

Modelo discreto para una ecuación de difusión no local

Discrete Model of a Nonlocal Diffusion Equation

MAURICIO BOGOYA[✉], CESAR A. GÓMEZ S.

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

RESUMEN. En este trabajo, probamos existencia y unicidad de soluciones, así como la validez de un principio de comparación para un modelo discreto asociado a un problema de difusión no local con condición de Neumann. Demostramos que las soluciones del modelo discreto convergen a las soluciones del modelo continuo cuando el parámetro de la malla va a cero. Finalmente mostramos algunos experimentos numéricos.

Palabras y frases clave. Difusión no local, condiciones de Neumann, discretización, convergencia.

2010 Mathematics Subject Classification. 35K57, 35B40.

ABSTRACT. In this work we prove the existence and uniqueness of solutions as well as the validation of a comparison principle for a discrete model associated to a nonlocal diffusion problem with Neumann conditions. We show that the solutions for the discrete model converge to the solutions of the continuous model when the mesh parameter goes to zero. Finally, we perform some numerical experiments.

Key words and phrases. Nonlocal Diffusion, Neumann Boundary Conditions, Discretizations, Convergence.

1. Introducción

El estudio de los modelos de difusión no local ha tomado relevancia en los últimos años, especialmente por dos razones: la primera es debida a que una gran cantidad de fenómenos que se producen en muchas ramas de las ciencias pueden ser modelados por problemas de este tipo y la segunda es debida a que se ha visto que éstos modelos comparten muchas propiedades semejantes con

los problemas locales, más aún, en algunos casos específicos las soluciones de éstos pueden ser aproximadas por soluciones de problemas no locales [6].

Una gran variedad de estudios analíticos se han realizado sobre ecuaciones de difusión no local. Algunos de estos estudios hacen referencia a la ecuación

$$u_t(x, t) = (J * u)(x, t) - u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x - y)[u(y, t) - u(x, t)] dy, \quad (1)$$

y variaciones de ésta, ver [1], [4], [5], [7]. En muchos de los casos estudiados, $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ representa una función no negativa, suave, simétrica, radialmente decreciente, de soporte compacto y con integral unitaria, esto es $\int_{\mathbb{R}^n} J(z) dz = 1$. En [7], si $u(x, t)$ representa la densidad en la posición x en el instante de tiempo t y si $J(x - y)$ es la probabilidad de saltar de la posición y a la posición x , entonces, $(J * u)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(x - y)u(y, t) dy$ es la razón con la cual los individuos están arribando al punto x desde todas las demás posiciones, y $-u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} J(y - x)u(x, t) dy$ es la razón con la cual los individuos están dejando la posición x para viajar a los demás lugares. Por lo tanto, en ausencia de fuentes externas o internas, las anteriores consideraciones llevan a que la densidad u debe satisfacer la ecuación (1). Nótese que el valor de u depende de x y de todos los valores cercanos a x a través de la convolución $J * u$, razón por la cual (1) es llamado modelo de difusión no local.

Recientemente, Bogoya y Gómez en [3], estudiaron el modelo de difusión no local, dado por la ecuación

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \int_{\Omega} J(x - y)(u(y, t) - u(x, t)) dy + \int_{\partial\Omega} G(x - y)g(y, t) dS_y, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2)$$

para $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T)$, $u_0 \in L^1(\Omega)$ una función no negativa y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave. Además $J, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones no negativas, continuas, suaves, simétricas ($J(z) = J(-z)$, $G(z) = G(-z)$), radialmente decrecientes, de soporte compacto y con integrales unitarias, es decir $\int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}^n} G(x) dx = 1$. La función $g \in L_{\text{Loc}}^{\infty}[(0, \infty); L^1(\partial\Omega)]$ es regular y positiva. La segunda integral en (2) tiene en cuenta el flujo de los individuos que entran a través de la frontera de Ω . Estas consideraciones permiten definir la condiciones de Neumann. En [3] se demuestra la existencia y unicidad de las soluciones de (2) y la validez de un principio de comparación.

