

Solución numérica de un modelo Black-Scholes no local y no lineal por molificación discreta

Numerical solution of a nonlocal and nonlinear Black-Scholes model
by means of discrete mollification

HAROLD CONTRERAS^{1,✉}, CARLOS DANIEL ACOSTA²,
LORENA AGUIRRE²

¹Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia

²Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia

ABSTRACT. En el presente trabajo se presenta el desarrollo numérico para un modelo Black-Scholes no lineal y no local utilizando los métodos de diferencias finitas, integración numérica y molificación discreta. De dicho modelo, se analizan las condiciones de estabilidad y convergencia para la discretización propuesta.

Key words and phrases. Ecuación Black-Scholes no local y no lineal, diferencias finitas, molificación discreta.

2010 Mathematics Subject Classification. 65M06, 65M12, 35R09.

RESUMEN. In this paper, we study a nonlinear nonlocal Black-Scholes model by means of the methods of finite differences, numerical integration and discrete mollification. In this model, conditions for stability and convergence of the discretization proposed are discussed.

Palabras y frases clave. Non local Black-Scholes equation, finite differences, discrete mollification.

1. Introducción

Nos interesa realizar la aproximación de la solución a una ecuación diferencial parcial tipo parabólica asociada al modelo de Black-Scholes (ver [7]), la cual

tiene importantes aplicaciones en finanzas. Nuestro modelo viene dado por:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = A(u)_{xx}(x, t) + cu_x(x, t) - ru(x, t) + \\ \quad + \int_{\mathbb{R}} J(s - x)B(u)(s, t)ds - B(u)(x, t) & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}$ un dominio suave y acotado, $T > 0$, y $A(u) = \int_0^u a(s)ds$ y $B(u) = \int_0^u b(s)ds$ funciones suaves y a, b funciones no negativas y acotadas en todo su dominio. En este modelo consideramos $r \geq 0$ representando la tasa de interés libre, $c \in \mathbb{R}$ la desviación de tasa y $u(x, t)$ la opción de precio (crédito contingente). El efecto de los vecinos cercanos x y s se describe por medio de $J : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ una función suave, no negativa, simétrica, que decae en los límites y tal que $\int_{\mathbb{R}} J(z) = 1$. A la función J anterior se la denomina kernel. En este artículo trabajamos con funciones kernel que sean estrictamente positivas en un intervalo $(-p, p)$ para algún $p \in \mathbb{R}^+$ y $J(\xi) = 0$ para $\xi \notin (-p, p)$.

La ecuación (1) surge como una variación del modelo de Black-Scholes lineal y no local estudiado recientemente en [6] y [5] desde el punto de vista numérico, y considerando $A(u) = bu$ y $B(u) = du$ con $b, d \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Más específicamente, en [5] se usó una discretización basada en los métodos de diferencias finitas y molificación discreta, se obtuvo una condición CFL, y se probó que el esquema cumple propiedades importantes tales como regularidad, variación total decreciente (TVD) y demás. Por otro lado, en [6] se implementó un método multigrad para acelerar los algoritmos allí planteados. En estos artículos, se asume que la condición inicial u_0 se encuentra en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y que una solución u también está en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y es Lipschitziana con respecto a la primera variable en casi todas partes. Al igual que en [6] y [5], en el presente artículo hacemos las mismas consideraciones sobre u_0 y u . Además, asumimos que tanto $A(s)$ como $B(s)$ son funciones Lipschitzianas.

Respecto a lo teórico, la ecuación (1) ha sido estudiada desde este punto de vista en [9], [8] y [10] para los casos en los que $A(u) = c = r = 0$ y $B(u) = u$, donde se estudiaron la existencia, la unicidad y el comportamiento asintótico de las soluciones.

En cuanto al método de molificación discreta (ver [2, 3, 4] y [11]), este es un procedimiento de filtrado basado en convolución, que es una forma simple y efectiva para estabilizar esquemas explícitos para ecuaciones diferenciales (ver [1]). En [5] se implementó este método para realizar la aproximación numérica de la integral que figura en el esquema allí propuesto.

