Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 48(2014)1, páginas 21-40

Conexiones de Galois, transformaciones de Chu y enlaces

Galois Conections, Chu Mappings and Bonds

Gerardo Muñoz-Quiñones

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen. En este artículo se caracterizan los enlaces (*bonds*) definidos por Wille, mediante unos axiomas menos rígidos que facilitan la definición de la categoría $\mathbb{BOND}$. Como los enlaces generalizan las transformaciones de Chu, se presenta un funtor entre $\mathbb{CHU}$ y $\mathbb{BOND}$ que es fiel. Además, se proponen los morfismos de Galois, los cuales generalizan los enlaces y permiten crear la categoría $\mathbb{MGI}$ (la $\mathbb{I}$ indica que invierten el orden). Finalmente, se propone un método general para construir categorías de adjunciones a partir de cualquier categoría. La categoría de adjunciones generada a partir de la categoría de las conexiones de Galois que preservan el orden, denominada $\mathbb{MGP}$ (la $\mathbb{P}$ indica que preserva el orden), resulta ser equivalente a la categoría $\mathbb{MGI}$.

Palabras y frases clave. Conexiones de Galois, enlaces, transformaciones de Chu.

2010 Mathematics Subject Classification. 06A15.

Abstract. In this paper we characterize *bonds*, as defined by Wille, by employing a less rigid set of axioms thus enabling the definition of the category $\mathbb{BOND}$. Since bonds generalize Chu mappings we present a faithful functor between $\mathbb{CHU}$ and $\mathbb{BOND}$. Moreover, we propose the Galois morphisms generalizing bonds; this allows us to define the category $\mathbb{MGI}$. Lastly, we suggest a general method to construct categories of adjunctions from any given category. The category of adjunctions generated from the category of order-preserving Galois connections, named $\mathbb{MGP}$, turns out to be equivalent to the category $\mathbb{MGI}$.

Key words and phrases. Galois connections, Bonds, Chu mappings.

1. Introducción

Las conexiones de Galois (CG) son generalizadas por las transformaciones de Chu, introducidas en [2]. Desde el punto de vista categórico se mostrará en la sección 4 que la categoría de las conexiones de Galois que preservan el orden, $\mathbb{CGP}$, está inmersa en la categoría de las transformaciones de Chu, $\mathbb{CHU}$. Una trasformación de Chu se puede representar mediante una relación binaria; en las subsecciones 4.4 y 4.5 caracterizamos las relaciones binarias provenientes de conexiones de Galois.

Los enlaces, desarrollados por Wille [6] para caracterizar los productos subdirectos de retículos, generalizan las relaciones de Chu. En la subsección 5.1 se presenta una caracterización menos rígida de los enlaces que facilita la definición de la categoría $\mathbb{BOND}$. En la subsección 5.4 mostramos que la composición de las transformaciones de Chu es compatible con la composición de los enlaces, permitiendo la definición de un funtor entre $\mathbb{CHU}$ y la categoría de los enlaces, $\mathbb{BOND}$. Esto nos facilita ver las conexiones de Galois como productos subdirectos de los conjuntos ordenados.

En la subsección 6.1 definimos la categoría $\mathbb{MGI}$ que está basada en conexiones de Galois que invierten el orden y generaliza la categoría $\mathbb{BOND}$, que a su vez generaliza las categorías $\mathbb{CHU}$ y $\mathbb{CGI}$.

En la subsección 6.2 presentamos una forma para construir categorías de adjunciones a partir de una categoría cualquiera. La categoría $\mathbb{MGP}$ la definimos como la categoría de adjunciones de $\mathbb{CGP}$, la cual resulta ser isomorfa a la categoría $\mathbb{MGI}$.

Algunos de los resultados aquí presentados son parte de la tesis doctoral [11]. En recientes artículos, tales como [4], [8] y [12], se estudian algunas categorías similares pero con un enfoque diferente.

2. Conexiones de Galois

En la literatura usualmente se presentan dos tipos de **conexiones de Galois** (**CG**) entre los conjuntos ordenados $\langle P, \leq_P \rangle$ y $\langle Q, \leq_Q \rangle$ a saber:

$$\overrightarrow{f}(p) \leq_Q q \Leftrightarrow p \leq_P \overleftarrow{f}(q), \qquad \text{(Tipo 1)}$$

$$\underrightarrow{f}(p) \geq_Q q \Leftrightarrow p \leq_P \underleftarrow{f}(q), \qquad \text{(Tipo 2)}$$

para todo $p \in P$ y $q \in Q$. $\overrightarrow{f}$ y $\underrightarrow{f}$ son funciones de P en Q y se conocen como adjuntas a derecha. $\overleftarrow{f}$ y $\underleftarrow{f}$ son funciones de Q en P y se conocen como adjuntas a izquierda. Cada par de adjuntas se pueden escribir en la forma $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ y $\left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f} \right\rangle$. Se puede pasar de una CG tipo 1 a una tipo 2 invirtiendo el orden de Q solamente. Pero si se invierten los órdenes de P y Q a la vez, entonces se obtienen otros dos tipos de CG análogos a los tipos 1 y 2.

2.1. Algunas propiedades de las CG

A continuación aparecen algunas propiedades conocidas ([3]) que cumplen las CG $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ de tipo 1 y las CG $\left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f} \right\rangle$ de tipo 2, definidas entre los conjuntos ordenados $\langle P, \leq_P \rangle$ y $\langle Q, \leq_Q \rangle$. Sean $p, p' \in P$ y $q, q' \in Q$.

$$
\begin{array}{lll}
\overrightarrow{f}(p) \leq_Q q \Leftrightarrow p \leq_P \overleftarrow{f}(q). & \underrightarrow{f}(p) \geq_Q q \Leftrightarrow p \leq_P \underleftarrow{f}(q). & \\
\text{Tipo 1.} & \text{Tipo 2.} & \\
\overrightarrow{f}(p) = \overrightarrow{f}\left(\overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(p)\right)\right). & \underrightarrow{f}(p) = \underrightarrow{f}\left(\underleftarrow{f}\left(\underrightarrow{f}(p)\right)\right). & (1) \\
\overleftarrow{f}(q) = \overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}\left(\overleftarrow{f}(q)\right)\right). & \underleftarrow{f}(q) = \underleftarrow{f}\left(\underrightarrow{f}\left(\underleftarrow{f}(q)\right)\right). & (2) \\
p \leq \overleftarrow{f}\left(\overrightarrow{f}(p)\right). & p \leq \underleftarrow{f}\left(\underrightarrow{f}(p)\right). & (3) \\
q \geq \overrightarrow{f}\left(\overleftarrow{f}(q)\right). & q \leq \underrightarrow{f}\left(\underleftarrow{f}(q)\right). & (4) \\
p \leq p' \Rightarrow \overrightarrow{f}(p) \leq \overrightarrow{f}(p'). & p \leq p' \Rightarrow \underrightarrow{f}(p) \geq \underrightarrow{f}(p'). & (5) \\
q \leq q' \Rightarrow \overrightarrow{f}(q) \leq \overrightarrow{f}(q'). & q \geq q' \Rightarrow \underrightarrow{f}(q) \leq \underrightarrow{f}(q'). & (6)
\end{array}
$$

Mientras que (1), (2) y (3) coinciden para los tipos 1 y 2, las otras sí difieren; en particular, en (5) y (6) se preserva el orden para el tipo 1 y se invierte el orden para el tipo 2. Por tal motivo vamos a referirnos al tipo 1 como las **conexiones de Galois que preservan el orden** (**CGP**) y al tipo 2 como las **conexiones de Galois que invierten el orden** (**CGI**). Las funciones $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ $\left(\text{o } \left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f} \right\rangle\right)$ que cumplan de (3) a (6) son CGP (o CGI).