Si en (2) consideramos el caso unidimensional ($n = 1$), con $\Omega = [-L, L]$, tenemos el siguiente problema para $(x, t) \in [-L, L] \times (0, T)$:

$$u_t(x, t) = \int_{-L}^L J(x - y)(u(y, t) - u(x, t)) dy + G(x + L)g(-L, t) + G(x - L)g(L, t), \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Al igual que los modelos continuos de problemas no locales también se ha presentado un gran interés por el estudio de los modelos discretos asociados a los modelos continuos, como es el caso de los trabajos realizados en [2], [8].

El modelo discreto. El objetivo de este trabajo es analizar el modelo discreto asociado a (3). Se asume que el soporte de J es el intervalo $[-r, r]$, donde $0 < L \leq r$. Discretizamos la ecuación (3) en la variable espacial x , dejando a la variable temporal t continua. Descomponemos el intervalo $[-L, L]$ en $2N$ partes iguales. Si $h = \frac{L}{N} > 0$ (el parámetro de discretización), obtenemos el conjunto de nodos

$$A = \{-L = x_{-N} < \dots < x_i = ih < \dots < x_N = L\}.$$

Discretizando las integrales involucradas, el modelo discreto asociado a (3) se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde para cada nodo x_i se tiene

$$u'_i(t) = \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i - j))(u_j(t) - u_i(t)) + G(h(i + N))g_-(t) + G(h(i - N))g_+(t) \tag{4}$$

$$u_i(0) = u_0(x_i),$$

con $-N \leq i \leq N$, $g_-(t) = g(-Nh, t)$ y $g_+(t) = g(Nh, t)$.

El trabajo está organizado como sigue: En la sección 2, estudiaremos la existencia y unicidad de las soluciones de (4), así como la validez de un principio de comparación para las soluciones. En la sección 3, estudiaremos la consistencia del modelo discreto, y en la sección 4, presentaremos algunos experimentos numéricos.

Observación 1. Como las funciones J, G satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}} J(\zeta) d\zeta = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} G(\theta) d\theta = 1,$$

se tiene que su discretización correspondiente satisface

$$\sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i - j)) \leq 1, \quad \sum_{j=-N}^{j=N} hG(h(i - j)) \leq 1.$$

2. Existencia y unicidad

La existencia y unicidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4) es consecuencia del teorema del punto fijo de Banach. Para ver esto, usaremos el análogo discreto a L^1 , el espacio $l_h^1 = \{(u_i)\}$ dotado de la norma

$$\|u\|_{l_h^1} = \sum_{i=-N}^{i=N} h|u_i|.$$

Sea $t_0 > 0$ fijo. Consideramos el espacio de Banach $B_{t_0}^h = C([0, t_0]; l_h^1)$ dotado con la norma

$$\|w\| = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|w\|_{l_h^1} = \max_{0 \leq t \leq t_0} \sum_{i=-N}^{i=N} h|w_i|(t).$$

Consideremos el subespacio cerrado de $B_{t_0}^h$ definido por

$$A_{t_0}^h = \{w = (w_{-N}, \dots, w_N) \in B_{t_0}^h : 0 \leq w_i \leq 2(w_0)_i, \quad i = -N, \dots, N\}$$

y el operador $T_{w_0}^h : A_{t_0}^h \rightarrow A_{t_0}^h$ definido como

$$\begin{aligned} (T_{w_0}^h w(t))_i &= (w_0)_i + \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(w_j(s) - w_i(s)) ds + \\ &\int_0^t \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) ds, \quad (5) \end{aligned}$$

para $i = -N, \dots, N$.

