es decir,

$$\big|z(x_1,t) - z(x_2,t)\big| \le M|x_1 - x_2|, \quad \text{para toda } (x,t) \in B_{2R}(0) \times (0,T].$$

Luego, se cumplen todas las hipótesis de la primera parte del Teorema en Gilding [3]. En consecuencia, podemos afirmar la existencia de $\delta = \delta(\mu, R) > 0$ y $K = K(\mu, R, M) > 0$ tal que

$$\big|z(x,t) - z(x,t_0)\big| \le K|t - t_0|^{\frac{1}{2}},$$

para todo $(x,t), (x,t_0) \in B_R(0) \times (0,T]$ con $|t - t_0| < \delta$.

Dado que K es independiente de ϵ, haciendo $\epsilon \searrow 0$ obtenemos

$$\big|u(x,t) - u(x,t_0)\big| \le K|t - t_0|^{\frac{1}{2}},$$

para todo $(x,t), (x,t_0) \in B_R(0) \times (0,T]$ con $|t - t_0| < \delta$.

Es decir, la solución viscosa u es localmente Hölder continua respecto a la variable temporal con exponente $\frac{1}{2}$.

Referencias

[1] Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, and Maura Ughi, *Discontinuous Viscosity Solutions of a Degenerate Parabolic Equation*, Trans Amer. Math. Soc. **320** (1990), no. 2, 779–798.

[2] Michiel Bertsch and Maura Ughi, *Positivity Properties of Viscosity Solutions of a Denerate Parabolic Equation*, Nonlinear Anal. TMA. **14** (1990), no. 7, 571–592, MR 92a:35006.

[3] B. H. Gilding, *Hölder Continuity of Solutions of Parabolic Equations*, J. Landon Math. Soc., **13** (1976), 103–106.

[4] Yun Guang Lu and Liwen Qian, *Regularity of Viscosity Solutions of a Degenerate Parabolic Equation*, Proc. American Mathematical Society **130** (2001), no. 4, 999–1004.

[5] Maura Ughi, *Degenerate Parabolic Equation Modelling the Spread of an Epidemic*, Ann. Mat. Pura Appl. **143** (1986), 385–400, MR 88g:35105.

(Recibido en abril de 2010. Aceptado en mayo de 2011)

Facultad de Ingeniería
Universidad del Magdalena
Carrera 32 N 22-08
Santa Marta, Colombia
e-mail: polopedro@gmail.com

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Carrera 30, calle 45
Bogotá, Colombia
e-mail: lrendona@unal.edu.co