Otra propiedad que se cumple es que a partir de una de las adjuntas de una CG se puede recuperar la otra,

$$
\begin{array}{lll}
\text{CGP.} & \text{CGI.} & \\
\overrightarrow{f}(p) = \text{mín}\left\{q \in Q : p \leq \overleftarrow{f}(q)\right\}. & \underrightarrow{f}(p) = \text{mín}\left\{q \in Q : p \leq \underleftarrow{f}(q)\right\}. & (7) \\
\overleftarrow{f}(q) = \text{máx}\left\{p \in P : q \geq \overrightarrow{f}(p)\right\}. & \underleftarrow{f}(q) = \text{mín}\left\{p \in P : q \leq \underrightarrow{f}(p)\right\}. & (8)
\end{array}
$$

Si $\langle P, \leq_P \rangle$ y $\langle Q, \leq_Q \rangle$ son retículos completos, se cumplen algunas propiedades adicionales. Asuma que $A \subseteq P$ y que $B \subseteq Q$.

CGP.	CGI.
$\overrightarrow{f}\left(\bigvee A\right) = \bigvee_{a\in A} \overrightarrow{f}(a).$	$\underrightarrow{f}\left(\bigvee A\right) = \bigwedge_{a\in A} \underrightarrow{f}(a).$
$\overleftarrow{f}\left(\bigwedge B\right) = \bigwedge_{b\in B} \overleftarrow{f}(b).$	$\underleftarrow{f}\left(\bigvee B\right) = \bigwedge_{b\in B} \underleftarrow{f}(b).$

Las imágenes de $\overrightarrow{f}$ $\left(\text{o } \underrightarrow{f}\right)$ y de $\overleftarrow{f}$ $\left(\text{o } \underleftarrow{f}\right)$ son subretículos de Q y de P, respectivamente. Estos subretículos son isomorfos (o antiisomorfos) en una CGP (o CGI) respectivamente.

Estas propiedades se deducen de las definiciones.

Ejemplo 2.1. Dados dos conjuntos G y M y una relación binaria $R \subseteq G \times M$ se definen las funciones $\underleftarrow{R}$ y $\underrightarrow{R}$, llamadas función polar a izquierda y función polar a derecha, respectivamente.

$$\begin{aligned} &\underleftarrow{R} : \wp(M) \to \wp(G) \\ &\qquad B \mapsto \underrightarrow{R}(B) \coloneqq \big\{ g \in G : (\forall b \in B) \quad \langle g, b\rangle \in R \big\}. \\ &\underrightarrow{R} : \wp(G) \to \wp(M) \\ &\qquad A \mapsto \underrightarrow{R}(A) \coloneqq \big\{ m \in M : (\forall a \in A) \quad \langle a, m\rangle \in R \big\}. \end{aligned}$$

El par $\left\langle \underleftarrow{R}, \underrightarrow{R} \right\rangle$ forma una CGI.

Ejemplo 2.2. Sea σ_n el conjunto de los sistemas (finitos o infinitos) de ecuaciones lineales de $n \in \mathbb{N}$ variables en el campo K. Consideramos que dos ecuaciones son iguales si y sólo si tienen los mismos coeficientes y dos sistemas de ecuaciones son iguales si tienen exactamente las mismas ecuaciones (sin importar el orden).

La función $\underrightarrow{f} : \sigma_n \to \wp\big(K^n\big)$ envía un sistema de ecuaciones $S \in \sigma_n$ en su solución. La función $\underleftarrow{f} : \wp\big(K^n\big) \to \sigma_n$ envía un conjunto de puntos $P \subseteq K^n$ en el sistema de ecuaciones $S_P \in \sigma_n$ en donde una ecuación $e \in S_P$ si y sólo si P está contenido en el conjunto solución de e. Si ordenamos σ_n y $\wp\big(K^n\big)$ por contenencia entonces $\left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f} \right\rangle$ forma una CGI debido a que se cumplen las propiedades (3) a (6).

En el caso en que $K = \mathbb{Z}_2$ y $n = 2$ se tiene que σ_2 es el conjunto de partes de

$$\begin{aligned} \big\{ 0x + 0y = 0, &\qquad 0x + 0y = 1, &\qquad 0x + 1y = 0, &\qquad 0x + 1y = 1 \\ 1x + 0y = 0, &\qquad 1x + 0y = 1, &\qquad 1x + 1y = 0, &\qquad 1x + 1y = 1 \big\}. \end{aligned}$$

Calculamos algunos valores:

$$\underrightarrow{f}\big(\{1x+0y=1,\ 0x+1y=0\}\big) = \{\langle 1,0\rangle\}.$$
$$\underleftarrow{f}\big(\{\langle 1,0\rangle,\ \langle 0,1\rangle\}\big) = \{1x+1y=1\}.$$

2.2. Operador clausura

En una CGP $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ la composición de las adjuntas $h = \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}$ forma un **operador clausura**, o sea un operador **expansivo** (es decir, que para cada $p \in P$ se tiene que $p \leq h(p)$), **monótono** (es decir, que para cada $p_1, p_2 \in P$ se tiene que $p_1 \leq p_2 \to h(p_1) \leq h(p_2)$) e **idempotente** (es decir, que para cada $p \in P$ se tiene que $h(p) = h\big(h(p)\big)$).

La composición de las adjuntas $k = \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}$ de una CGP forma un operador kernel, es decir un operador que es **monótono**, **idempotente** y **reductivo** (i.e. para cada $p \in P$ se tiene que $p \geq k(p)$).

En una CGI $\left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f} \right\rangle$ las composiciones $\underleftarrow{f}\,\underrightarrow{f}$ y $\underrightarrow{f}\,\underleftarrow{f}$ forman operadores clausura. Los puntos fijos de los operadores clausura y kernel se llaman **cerrados**. Las CG restringidas a los cerrados son biyecciones.

Ejemplo 2.3. Con respecto el ejemplo 2.2, para el caso en que $K = \mathbb{Z}_2$ y $n = 2$,

$$\underleftarrow{f}\,\underrightarrow{f}\big(\{1x+0y=1,\ 0x+1y=0\}\big) = \{1x+0y=1,\ 0x+1y=0,\ 1x+1y=1\}.$$

Para el caso de tres variables ($n = 3$) y el campo de los reales ($K = \mathbb{R}$), la composición $\underrightarrow{f}\,\underleftarrow{f}$ envía un conjunto de puntos P al espacio, plano, recta o punto generado por P.

2.3. La categoría $\mathbb{CGP}$

En la literatura se presenta la categoría $\mathbb{CGP}$, en la cual los objetos son conjuntos ordenados y los morfismos son CGP.

La identidad de un conjunto ordenado consiste en la función identidad para las dos adjuntas. La composición de $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ (entre P y Q) con $\left\langle \overleftarrow{g}, \overrightarrow{g} \right\rangle$ (entre Q y R), que se muestran en la figura 1, es la CGP

$$\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle \circ \left\langle \overleftarrow{g}, \overrightarrow{g} \right\rangle \coloneqq \left\langle \overleftarrow{f} \circ \overleftarrow{g}, \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \right\rangle.$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left, "\overrightarrow{f}"] & Q \arrow[l, bend left, "\overleftarrow{f}"] \arrow[r, bend left, "\overrightarrow{g}"] & R \arrow[l, bend left, "\overleftarrow{g}"] \end{tikzcd}$$

Figura 1. Composición en la categoría de adjunciones.