Respecto al operador definido por (5), tenemos el siguiente resultado:

Lema 2. *El operador (5) se encuentra bien definido como aplicación de $A_{t_0}^h$ sobre $A_{t_0}^h$.*

Demostración. Para $0 < t_1 < t_2 \leq t_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| (T_{w_0}^h(w(t_2))) - (T_{w_0}^h(w(t_1))) \right\|_{l_h^1} &\leq \\ &\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=-N}^{i=N} h \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j)) |w_j(s) - w_i(s)| ds + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=-N}^{i=N} h \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) ds \leq \\ &(C_1 \|w\| + K)(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

donde C_1 es una constante positiva y de la observación 1 se tiene que K es una constante positiva tal $\sum_{i=-N}^{i=N} h \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) \leq K$.

Del análisis anterior se sigue que el operador $T_{w_0}^h$ es continuo en $(0, t_0]$.

Razonando en forma análoga, para $t = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \left\| (T_{w_0}^h(w(t))) - (w_0) \right\|_{l_h^1} &\leq \\ &\int_0^t \sum_{i=-N}^{i=N} h \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j)) |w_j(s) - w_i(s)| ds + \\ &\int_0^t \sum_{i=-N}^{i=N} h \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) ds \leq C_2 t, \end{aligned}$$

donde C_2 una constante positiva. De la anterior desigualdad se sigue que el operador $T_{w_0}^h$ es continuo en $t = 0$ por la derecha.

Ahora bien, por la observación 1, tenemos

$$\int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j)) w_i(s) ds \leq 2(w_0)_i t_0,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} (T_{w_0}^h(w(t)))_i &= (w_0)_i + \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j)) (w_j(s) - w_i(s)) ds + \\ &\int_0^t \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) ds \geq \\ &(w_0)_i - \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j)) (w_i(s)) ds \geq (1 - 2t_0)(w_0)_i, \end{aligned}$$

de donde, eligiendo $t_0 < 1/2$, se tiene que $(T_{w_0}^h(w(t)))_i \geq 0$.

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} (T_{w_0}^h(w(t)))_i &\leq (w_0)_i + \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j)) (w_j(s) - w_i(s)) ds + \\ &\int_0^t \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) ds \leq \\ &(w_0)_i + t_0(2(w_0)_i + K) \leq 2(w_0)_i, \end{aligned}$$

para t_0 suficientemente pequeño. □

Con base en el lema anterior, a continuación enunciamos el teorema sobre existencia y unicidad de la solución para el problema discreto (4):

Teorema 3. *Para $(w_0)_i > 0$ existe una única solución w de (4) en $A_{t_0}^h$.*

Demostración. Primero veamos que para $w, z \in A_{t_0}^h$, y para todo $h > 0$, existe una constante C_3 tal que

$$\|T_{w_0}^h(w(t)) - T_{w_0}^h(z(t))\| \leq C_3 t_0 \|w - z\|. \quad (6)$$

En efecto, para $w, z \in A_{t_0}^h$ tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-N}^{i=N} h |T_{w_0}^h(w(t))_i - T_{w_0}^h(z(t))_i| = \\ & \sum_{i=-N}^{i=N} h \left| \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} h J(h(i-j))(w_j(s) - w_i(s)) ds - \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} h J(h(i-j))(z_j(s) - z_i(s)) ds \right| \leq \\ & \int_0^t \sum_{i=-N}^{i=N} h \left| \sum_{j=-N}^{j=N} h J(h(i-j))(w_j(s) - z_j(s)) \right| ds + \\ & \qquad \qquad \qquad \int_0^t \sum_{i=-N}^{i=N} h \left| \sum_{j=-N}^{j=N} h J(h(i-j))(w_i(s) - z_i(s)) \right| ds \leq \\ & \qquad \qquad \qquad C_3 t_0 \|w - z\|. \end{aligned}$$

Tomando $C_3 t_0 < 1$, obtenemos que el operador $T_{w_0}^h(w(t))$ es una contracción estricta y por lo tanto el resultado se sigue del teorema de punto fijo de Banach en el intervalo $[0, t_0)$. \checkmark

Como consecuencia del análisis anterior tenemos los siguientes corolarios, cuyas demostraciones omitiremos.