Como se puede evidenciar, los estudios sobre el modelo lineal y no local de Black-Scholes son amplios; sin embargo, el tratamiento numérico de modelos no locales y no lineales para dicha ecuación son casi nulos. Nuestro objetivo con este artículo es desarrollar un método numérico que aproxime en forma eficiente soluciones al modelo no local y no lineal de Black-Scholes y empezar a sentar bases para estudios que vayan cada vez más ajustados a la realidad.

Para ello, iniciamos nuestro estudio aproximando mediante diferencias finitas las derivadas que aparecen en (1) y mediante molificación discreta aproximamos la integral que allí también aparece, de manera similar a como se hizo en [5].

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 presentamos la discretización de nuestro modelo. En la sección 3 presentamos el análisis de convergencia de nuestro método para el cual establecemos algunos supuestos iniciales, y enseguida establecemos la condición CFL bajo la cual se garantiza la monotonía del esquema planteado, además que nuestro esquema cumple la ley conservativa, la propiedad de variación total decreciente (TVD) y regularidad. Finalmente, en la sección 4 desarrollamos algunos experimentos numéricos que muestran la eficiencia del método numérico que proponemos.

2. Aproximación Numérica

Para el tamaño de la malla se tomarán $\Delta x > 0$ y $\Delta t > 0$, de modo que (x_j, t^n) son los puntos en los que se evaluarán las aproximaciones del esquema numérico a la solución de (1), donde $x_j = j\Delta x$ y $t^n = n\Delta t$, para j entero y n un número natural mayor o igual que 1. La discretización del dato inicial está dada por:

$$v_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{(j-\frac{1}{2})\Delta x}^{(j+\frac{1}{2})\Delta x} v^0(x) dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Evaluamos ahora la ecuación (1) en nuestra discretización, obteniendo:

$$\begin{aligned} u_t(x_j, t^n) = & A(u)_{xx}(x_j, t^n) + cu_x(x_j, t^n) - ru(x_j, t^n) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} J(s - x_j) B(u(s, t^n)) ds - B(u(x_j, t^n)). \end{aligned} \quad (3)$$

Lo siguiente que haremos es aplicar el método de diferencias finitas para aproximar cada una de las derivadas que figuran en (1). Para los términos de (1) relacionados con la primera derivada utilizaremos diferencias finitas hacia adelante, mientras que para la segunda derivada espacial implementaremos diferencias finitas centradas. Denotando por $u_j^n := u(x_j, t^n)$, llegamos a

$$u_t(x_j, t^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (4)$$

$$u_x(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5)$$

y

$$A(u)_{xx} = \frac{A(u_{j+1}^n) - 2A(u_j^n) + A(u_{j-1}^n))}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2). \quad (6)$$

Ahora procedemos a aproximar la integral que aparece en (3), mediante molificación discreta, de la siguiente forma.

Tomando $\xi = s - x_j$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} J(s - x_j) B(u(s, t^n)) ds &= \int_{\mathbb{R}} J(-\xi) B(u(x_j + \xi, t^n)) d\xi \\ &= \int_{-p}^p J(\xi) B(u(x_j + \xi, t^n)) d\xi, \end{aligned}$$

pues $J(\xi) = 0$ para $\xi \notin (-p, p)$ y J es simétrica respecto al eje Y , de modo que $J(\xi) = J(-\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Ahora, sea $\eta \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\left(\eta - \frac{1}{2}\right)\Delta x < p \leq \left(\eta + \frac{1}{2}\right)\Delta x \Leftrightarrow \eta < \frac{p}{\Delta x} + \frac{1}{2} \leq \eta + 1.$$

Como $[-p, p] \subseteq \left[-\left(\eta + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(\eta + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right]$, entonces

$$\int_{-p}^p J(\xi) B(u(x_j + \xi, t^n)) d\xi = \sum_{i=-\eta}^{\eta} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} J(-\xi) B(u(x_j + \xi, t^n)) d\xi. \quad (7)$$

De (7) y por la condición de Lipschitz sobre u y $B(u)$, obtendremos la aproximación de la integral de la ecuación (3), donde $\tilde{u}(x, t^n) = u(x_j, t^n)$, para $x \in I_j := \left[\left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right]$.