3. Contextos formales

En la sección anterior se definió la categoría $\mathbb{CGP}$. Infortunadamente, no es posible realizar lo mismo con las CGI ya que la composición de dos CGI da una CGP, pero un camino para la creación de una categoría usando CGI son los Contextos formales.

Un Contexto formal (o simplemente Contexto) es una CGI entre los conjuntos de partes $\wp(G)$ y $\wp(M)$, donde G es un conjunto cualquiera cuyos elementos se llaman sujetos, M es un conjunto cualquiera cuyos elementos se llaman atributos. En [6, teorema 2] se muestra que los Contextos están en correspondencia biyectiva con las relaciones binarias, por eso un Contexto se representa por la tripla $\mathcal{R} = \langle G, M, R\rangle$ donde R es una relación binaria entre sujetos G y atributos M ($R \subseteq G \times M$). Las funciones $\left\langle \underrightarrow{R}, \underleftarrow{R} \right\rangle$ del ejemplo 2.1 permiten reconstruir las CGI.

Ejemplo 3.1. Debido a que en el ejemplo 2.2, σ_n es el conjunto de partes del conjunto E_n de ecuaciones de n variables, entonces $\underrightarrow{f} : \wp\big(E_n\big) \to \wp\big(K^n\big)$ y $\underleftarrow{f} : \wp\big(K^n\big) \to \wp\big(E_n\big)$. Por lo tanto $\left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f} \right\rangle$ forma un Contexto entre el conjunto de ecuaciones $\big(G := E_n\big)$ y el conjunto de puntos en n dimensiones $\big(M := K^n\big)$. Un elemento de la relación $\langle e, p\rangle \in R \subseteq G \times M$ implica que el punto p pertenece a la solución de la ecuación e. Para el caso particular en que $n = 2$ y $K = Z_2$ el Contexto se presenta en la tabla 1.

3.1. Extensión, comprensión y clarificado

Un cerrado en $\wp(G)$ se conoce como una **extensión** y un cerrado en $\wp(M)$ se conoce como una **comprensión**. El conjunto de extensiones de $\mathcal{R}$ forman un retículo conocido como el **retículo de extensión**, $\mathcal{G}_R$. De manera análoga, el conjunto de comprensiones de $\mathcal{R}$ se conoce como el **retículo de comprensión**, $\mathcal{M}_R$. Estos retículos son antiisomorfos. Un **concepto** corresponde a la extensión y la comprensión asociadas. El **retículo conceptual** es el retículo de los conceptos ordenados por extensiones.

Ejemplo 3.2. En la figura 2 se presenta el retículo conceptual del Contexto de la tabla 1, el cual fue realizado utilizando la herramienta libre ToscanaJ.

	$x=0$ $y=0$	$x=0$ $y=1$	$x=1$ $y=0$	$x=1$ $y=1$
$0x+0y=0$	x	x	x	x
$0x+0y=1$				
$0x+1y=0$	x		x	
$0x+1y=1$		x		x
$1x+0y=0$	x	x		
$1x+0y=1$			x	x
$1x+1y=0$	x			x
$1x+1y=1$		x	x	

TABLA 1. Contexto para $n=2$ y $K=\mathbb{Z}_2$.

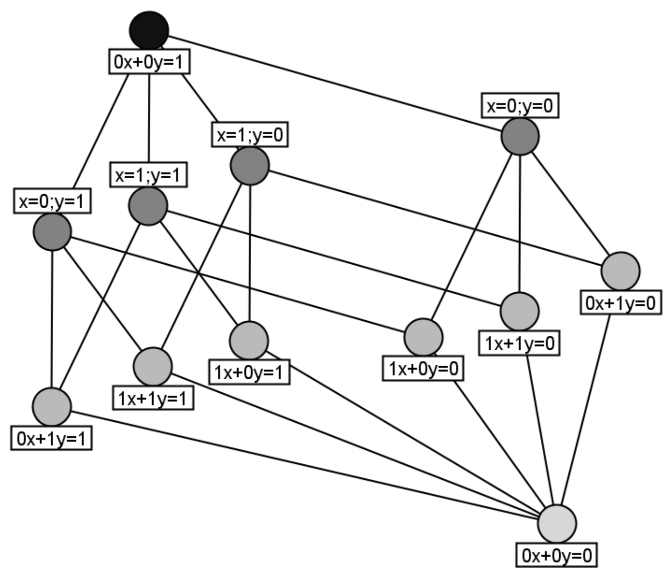

FIGURA 2. Retículo de extensión (ejemplo 3.2).

Con un conjunto ordenado $\langle P, \leq_P \rangle$ se puede construir el Contexto $\langle P, P, \leq_P \rangle$. En este caso el retículo de extensiones corresponde al completado de Dedekind-MacNeille de $\langle P, \leq_P \rangle$ y el retículo de comprensiones al completado de Dedekind-MacNeille de $\langle P, \geq_P \rangle$.

Un Contexto es **clarificado** si las funciones polares restringidas a los *singletons* son inyectivas. Intuitivamente, esto significa que si vemos la relación binaria como una tabla, no tiene ni columnas ni renglones repetidos.

4. Transformaciones de Chu

Históricamente, las construcciones de Chu [2] convierten categorías autónomas (i.e. categorías monoidales simétricas y cerradas) en categorías autónomas con objetos duales. Los espacios de Chu resultan al aplicar la construcción de Chu a la categoría de los conjuntos junto con las funciones [7, 3.7]. Los objetos de la categoría $\mathbb{CHU}$ son Contextos y los morfismos son las transformaciones de Chu. La subcategoría plena donde los Contextos son clarificados se denota $\mathbb{CHU}c$.

De acuerdo con [13] y [14], una **transformación de Chu** entre los Contextos $\mathcal{R}_1 = \left\langle G_1, M_1, R_1 \right\rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \left\langle G_2, M_2, R_2 \right\rangle$ consta de un par de funciones $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ con $\overrightarrow{f} : G_1 \to G_2$ y $\overleftarrow{f} : M_2 \to M_1$ tales que para todo $g \in G_1$ y para todo $m \in M_2$ se cumple que

$$\left\langle \overrightarrow{f}(g), m \right\rangle \in R_2 \Leftrightarrow \left\langle g, \overleftarrow{f}(m) \right\rangle \in R_1.$$

A partir de las definiciones se concluye que las CGP son un caso particular de las transformaciones de Chu, al considerar R_1 la relación de orden en P, $\leq_P$, y R_2 la relación de orden en Q, $\leq_Q$. Esto se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 4.1. $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ *es una conexión de Galois que preserva el orden entre los conjuntos ordenados* $\left\langle P, \leq_P \right\rangle$ *y* $\left\langle Q, \leq_Q \right\rangle$ *si y sólo* $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ *es una transformación de Chu entre los Contextos* $\left\langle P, P, \leq_P \right\rangle$ *y* $\left\langle Q, Q, \leq_Q \right\rangle$. *Por lo tanto la categoría* $\mathbb{CGP}$ *es una subcategoría plena de* $\mathbb{CHU}c$.

Una transformación de Chu $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ (y por lo tanto una CGP) entre los Contextos $\mathcal{R}_1 = \left\langle G_1, M_1, R_1 \right\rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \left\langle G_2, M_2, R_2 \right\rangle$ induce una relación binaria $S_f \subseteq G_1 \times M_2$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S_f := & \left\{ (g, m) \in G_1 \times M_2 : \left\langle g, \overleftarrow{f}(m) \right\rangle \in R_1 \right\} \\ & = \left\{ (g, m) \in G_1 \times M_2 : \left\langle \overrightarrow{f}(g), m \right\rangle \in R_2 \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

La siguiente proposición relaciona los Contextos, las funciones polares y la relación definida.