Corolario 4. *Las soluciones de (4) dependen en forma continua del dato inicial en el siguiente sentido: Si u_i y w_i son soluciones de (4), con datos iniciales $(u_0)_i, (w_0)_i$ respectivamente, entonces existe una constante $C_4 > 0$ tal que*

$$\max_{0 \leq t \leq t_0} \|u(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{l_h^1} \leq C_4 \|u_0 - w_0\|_{l_h^1}. \quad (7)$$

Corolario 5. *Las $u_i, i = -N, \dots, N$ son soluciones de (4) si y sólo si*

$$u_i(t) = (u_0)_i + \int_0^t \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(s) - u_i(s)) ds + \int_0^t \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) ds. \quad (8)$$

Corolario 6. *Sea u_i una solución de (4). Entonces la masa total del sistema (la cual está definida como $m(t) = \sum_{i=-N}^N u_i(t)$), verifica*

$$m(t) = \sum_{i=-N}^N (u_0)_i(t) + \int_0^t \sum_{i=-N}^N \left(G(h(i+N))g_-(s) + G(h(i-N))g_+(s) \right) ds.$$

A continuación estudiaremos un teorema de comparación válido para las soluciones de (4).

Teorema 7. *Sean $u, v \in C[-L, L]$ soluciones de (4) con datos iniciales u_0 y v_0 en $C^1[-L, L]$ y datos de frontera g_-, g_+ y \tilde{g}_-, \tilde{g}_+ respectivamente. Si $u_0 < v_0$ para $x \in [-L, L]$ y $g_- \leq \tilde{g}_-$ y $g_+ \leq \tilde{g}_+$, entonces $u_i(t) < v_i(t)$ para todo $i \in \{-N, \dots, N\}$ y para todo $t > 0$.*

Demostración. Sea t_0 suficientemente pequeño. Razonaremos por contradicción. Supongamos que la conclusión no se tiene, luego existe un $t_1 \in (0, t_0)$ y un índice $i \in \{-N, \dots, N\}$ tal que $u_i(t_1) = v_i(t_1)$ y $u_i(s) < v_i(s)$ para todo $i \in \{-N, \dots, N\}$ y para $s \in (0, t_1)$. Sea $w_i = u_i - v_i$ con $(w_0)_i = (u_0)_i - (v_0)_i < 0$. Por el corolario 5, se tiene que

$$0 = w_i(t_1) = u_i(t_1) - v_i(t_1) = (w_0)_i + \int_0^{t_1} \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j)) [w_j(s) - w_i(s)] ds + \int_0^{t_1} \left(G(h(i+N))(g_-(s) - \tilde{g}_-(s)) + G(h(i-N))(g_+(s) - \tilde{g}_+(s)) \right) ds.$$

Por hipótesis, se tiene que $g_-(s) - \tilde{g}_-(s) \leq 0$, $g_+(s) - \tilde{g}_+(s) \leq 0$, por lo tanto

$$\int_0^{t_1} \left(G(h(i+N))(g_-(s) - \tilde{g}_-(s)) + G(h(i-N))(g_+(s) - \tilde{g}_+(s)) \right) ds \leq 0$$

y, teniendo en cuenta que $w_j(s) < 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 = w_i(t_1) &\leq (w_0)_i + \int_0^{t_1} \sum_{-N}^N hJ(h(i-j))(-w_i(s)) ds \\
&\leq (w_0)_i + \int_0^{t_1} (-w_i(s)) ds \\
&< (w_0)_i + Ct_0 \\
&< 0,
\end{aligned}$$

dado que t_0 es suficientemente pequeño, lo cual conduce a una contradicción. \square

3. Consistencia y convergencia

En esta sección demostraremos que la solución del problema discreto (4) converge a la solución del problema continuo (3) cuando el parámetro de discretización tiende a cero.