Sea $x \in I_j$. Entonces, si L denota la constante de Lipchitz para u tenemos lo siguiente

$$\left|u(x, t^n) - \tilde{u}(x, t^n)\right| = \left|u(x, t^n) - u(x_j, t^n)\right| \leq L|x - x_j| \leq L\frac{\Delta x}{2}.$$

Obsérvese ahora que si L_1 denota la constante de Lipchitz para $B(u)$ podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\left|\int_{I_j} J(-\xi) B(u(x_j + \xi, t^n)) d\xi - \int_{I_j} J(-\xi) B(\tilde{u}(x_j + \xi, t^n)) d\xi\right| \\ &\leq \int_{I_j} J(-\xi) \left|B(u(x_j + \xi, t^n)) - B(\tilde{u}(x_j + \xi, t^n))\right| d\xi \\ &\leq \int_{I_j} J(-\xi) (L_1) \left|u(x_j + \xi, t^n) - \tilde{u}(x_j + \xi, t^n)\right| d\xi \\ &\leq \frac{L_1 L \Delta x}{2} \int_{I_j} J(-\xi) d\xi \\ &\leq \frac{L_1 L \Delta x}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, definiendo

$$w_{-i} := \int_{I_i} J(-\xi) d\xi, \quad (8)$$

de modo que

$$\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} = 1, \quad (9)$$

llegamos a la aproximación de la integral,

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p J(-\xi) B(u(x_j + \xi, t^n)) d\xi &= \sum_{i=-\eta}^{\eta} \int_{I_i} J(-\xi) B(u(x_j + \xi, t^n)) d\xi + O(\Delta x) \\ &= \sum_{i=-\eta}^{\eta} B(u(x_{i+j}, t^n)) w_{-i} + O(\Delta x), \end{aligned} \quad (10)$$

pues cuando ξ está en I_i , $x_j + \xi$ se encuentra en I_{i+j} .

El siguiente paso para llevar a cabo la aproximación numérica de la ecuación (1) es reemplazar (4), (5), (6), y (10) en (3), con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) &= \frac{A(u_{j+1}^n) - 2A(u_j^n) + A(u_{j-1}^n))}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \\ &\quad + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x) - ru_j^n + \\ &\quad + \sum_{i=-\eta}^{\eta} B(u_{i+j}^n) w_{-i} - B(u_j^n) + O(\Delta x) \\ &= \frac{A(u_{j+1}^n) - 2A(u_j^n) + A(u_{j-1}^n))}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) + \\ &\quad + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x) - ru_j^n + \\ &\quad + \sum_{i=-\eta}^{\eta} B(u_{i+j}^n) w_{-i} - \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B(u_j^n) + O(\Delta x) \\ &= \frac{A(u_{j+1}^n) - 2A(u_j^n) + A(u_{j-1}^n))}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) + \\ &\quad + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x) - ru_j^n + \\ &\quad + \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} [B(u_{i+j}^n) - B(u_j^n)] + O(\Delta x). \end{aligned} \quad (11)$$

Ahora definimos v_j^n como nuestra aproximación de u_j^n que satisface

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} &= \frac{A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \\ &+ c \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} - r v_j^n + \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^n - B_j^n, \end{aligned} \quad (12)$$

donde $A_j^n = A(v_j^n)$ y $B_j^n = B(v_j^n)$.

Estamos interesados en conocer la solución en el paso de tiempo $n+1$, por lo que despejamos v_j^{n+1} en (12):

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu \left[A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n \right] + c\lambda \left[v_{j+1}^n - v_j^n \right] - r\Delta t v_j^n + \\ &+ \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} (B_{i+j}^n - B_j^n) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

con $\mu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ y $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

La ecuación anterior puede reescribirse en la forma siguiente

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu \left[(A_{j+1}^n - A_j^n) - (A_j^n - A_{j-1}^n) \right] + c\lambda v_{j+1}^n \\ &- c\lambda v_j^n - r\Delta t v_j^n + \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} (B_{i+j}^n - B_j^n) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Ahora bien, utilizando el Teorema del Valor Medio y el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$A_{j+1}^n - A_j^n = a(\zeta_{j+1/2}^n) (v_{j+1}^n - v_j^n), \quad A_j^n - A_{j-1}^n = a(\zeta_{j-1/2}^n) (v_j^n - v_{j-1}^n),$$

para $\zeta_{j+1/2}^n$ entre v_j^n y v_{j+1}^n y para $\zeta_{j-1/2}^n$ entre v_{j-1}^n y v_j^n y

$$B_{i+j}^n - B_j^n = b(\gamma_{i+j}^n) (v_{j+i}^n - v_j^n),$$

para γ_{i+j}^n entre v_j^n y v_{i+j}^n .