Proposición 4.2. *Sea* $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ *una transformación de Chu entre los Contextos* $\mathcal{R}_1 = \left\langle G_1, M_1, R_1 \right\rangle$ *y* $\mathcal{R}_2 = \left\langle G_2, M_2, R_2 \right\rangle$, *entonces*

$$\underrightarrow{S_f} = \underrightarrow{R_2} \overset{\rightrightarrows}{f} = \overset{\leftleftarrows}{f} \underrightarrow{R_1}.$$

$$\underleftarrow{S_f} = \underleftarrow{R_1} \overset{\rightleftarrows}{f} = \overset{\leftrightarrows}{f} \underleftarrow{R_2}.$$

donde $\overset{\rightrightarrows}{f}$, $\overset{\leftrightarrows}{f}$, $\overset{\rightleftarrows}{f}$ *y* $\overset{\leftleftarrows}{f}$ *son imágenes directa* $(\rightarrow)$ *e inversa* $(\leftarrow)$ *de* $\overrightarrow{f} : G_1 \rightarrow G_2$ *y de* $\overleftarrow{f} : M_2 \rightarrow M_1$*, respectivamente.*

Demostración. Para probar que $\underset{\leftarrow}{S_f} = \underset{\leftarrow}{R_1}\overset{\rightleftarrows}{f}$ asuma que $B \subseteq M_2$,

$$\underset{\leftarrow}{S_f}(B) = \bigcap_{b\in B} \underset{\leftarrow}{S_f}\{b\} = \bigcap_{b\in B} \underset{\leftarrow}{R_1}\left\{\overleftarrow{f}(b)\right\} = \underset{\leftarrow}{R_1}\left(\overset{\rightleftarrows}{f}(B)\right).$$

De manera similar se obtiene que $\underset{\rightarrow}{S_f} = \underset{\rightarrow}{R_2}\overset{\rightrightarrows}{f}$. Las otras dos igualdades se presentan en [13, 3.7 y 3.8] ☑

El siguiente ejemplo muestra una relación binaria que no proviene de una transformación de Chu.

Ejemplo 4.3. En la tabla 2 se presenta un enlace $\mathcal{S}$ para el cual no hay ninguna transformación de Chu que lo genere, porque las cuatro posibles funciones $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, $\overrightarrow{f}_3$, $\overrightarrow{f}_4 : M_1 \rightarrow M_2$ generan relaciones binarias, utilizando la igualdad (9), que son diferentes de $\mathcal{S}$ como se puede ver en la tabla 3.

	m_1^1	m_1^2		m_2^1	m_2^2	$\mathcal{S}$
g_1^2		X	g_1^2	X		g_1^2
g_1^1	X		g_1^1	X		g_1^1
$\mathcal{R}_1$	m_1^1	m_1^2		m_2^1	m_2^2	
			g_2^2		X	g_2^2
			g_2^1	X		g_2^1
			$\mathcal{R}_2$	m_2^1	m_2^2	

Tabla 2. Ejemplo de una relación binaria que no proviene de una transformación de Chu.

La proposición 4.5 establece condiciones necesarias y suficientes para que una relación binaria provenga de una transformación de Chu. Su demostración se basa en el procedimiento sugerido por [1].

Definición 4.4. Dados los Contextos $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1\rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2\rangle$ decimos que $S \subseteq G_1 \times M_2$ es una **relación de Chu** si cumplen las siguientes dos condiciones:

Para todo $g \in G_1$ existe $g' \in G_2$ tal que $\underset{\rightarrow}{R_2}(g') = \underset{\rightarrow}{S}(g)$.

Para todo $m' \in M_2$ existe $m \in M_1$ tal que $\underset{\leftarrow}{R_1}(m) = \underset{\leftarrow}{S}(m')$.

Una definición similar se encuentra en [9, 4.3.3].

Transfor. de Chu	m_2^1	m_2^2	
$\overrightarrow{f}_1(m_2^1) := m_1^1$			g_1^2
$\overrightarrow{f}_1(m_2^2) := m_1^1$	X	X	g_1^1
$\overrightarrow{f}_2(m_2^1) := m_1^1$		X	g_1^2
$\overrightarrow{f}_2(m_2^2) := m_1^2$	X		g_1^1
$\overrightarrow{f}_3(m_2^1) := m_1^2$	X		g_1^2
$\overrightarrow{f}_3(m_2^2) := m_1^1$		X	g_1^1
$\overrightarrow{f}_4(m_2^1) := m_1^2$	X	X	g_1^2
$\overrightarrow{f}_4(m_2^2) := m_1^2$			g_1^1
	m_2^1	m_2^2	

Tabla 3. Las transformaciones de Chu de M_1 a M_2 de la tabla 2 y la relación que generan con la igualdad (9).

Proposición 4.5. *Si S es una relación de Chu entre los Contextos $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, entonces existe una transformación de Chu $f_S := \left\langle \overleftarrow{f_S}, \overrightarrow{f_S} \right\rangle$ tal que $S_{f_S} = S$. Si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son clarificados entonces la transformación de Chu es única y $\overrightarrow{f_S}$ y $\overleftarrow{f_S}$ se determinan mutuamente.*

Recíprocamente, si S_f proviene de una transformación de Chu $f := \left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ entre $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ entonces S_f es una relación de Chu. Además si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son clarificados entonces $f_{S_f} = f$.

Demostración. Usando la notación de la definición 4.4, definimos $\overrightarrow{f_S}(g) = g'$ y $\overleftarrow{f_S}(m') = m$ y se tienen las siguientes equivalencias.

$$\overrightarrow{f_S}(g)\ R_2\ m' \Leftrightarrow g'\ R_2\ m' \Leftrightarrow g\ S\ m' \Leftrightarrow g\ R_1\ m \Leftrightarrow g\ R_1\ \overleftarrow{f_S}(m')$$

lo cual muestra que son una transformación de Chu.

Usando la definición se sigue que estas funciones generan a S. Si los Contextos son clarificados entonces g' y m son únicas y por lo tanto quedan definidas de manera unívoca las funciones $\overrightarrow{f_S}$ y $\overleftarrow{f_S}$. Cada una determina la otra debido a que con una función se puede generar a S_{f_S} y con S_{f_S} se puede determinar la otra función.

La afirmación recíproca se deduce de la proposición 4.2. ☑

Esta proposición generaliza las propiedades (7) y (8) de las CGP. Pero ¿qué otras propiedades de las conexiones de Galois se pueden generalizar a las transformaciones de Chu? Infortunadamente, las propiedades (1) a (6) no se pueden generalizar porque requieren que $G = M$.

Uniendo las proposiciones 4.1 y 4.5 se obtiene el siguiente resultado, que ya había sido presentado en [5, p. 84].