Definición 8. Una función $\bar{u} \in A_{t_0}^h$ es una super-solución de (4) si $\bar{u}_i(0) \geq u_i(0)$ y

$$\bar{u}'_i(t) \geq \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(\bar{u}_j(t) - \bar{u}_i(t)) + G(h(i+N))g_-(t) + G(h(i-N))g_+(t).$$

Si en la definición anterior se cambia el sentido de las desigualdades se dirá que $\underline{u} \in A_{t_0}^h$ es una sub-solución de (4).

Lema 9. Sea $u_0 \in l_h^1$ con $(u_0)_i \geq 0$ para todo $i = -N, \dots, N$ y sea $u \in A_{t_0}^h$ una super-solución de (4) con dato de frontera dado por $g \geq 0$, entonces $u_i \geq 0$ para todo $i = -N, \dots, N$.

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que la conclusión no se tiene, luego existe algún $i \in \{-N, \dots, N\}$ tal que $u_i < 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_i = \min\{u_j : u_j < 0\}$. Sea $v_i = u_i + \epsilon t$ con $\epsilon > 0$ muy pequeño tal que $v_i < 0$. Sea $t_1 \in [0, t_0]$ el tiempo en el que u_i alcanza su mínimo. En este caso tenemos

$$\begin{aligned}
0 \geq v'_i(t_1) &= u'_i(t_1) + \epsilon \geq \\
&\sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i-j))(u_j(t_1) - u_i(t_1)) + \\
&G(h(i+N))g_-(t_1) + G(h(i-N))g_+(t_1) + \epsilon > 0,
\end{aligned}$$

ya que J, G son funciones no negativas, g_-, g_+ son no negativos y $u_j(t_1) - u_i(t_1) \geq 0$. Por lo tanto se obtiene una contradicción. \square

Teorema 10. Sea $u(x, t)$ una solución de (3) y $(u_i(t))$ una solución de (4). Entonces existe una constante $C > 0$ que no depende de $h > 0$ tal que

$$\|u(x_i, t) - u_i(t)\| \leq Ch, \quad \text{para todo } t \in [0, t_0].$$

Demostración. Sea $w_i(t) = u(x_i, t)$ para todo $i = -N, \dots, N$. Teniendo presente que $\int_{x_j}^{x_j+h} f(y) dy = hf(x_j) + O(h^2)$ y $\sum_{j=-N}^{j=N} O(h^2) = O(h)$, se tiene de (3) que

$$\begin{aligned} w'_i(t) &= \int_{-L}^L J(x_i - y)[u(y, t) - w_i(t)] dy + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ \\ &= \sum_{j=-N}^{j=N} \int_{x_j}^{x_j+h} J(x_i - y)[u(y, t) - w_i(t)] dy + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ \\ &= \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i - j))[w_j(t) - w_i(t)] + G(x_i + L)g_- + G(x_i - L)g_+ + O(h), \end{aligned}$$

Definimos la función $z_i(t) = w_i(t) - u_i(t)$ para todo $t \in [0, t_0]$ y para $i = -N, \dots, N$. Del análisis anterior y de (4) tenemos que

$$\begin{cases} z'_i(t) = \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i - j))[z_j(t) - z_i(t)] + O(h); \\ z_i(0) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $z_i(t)$ satisface el siguiente problema para $i = -N, \dots, N$

$$\begin{cases} z'_i(t) = \sum_{j=-N}^{j=N} hJ(h(i - j))[z_j(t) - z_i(t)] + Kh, & t > 0 \\ z_i(0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Si consideremos la función $v_i(t) = Kht$ para $i = -N, \dots, N$, tenemos que $v_i(t)$ es una super-solución de (9). Se puede demostrar en forma similar al teorema 7 que este problema satisface un principio de comparación. Por lo tanto tenemos que $z_i(t) \leq v_i(t) = Kht \leq Kht_0 = Ch$.