Corolario 4.6. *Una relación binaria S proviene de alguna conexión de Galois que preserva el orden entre los conjuntos ordenados $\langle P, \leq_P \rangle$ y $\langle Q, \leq_Q \rangle$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- *Para todo $g \in P$, $\underset{\rightarrow}{S}(g)$ es un filtro principal en $\langle Q, \leq_Q \rangle$.*
- *Para todo $m' \in Q$, $\underset{\leftarrow}{S}(m')$ es un ideal principal en $\langle P, \leq_P \rangle$.*

5. Enlaces

5.1. Productos subdirectos y enlaces

La **suma directa** de los contextos $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ es el contexto $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ definido por

$$\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 := \Big\langle (\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2), (\dot{M}_1 \cup \dot{M}_2), \Big(\dot{R}_1 \cup \dot{R}_2 \cup (\dot{G}_1 \times \dot{M}_2) \cup (\dot{G}_2 \times \dot{M}_1)\Big) \Big\rangle$$

en donde el punto denota para cualquier conjunto A y cualquier subíndice i, $\dot{A}_i := \{i\} \times A$.

El retículo de extensión de la suma directa de Contextos es isomorfo al producto de los retículos de extensión [6, teorema 31],

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} \cong \mathcal{G}_{\mathcal{R}_1} \times \mathcal{G}_{\mathcal{R}_2}.$$

El **producto subdirecto** de retículos completos es un subretículo completo del producto directo para el cual las proyecciones canónicas sobre los factores son sobreyectivas.

En [6, teorema 32] se caracterizan los productos subdirectos entre dos Contextos mediante unas relaciones binarias llamadas enlaces. Un **enlace** se define como una tripla $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ donde $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ son Contextos, y $S_1 \subseteq G_1 \times M_2$ es una relación binaria tal que

$$\underset{\rightarrow}{S_1}(\{g\}) \text{ es una comprensión para todo } g \in G_1.$$
$$\underset{\leftarrow}{S_1}(\{m\}) \text{ es una extensión para todo } m \in G_1.$$

Estos axiomas se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\underset{\rightarrow}{S_1}(\{g\}) = \underset{\rightarrow}{R_2}\underset{\leftarrow}{R_2}\underset{\rightarrow}{S_1}(\{g\}) \text{ para todo } g \in G_1.$$
$$\underset{\leftarrow}{S_1}(\{m\}) = \underset{\leftarrow}{R_1}\underset{\rightarrow}{R_1}\underset{\leftarrow}{S_1}(\{m\}) \text{ para todo } m \in G_1.$$

Vamos a probar que estos dos axiomas son equivalentes a formas más flexibles.

Teorema 5.1. *Sean $\langle G_1, M_1, R_1\rangle$, $\langle G_2, M_2, R_2\rangle$ y $\langle G_1, M_2, S_1\rangle$ Contextos. Las siguientes tres igualdades son equivalentes entre sí.*

$$\underrightarrow{S_1}(\{g\}) = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{g\}), \qquad \text{para todo } g \in G_1. \tag{10}$$

$$\underrightarrow{S_1} = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}. \tag{11}$$

$$\underleftarrow{S_1} = \underleftarrow{S_1}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}. \tag{12}$$

Dualmente, las siguientes igualdades son equivalentes.

$$\underleftarrow{S_1}(\{m\}) = \underleftarrow{R_1}\underrightarrow{R_1}\underleftarrow{S_1}(\{m\}), \qquad \text{para todo } m \in M_2. \tag{13}$$

$$\underleftarrow{S_1} = \underleftarrow{R_1}\underrightarrow{R_1}\underleftarrow{S_1}. \tag{14}$$

$$\underrightarrow{S_1} = \underrightarrow{S_1}\underleftarrow{\underrightarrow{R_1}}. \tag{15}$$

Demostración.

(10) $\Rightarrow$ (11) Para todo $A \subseteq G_1$,

$$\begin{aligned}
\underrightarrow{S_1}(A) &= \bigcap_{a\in A}\underrightarrow{S_1}(\{a\}) = \bigcap_{a\in A}\Big(\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\})\Big) = \underrightarrow{R_2}\left(\bigcup_{a\in A}\Big(\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\})\Big)\right)\\
&= \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{R_2}\left(\bigcup_{a\in A}\Big(\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\})\Big)\right) = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\left(\bigcap_{a\in A}\Big(\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\})\Big)\right)\\
&= \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\left(\bigcap_{a\in A}\Big(\underrightarrow{S_1}(\{a\})\Big)\right) = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(A).
\end{aligned}$$

(11) $\Rightarrow$ (10) Es evidente.
(11) $\Rightarrow$ (12) Suponga que $A \subseteq G_1$ y $B \subseteq M_2$,

$$\begin{aligned}
A \subseteq \underleftarrow{S_1}(B) &\Leftrightarrow \underrightarrow{S_1}(A) \supseteq B \Leftrightarrow \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(A) \supseteq B \Leftrightarrow \underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(A) \subseteq \underleftarrow{R_2}(B)\\
&\Leftrightarrow \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(A) \supseteq \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}(B) \Leftrightarrow \underrightarrow{S_1}(A) \supseteq \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}(B)\\
&\Leftrightarrow A \subseteq \underleftarrow{S_1}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}(B).
\end{aligned}$$

(12) $\Rightarrow$ (11)

$$\underrightarrow{S_1} = \underrightarrow{S_1}\underleftarrow{S_1}\underrightarrow{S_1} = \underrightarrow{S_1}\Big(\underleftarrow{S_1}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\Big)\underrightarrow{S_1} = \Big(\underrightarrow{S_1}\underleftarrow{S_1}\Big)\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1} \supseteq \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1} \supseteq \underrightarrow{S_1}.$$

La equivalencia entre (13), (14) y (15) es análoga. ☑

5.2. Las categorías $\mathbb{BOND}$ y $\mathbb{BOND}c$

En la categoría $\mathbb{BOND}$ los objetos son Contextos y los morfismos son enlaces. La categoría $\mathbb{BOND}c$ es la subcategoría plena de $\mathbb{BOND}$ en donde los Contextos están restringidos a los clarificados. La composición de enlaces de las dos categorías se define como en [6, proposición 84].

$$\left\langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \right\rangle \Box \left\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \right\rangle := \left\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3, S_2 \overset{R_2}{\Box} S_1 \right\rangle$$

donde $S_2 \overset{R_2}{\Box} S_1$ es la **composición de relaciones binarias** S_1 y S_2 a través de R_2 definida como

$$S_2 \overset{R_2}{\Box} S_1 := \left\{ \langle g, m \rangle \in G_1 \times M_3 : m \in \underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{g\}) \right\}.$$

Si R_2 es implícito, la composición $S_2 \overset{R_2}{\Box} S_1$ será denotada como $S_2 \Box S_1$. Si no hay confusión, la composición $\left\langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \right\rangle \Box \left\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \right\rangle$ será también denotada como $S_2 \Box S_1$.

El **enlace identidad** de un Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ se define como el enlace $\langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R \rangle$.

Si no hay confusión, un enlace identidad $\langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R \rangle$ puede ser denotado como R.

Para probar que la categoría $\mathbb{BOND}$ está bien definida, se necesita el siguiente resultado.

Teorema 5.2 (**Caracterización de la composición de enlaces**). *Sean* $\mathcal{S}_1 = \left\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \right\rangle$ *y* $\mathcal{S}_2 = \left\langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \right\rangle$ *dos enlaces, entonces*

$$\underrightarrow{S_2 \Box S_1}(\{a\}) = \underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\}) \quad \text{para todo sujeto } a \text{ en } \mathcal{R}_1. \tag{16}$$

$$\underleftarrow{S_2 \Box S_1}(\{b\}) = \underleftarrow{S_1}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{S_2}(\{b\}) \quad \text{para todo atributo } b \text{ en } \mathcal{R}_3. \tag{17}$$

$$\underrightarrow{S_2 \Box S_1} = \underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}. \tag{18}$$

$$\underleftarrow{S_2 \Box S_1} = \underleftarrow{S_1}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{S_2}. \tag{19}$$

Demostración.

- Prueba de (16). Es directa de las definiciones de composición.
- Prueba de (17). Sea a un sujeto de R_1 y b un atributo de R_3.

$$\begin{aligned}\underleftarrow{S_2 \square S_1}(\{b\}) \ni a \Leftrightarrow b \in \underrightarrow{S_2 \square S_1}(\{a\}) &\Leftrightarrow b \in \underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\})\\ &\Leftrightarrow \underleftarrow{S_2}(\{b\}) \supseteq \underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\}) \Leftrightarrow \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{S_2}(\{b\}) \subseteq \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\})\\ &\Leftrightarrow \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{S_2}(\{b\}) \subseteq \underrightarrow{S_1}(\{a\}) \Leftrightarrow \underleftarrow{S_1}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{S_2}(\{b\}) \ni a.\end{aligned}$$

- Prueba de (18). Sea A cualquier subconjunto de sujetos de R_1.

$$\begin{aligned}\underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(A) = \underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}\left(\bigcup_{a\in A}(\{a\})\right) &= \underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\left(\bigcap_{a\in A}\left(\underrightarrow{S_1}(\{a\})\right)\right)\\ &= \bigcap_{a\in A}\left(\underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}(\{a\})\right) = \bigcap_{a\in A}\left(\underrightarrow{S_2 \square S_1}(\{a\})\right)\\ &= \underrightarrow{S_2 \square S_1}\left(\bigcup_{a\in A}(\{a\})\right) = \underrightarrow{S_2 \square S_1}(A).\end{aligned}$$

- Prueba de (19). Es dual de la prueba de (18). ☑

Debido a los resultados anteriores, podemos concluir que las composiciones $\left\langle \underleftarrow{S_1}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{S_2}, \underrightarrow{S_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_1}\right\rangle$ forman una CGI y que las categorías $\mathbb{BOND}$ y $\mathbb{BOND}c$ están bien definidas.

5.3. Funtor entre enlaces y transformaciones de Chu

Es un hecho conocido [9, 4.4.3] que las relaciones binarias inducidas por transformaciones de Chu $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f}\right\rangle$ (y por lo tanto las CGP) son un caso particular de los enlaces, lo cual se puede comprobar a partir de la identidad (1) y la proposición 4.2.

Proposición 5.3. *Toda relación S_f inducida por una transformación de Chu $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f}\right\rangle$ es un enlace.*

No todo enlace proviene de una transformación de Chu. Como se muestra a partir del ejemplo 4.3, S no proviene de una transformación de Chu, pero a continuación se muestra que sí es un enlace.

$$
\begin{array}{ll}
\underrightarrow{S}(\varnothing) = M_2 = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S}(\varnothing). & \underleftarrow{S}(\varnothing) = G_1 = \underleftarrow{R_1}\underrightarrow{R_1}\underleftarrow{S}(\varnothing). \\
\underrightarrow{S}\left(\{g_1^1\}\right) = \{m_2^1\} = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S}\left(\{g_1^1\}\right). & \underleftarrow{S}\left(\{m_2^1\}\right) = G_1 = \underleftarrow{R_1}\underrightarrow{R_1}\underleftarrow{S}\left(\{m_2^1\}\right). \\
\underrightarrow{S}\left(\{g_1^2\}\right) = \{m_2^1\} = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S}\left(\{g_1^2\}\right). & \underleftarrow{S}\left(\{m_2^2\}\right) = \varnothing = \underleftarrow{R_1}\underrightarrow{R_1}\underleftarrow{S}\left(\{m_2^2\}\right). \\
\underrightarrow{S}(G_1) = \{m_2^1\} = \underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S}(G_1). & \underleftarrow{S}(G_1) = \varnothing = \underleftarrow{R_1}\underrightarrow{R_1}\underleftarrow{S}(G_1).
\end{array}
$$

La proposición 4.5 también establece las condiciones que debe cumplir el enlace para que provenga de una transformación de Chu. En particular cuando los Contextos $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son clarificados se tiene una correspondencia biyectiva entre las transformaciones de Chu y las relaciones de Chu. Por lo tanto, vamos a considerar a $\mathbb{CHU}_c$ como una subcategoría de $\mathbb{BOND}_c$.

En la proposición 5.3 se afirma que las relaciones inducidas por transformaciones de Chu son enlaces. Esto permite tener dos tipos de composiciones para estas relaciones inducidas, una debida a las transformaciones de Chu y otra debida a los enlaces. El siguiente resultado muestra que ambos tipos de composiciones son compatibles.

Proposición 5.4. *Sean* $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1\rangle$, $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2\rangle$ *y* $\mathcal{R}_3 = \langle G_3, M_3, R_3\rangle$ *Contextos y sean* $\left\langle \overrightarrow{f}_1 : G_1 \to G_2,\ \overleftarrow{f}_1 : M_2 \to M_1\right\rangle$ *y* $\left\langle \overrightarrow{f}_2 : G_2 \to G_3,\ \overleftarrow{f}_2 : M_3 \to M_2\right\rangle$ *transformaciones de Chu, entonces*

$$S_{f_2} \,\square\, S_{f_1} = S_{f_2 \circ f_1}.$$

Demostración. Es suficiente probar que $\underrightarrow{S_{f_2} \,\square\, S_{f_1}} = \underrightarrow{S_{f_2\circ f_1}}$.

$$
\begin{aligned}
\underrightarrow{S_{f_2} \,\square\, S_{f_1}} &= \underrightarrow{S_{f_2}}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{S_{f_1}} = \underrightarrow{R_3}\overset{\rightrightarrows}{f_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{R_2}\overset{\rightrightarrows}{f_1} = \overset{\leftleftarrows}{f_2}\underrightarrow{R_2}\underleftarrow{R_2}\underrightarrow{R_2}\overset{\rightrightarrows}{f_1} = \\
&\qquad \overset{\leftleftarrows}{f_2}\underrightarrow{R_2}\overset{\rightrightarrows}{f_1} = \underrightarrow{R_3}\overset{\rightrightarrows}{f_2}\overset{\rightrightarrows}{f_1} = \underrightarrow{R_3}\overrightarrow{\overrightarrow{f_2}\,\overrightarrow{f_1}} = \underrightarrow{S_{f_2\circ f_1}}. \quad ☑
\end{aligned}
$$

Esto permite construir el funtor **CB** de $\mathbb{CHU}$ en $\mathbb{BOND}$ el cual deja los Contextos iguales y convierte las transformaciones de Chu $\left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f}\right\rangle$ en la relación de Chu S_f.

6. Las categorías de morfismos de Galois $\mathbb{MGI}$ y $\mathbb{MGP}$ y las categorías de adjunciones

Se ha visto que los enlaces forman una categoría; además, están basados en las funciones polares, que a su vez son CGI. A continuación vamos a usar estos resultados para definir una categoría basada en CGI.

6.1. La categoría $\mathbb{MGI}$

Los objetos de la categoría $\mathbb{MGI}$ son CGI $\left\langle \underleftarrow{f_1}, \underrightarrow{f_1} \right\rangle$ entre un conjunto ordenado de extensiones $\left\langle P_1, \leq \right\rangle$ y un conjunto ordenado de comprensiones $\left\langle Q_1, \leq \right\rangle$.