Repetiendo el análisis anterior para $-z_i(t)$ y para $i = -N, \dots, N$, podemos concluir que $|z_i(t)| = |w_i(t) - u_i(t)| \leq Ch$ para $i = -N, \dots, N$, donde $C = Kt_0 > 0$ es una constante independiente de h . A partir de esto se obtiene que $\|u(x_i, t) - u_i(t)\| \leq Ch$ para todo $t \in [0, t_0]$. \square

Observación 11. El análisis discreto hecho a la ecuación (3) también se puede extender a dimensiones mayores.

4. Experimentos numéricos

Apoyados en el programa MatLab, resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (4).

Para esto, elegimos $L = 2$, $N = 100$, $u_0(x) = \max\{0, 1 - x/2\}$ y $J(r) = G(r) = \max\{0, (3/4)(1 - r^2)\}$. En la figura 1 se observa el comportamiento de la solución de (4) para $g(x, t) = \sqrt{u(x, t)}$; en la figura 2 se observa el comportamiento de la solución de (4) para $g(x, t) = u^2(x, t)$.

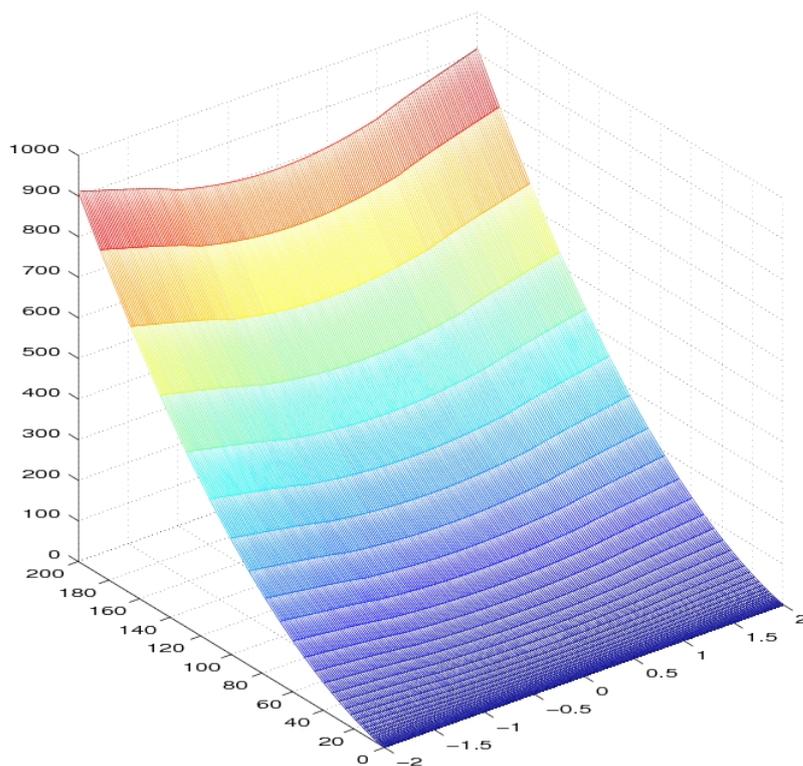
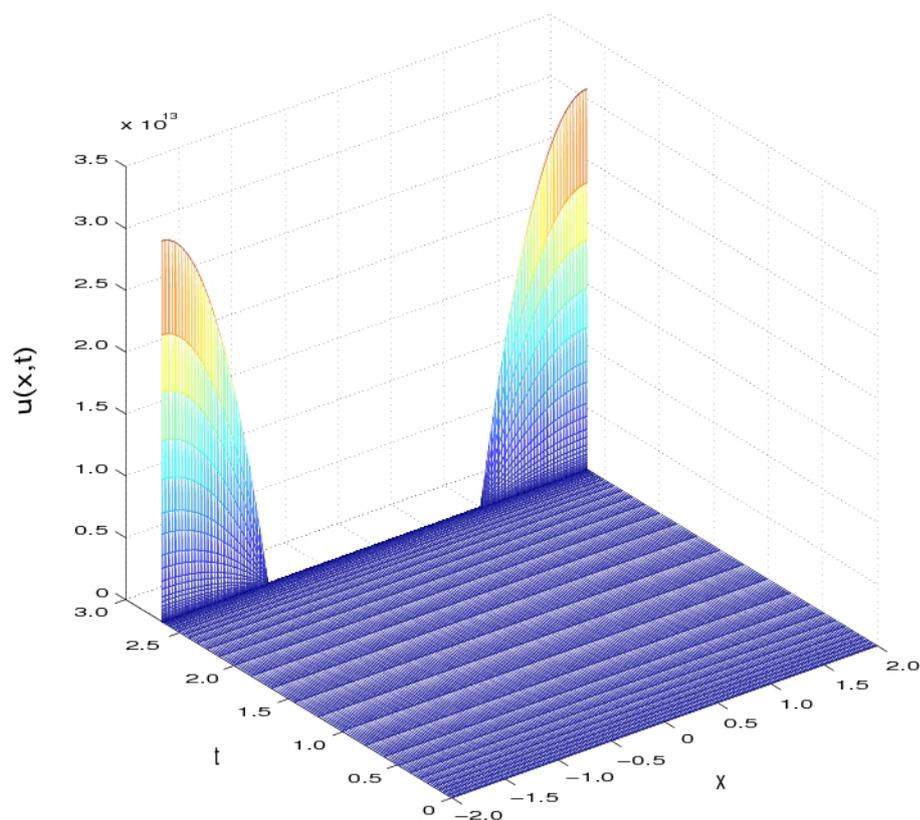