Un morfismo de $\mathbb{MGI}$ entre los objetos $\left\langle \underleftarrow{f_1}, \underrightarrow{f_1} \right\rangle$ y $\left\langle \underleftarrow{f_2}, \underrightarrow{f_2} \right\rangle$ es una CGI $\left\langle \underleftarrow{h_{1,2}},\ \underrightarrow{h_{1,2}} \right\rangle$ entre $\left\langle P_1, \leq \right\rangle$ y $\left\langle Q_2, \leq \right\rangle$ que cumple los siguientes axiomas.

$$\underrightarrow{h_{1,2}} = \underrightarrow{f_2}\underleftarrow{f_2}\underrightarrow{h_{1,2}}, \tag{20}$$

$$\underleftarrow{h_{1,2}} = \underleftarrow{f_1}\underrightarrow{f_1}\underleftarrow{h_{1,2}}. \tag{21}$$

Estos morfismos los llamamos **morfismos de Galois** y su composición se define así:

$$\left\langle \underleftarrow{h_{2,3}}, \underrightarrow{h_{2,3}} \right\rangle \,\square\, \left\langle \underleftarrow{h_{1,2}},\ \underrightarrow{h_{1,2}} \right\rangle = \left\langle \underleftarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}},\ \underrightarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}} \right\rangle,$$

en donde

$$\begin{aligned} \underrightarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}} &\coloneqq \underrightarrow{h_{2,3}} \circ \underleftarrow{f_2} \circ \underrightarrow{h_{1,2}}, \\ \underleftarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}} &\coloneqq \underleftarrow{h_{1,2}} \circ \underrightarrow{f_2} \circ \underleftarrow{h_{2,3}}. \end{aligned}$$

Y la identidad de $\left\langle \underleftarrow{f_1}, \underrightarrow{f_1} \right\rangle$ es la misma $\left\langle \underleftarrow{f_1}, \underrightarrow{f_1} \right\rangle$.

Veamos ahora que efectivamente es una categoría. Lo primero que hay que probar es que la composición es una CGI.

$$\begin{aligned} \underrightarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}}(p) \geq q \Leftrightarrow \underrightarrow{h_{2,3}}\underleftarrow{f_2}\underrightarrow{h_{1,2}}(p) \geq q &\Leftrightarrow \underleftarrow{f_2}\underrightarrow{h_{1,2}}(p) \leq \underleftarrow{h_{2,3}}(q) \\ &\Leftrightarrow \underleftarrow{f_2}\underrightarrow{h_{1,2}}(p) \leq \underleftarrow{\underrightarrow{f_2}}\underleftarrow{h_{2,3}}(q) \Leftrightarrow \underrightarrow{\underleftarrow{f_2}}\underrightarrow{h_{1,2}}(p) \geq \underrightarrow{f_2}\underleftarrow{h_{2,3}}(q) \\ &\Leftrightarrow \underrightarrow{h_{1,2}}(p) \geq \underrightarrow{f_2}\underleftarrow{h_{2,3}}(q) \Leftrightarrow p \leq \underleftarrow{h_{1,2}}\underrightarrow{f_2}\underleftarrow{h_{2,3}}(q) \\ &\Leftrightarrow p \leq \underleftarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}}(q). \end{aligned}$$

La composición es asociativa ya que la composición de funciones es asociativa.

La identidad está bien definida debido a las siguiente caracterización de los axiomas de morfismo de Galois (20) y (21):

$$\left(\underrightarrow{h_{1,2}} = \underrightarrow{f_2}\underleftarrow{f_2}\underrightarrow{h_{1,2}}\right) \Leftrightarrow \left(\underleftarrow{h_{1,2}} = \underleftarrow{h_{1,2}}\underrightarrow{f_2}\underleftarrow{f_2}\right), \tag{22}$$

$$\left(\underleftarrow{h_{1,2}} = \underleftarrow{f_1}\underrightarrow{f_1}\underleftarrow{h_{1,2}}\right) \Leftrightarrow \left(\underrightarrow{h_{1,2}} = \underrightarrow{h_{1,2}}\underleftarrow{f_1}\underrightarrow{f_1}\right). \tag{23}$$

La demostración es análoga a la del Teorema 5.1. Ahora se puede concluir que la categoría $\mathbb{MGI}$ está bien definida.

De las definiciones se concluye que la categoría $\mathbb{BOND}$ es una subcategoría plena de $\mathbb{MGI}$ debido a que las conexiones de Galois entre retículos de partes están en correspondencia biyectiva con los Contextos. En [10] se presentan unas categorías similares pero los morfismos no "representan" adecuadamente las propiedades de los objetos.

6.2. Las categorías de adjunciones

Usando la misma idea que se utilizó para la construcción de la categoría $\mathbb{MGI}$ vamos ahora a desarrollar una metodología general para construir una categoría de adjunciones $\mathbb{ADJ}_{\mathbb{C}}$, dada una categoría cualquiera $\mathbb{C}$ y dos subclases de objetos de $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$. Si no se especifican $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ se asume que ambas corresponden a la clase de objetos de $\mathbb{C}$.

Cada objeto de la categoría $\mathbb{ADJ}_{\mathbb{C}}$ está formado por un par de morfismos $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ de $\mathbb{C}$, llamado adjunción, en donde $\overrightarrow{f}$ va de algún $P \in \mathcal{P}$ en algún $Q \in \mathcal{Q}$ y $\overleftarrow{f}$ va de Q en P. Además, deben cumplirse los siguientes dos axiomas:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f} &= \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}, \\ \overleftarrow{f} &= \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}. \end{aligned}$$

Un morfismo de la categoría $\mathbb{ADJ}_{\mathbb{C}}$, entre una adjunción $\left\langle \overleftarrow{f_1}, \overrightarrow{f_1} \right\rangle$ (de P_1 en Q_1) y una adjunción $\left\langle \overleftarrow{f_2}, \overrightarrow{f_2} \right\rangle$ (de P_2 en Q_2), es un par de morfismos $\left\langle \overleftarrow{h_{1,2}}, \overrightarrow{h_{1,2}} \right\rangle$ (de P_1 en Q_2) el cual cumple los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{h_{1,2}} &= \overrightarrow{h_{1,2}}\,\overleftarrow{f_1}\,\overrightarrow{f_1}, \\ \overleftarrow{h_{1,2}} &= \overleftarrow{h_{1,2}}\,\overrightarrow{f_2}\,\overleftarrow{f_2}, \\ \overrightarrow{h_{1,2}} &= \overrightarrow{f_2}\,\overleftarrow{f_2}\,\overrightarrow{h_{1,2}}, \\ \overleftarrow{h_{1,2}} &= \overleftarrow{f_1}\,\overrightarrow{f_1}\,\overleftarrow{h_{1,2}}. \end{aligned}$$

La composición entre dos morfismos $\left\langle \overleftarrow{h_{1,2}}, \overrightarrow{h_{1,2}} \right\rangle$ y $\left\langle \overleftarrow{h_{2,3}}, \overrightarrow{h_{2,3}} \right\rangle$, que se presentan en la figura 3, se define así:

$$\left\langle \overleftarrow{h_{2,3}}, \overrightarrow{h_{2,3}} \right\rangle \,\square\, \left\langle \overleftarrow{h_{1,2}}, \overrightarrow{h_{1,2}} \right\rangle = \left\langle \overleftarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}}, \overrightarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}} \right\rangle,$$

en donde

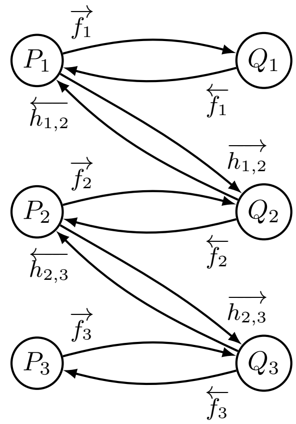

FIGURA 3. Composición en la categoría de adjunciones.

$$\overrightarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}} \coloneqq \overrightarrow{h_{2,3}} \circ \overleftarrow{f_2} \circ \overrightarrow{h_{1,2}},$$
$$\overleftarrow{h_{2,3\,\circ\,1,2}} \coloneqq \overleftarrow{h_{1,2}} \circ \overrightarrow{f_2} \circ \overleftarrow{h_{2,3}}.$$

Dado un objeto $f = \left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ de $\mathbb{ADJ}_{\mathbb{C}}$ su identidad es el mismo objeto $f = \left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$.