FIGURA 1. $g(x, t) = \sqrt{u(x, t)}$.

5. Conclusiones

Se ha analizado, desde el punto de vista numérico la buena postura de un nuevo modelo de difusión no local con condiciones de Neumann. Más exactamente, como aplicación del teorema de punto fijo de Banach, se ha mostrado que el problema tiene una única solución, que se cumple un principio de comparación y que las soluciones dependen continuamente del dato inicial. Además se ha analizado la consistencia y la convergencia del modelo discreto.

FIGURA 2. $g(x, t) = u^2(x, t)$.

Referencias

- [1] P. Bates, P. Fife, X. Ren, and X. Wang, *Travelling Waves in a Convolution Model for Phase Transitions*, Arch. Rat. Mech. Anal. **138** (1997), 105–136.
- [2] M. Bogoya, R. Ferreira, and J. D. Rossi, *Neumann Boundary Conditions for a Nonlocal Nonlinear Diffusion Operator. Continuous and Discrete Models*, Proceedings of the American Mathematical Society **135** (2007), no. 12, 3837–3846.
- [3] M. Bogoya and C. A. Gómez, *On a Nonlocal Diffusion Model with Neumann Boundary Conditions*, Nonlinear Analysis **75** (2012), no. 6, 3198–3209.

- [4] C. Cortázar, M. Elgueta, and J. D. Rossi, *A Nonlocal Diffusion Equation whose Solutions Develop a Free Boundary*, Ann. Henri Poincaré **6** (2005), no. 2, 269–281.
- [5] C. Cortázar, M. Elgueta, J. D. Rossi, and N. Wolanski, *Boundary Fluxes for Nonlocal Diffusion*, J. Differential Equations **234** (2007), 360–390.
- [6] ———, *How to Approximate the Heat Equation with Neumann Boundary Conditions by Nonlocal Diffusion Problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **187** (2008), no. 1, 137–156.
- [7] P. Fife, *Some Nonclassical Trends in Parabolic and Parabolic-Like Evolutions*, Trends in Nonlinear Analysis **2003** (2000), 153–191.
- [8] M. Pérez-Llanos and J. D. Rossi, *Numerical Approximations for a Nonlocal Evolution Equation*, Proceedings of the American Mathematical Society **49** (2011), no. 5, 2103–2123.

(Recibido en septiembre de 2012. Aceptado en marzo de 2013)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA 30, CALLE 45
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: mbogoyal@unal.edu.co
e-mail: cagomezsi@unal.edu.co