6.3. La categoría $\mathbb{MGP}$

Definimos la categoría $\mathbb{MGP}$ como la categoría de las adjunciones de $\mathbb{CGP}$, es decir,
$$\mathbb{MGP} \coloneqq \mathbb{ADJ}_{\mathbb{CGP}}.$$

Proposición 6.1. *Las categorías $\mathbb{MGP}$ y $\mathbb{MGI}$ son isomorfas.*

Demostración. Antes de definir el isomorfismo necesitamos definir para cada conjunto ordenado de comprensiones $\langle Q, \leq_Q \rangle$ la CGI $\left\langle \underleftarrow{Q}, \underrightarrow{Q} \right\rangle$ que va de $\langle Q, \leq_Q \rangle$ en $\langle Q, \geq_Q \rangle$ en donde $\underleftarrow{Q} = \underrightarrow{Q} = Id_Q$ y $\geq_Q$ es el orden inverso de $\leq_Q$.

El funtor **IP** envía una CGI $\left\langle \underleftarrow{f}, \underrightarrow{f} \right\rangle$ en la CGP $\left\langle \underleftarrow{f}\,\underleftarrow{Q}, \underrightarrow{Q}\,\underrightarrow{f} \right\rangle$ y este funtor **IP** también envía una MGI $\left\langle \underleftarrow{h}, \underrightarrow{h} \right\rangle$ en la MGP $\left\langle \underleftarrow{h}\,\underleftarrow{Q}, \underrightarrow{Q}\,\underrightarrow{h} \right\rangle$.

De manera análoga, el funtor **PI** envía una CGP $\left\langle \overleftarrow{f}, \overrightarrow{f} \right\rangle$ en la CGI $\left\langle \overleftarrow{f}\,\underleftarrow{Q}, \underrightarrow{Q}\,\overrightarrow{f} \right\rangle$ y una MGP $\left\langle \overleftarrow{h}, \overrightarrow{h} \right\rangle$ en la MGI $\left\langle \overleftarrow{h}\,\underleftarrow{Q}, \underrightarrow{Q}\,\overrightarrow{h} \right\rangle$.

Estos funtores forman un isomorfismo debido a que la composición de las CGI $\left\langle \underleftarrow{Q}\,\underleftarrow{Q}, \underrightarrow{Q}\,\underrightarrow{Q} \right\rangle$ es la CGP identidad, $\left\langle \overleftarrow{Id_Q}, \overrightarrow{Id_Q} \right\rangle$, en $\langle Q, \leq_Q \rangle$. ☑

6.4. Conclusión

En la figura 4, se resumen las categorías presentadas en este artículo, en donde las flechas sólidas indican subcategorías y la flecha punteada indica funtor. Es de resaltar que una categoría basada en las CGI ($\mathbb{MGI}$) es una generalización de la categoría $\mathbb{CGP}$ y entre estas dos categorías se encuentran las categorías de enlaces y de transformaciones de Chu.

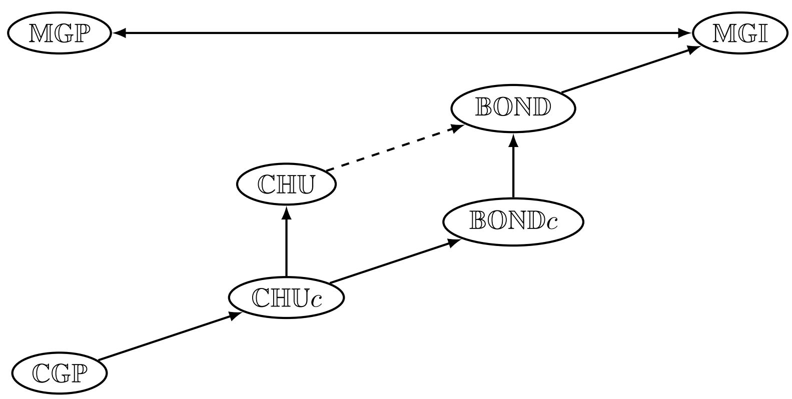

Figura 4. Mapa de las categorías.

Agradecimiento. El autor agradece al profesor Rodrigo De Castro de la Universidad Nacional de Colombia por todos sus aportes.

Referencias

[1] Roland Backhouse, *Pair Algebras and Galois Connections*, Information Processing Letters **67** (1998), no. 4, 169–175.

[2] Michael Barr, **-Autonomous Categories, Revisited*, Journal of Pure and Applied Algebra **111** (1996), no. 1, 1–20.

[3] Brian A. Davey and Hilary A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2002.

[4] Jeffrey T. Denniston, Austin Melton, and Stephen E. Rodabaugh, *Formal Concept Analysis and Lattice-Valued Chu Systems*, Fuzzy Sets and Systems **216** (2013), 52–90, Special Issue: Linz 2011 - Decision Theory: Qualitative and Quantitative Approaches.

[5] Marcel Erné, *Adjunctions and Galois Connections: Origins, History and Development*, Mathematics and Its Applications, vol. 565, Springer Netherlands, 2004.

[6] Bernhard Ganter and Rudolf Wille, *Formal Concept Analysis - Mathematical Foundations*, Springer, Berlin, Germany, 1999.

[7] Vineet Gupta, *Chu Spaces: A Model of Concurrency*, Ph.D. thesis, Stanford University, September 1994.

[8] Ondrej Kridlo, Patrik Mihalcin, Stanislav Krajci, and L'ubomír Antoni, *Formal Concept Analysis of Higher Order*, CLA, 2013, pp. 117–128.

[9] Markus Krözsch, *Morphisms in Logic, Topology, and Formal Concept Analysis*, Master's thesis, Dresden University of Technology, 2005.

[10] J. M. McDill, A. C. Melton, and G. E. Strecker, *A Category of Galois Connections*, Category Theory and Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, vol. 283, Springer Berlin Heidelberg, 1987, pp. 290–300.

[11] Gerardo-Alcides Munoz, *Categorías de contextos formales*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2011.

[12] Lili Shen and Dexue Zhang, *The Concept Lattice Functors*, International Journal of Approximate Reasoning **54** (2013), no. 1, 166–183.

[13] Guo-Qiang Zhang, *Chu Spaces, Concept Lattices, and Domains*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **83** (2003), 287–302, Proceedings of 19th Conference on the Mathematical Foundations of Programming Semantics.

[14] Guo-Qiang Zhang and Gongqin Shen, *Aproximable Concepts, Chu Spaces, and Information Systems*, Theory and Applications of Categories **17** (2006), no. 5, 80–102.

(Recibido en noviembre de 2012. Aceptado en enero de 2014)

Facultad de Ingeniería
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Carrera 7, calle 40, piso 5
Bogotá, Colombia
e-mail: gmunoz@udistrital.edu.co