Teniendo presente lo anterior, (14) es equivalente a

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu \left[a(\zeta_{j+1/2}^n) (v_{j+1}^n - v_j^n) - a(\zeta_{j-1/2}^n) (v_j^n - v_{j-1}^n) \right] \\
&\quad + c\lambda v_{j+1}^n - c\lambda v_j^n - r\Delta t v_j^n + \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) (v_{j+i}^n - v_j^n) \right] \\
&= \left[\mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^n) \right] v_{j+1}^n + \left\{ 1 - \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) \right. \\
&\quad \left. - \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) - c\lambda - r\Delta t + \Delta t \left[w_0 b(\gamma_j^n) - \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right] \right\} v_j^n \\
&\quad + \left\{ \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + \Delta t \left[w_1 b(\gamma_{j-1}^n) \right] \right\} v_{j-1}^n + \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) v_{i+j}^n,
\end{aligned} \tag{15}$$

que puede ser reescrita

$$v_j^{n+1} = \sum_{i=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_{-i,j} v_{i+j}^n, \tag{16}$$

donde los $\tilde{w}_{-i,j}$ se denominan pesos de la ecuación y se definen como

$$\tilde{w}_{-i,j} := \begin{cases} \Delta t \sum w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n), & \text{si } 1 < |i| \leq \eta \\ \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1}^n), & \text{si } i = -1 \\ 1 - c\lambda - \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) - \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) - r\Delta t + \Delta t w_0 b(\gamma_j^n) \\ \quad - \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n), & \text{si } i = 0 \\ \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^n), & \text{para } i = 1. \end{cases} \tag{17}$$

(16) corresponde a la forma discretizada y linealizada de la ecuación (3).

3. Estabilidad y monotonía

En esta sección, se estudian los aspectos concernientes a la convergencia del esquema numérico propuesto, mostrando monotonía y algunas propiedades de regularidad de la solución aproximada. Partimos de unos supuestos iniciales que nos ayudarán en la prueba de algunos de los lemas propuestos en esta sección.

Hipótesis: Con la notación antes relacionada se asume, al igual que en [1], que existen constantes positivas M_1 y M_2 tales que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| A_{j+1}^0 - 2A_j^0 + A_{j-1}^0 \right| \leq M_1 \Delta x, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| B_{j+1}^0 - 2B_j^0 + B_{j-1}^0 \right| \leq \frac{M_2}{\Delta x},$$

donde A_j^0 y B_j^0 corresponden a las funciones $A(u)$ y $B(u)$ evaluadas en el instante $t = 0$. Además asumimos $c \geq 0$ y $r = 0$.

Lema 3.1. (Monotonía) *El esquema (16) es monótono bajo la condición CFL*

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{c\Delta x + 2\|a\|_\infty + (\Delta x)^2\|b\|_\infty}. \quad (18)$$

Demostración. Para cada $\tilde{w}_{-i,j}$ definidos en (17), se tiene que $\tilde{w}_{-i,j} \geq 0$, si $\tilde{w}_{0,j} \geq 0$, esto es si

$$1 - c\lambda - \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) - \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + \Delta t w_0 b(\gamma_j^n) - \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \geq 0.$$

Lo anterior es equivalente a tener

$$c\lambda + \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) - \Delta t w_0 b(\gamma_j^n) + \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \leq 1, \quad (19)$$

para lo cual es suficiente que se satisfaga

$$c\lambda + 2\mu\|a\|_\infty + \Delta t\|b\|_\infty \leq 1; \quad (20)$$

ahora, factorizando y despejando Δt de (20), se obtiene la siguiente condición CFL del esquema

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{c\Delta x + 2\|a\|_\infty + (\Delta x)^2\|b\|_\infty}.$$

✓

En el siguiente lema se muestra una propiedad que cumplen los pesos $\tilde{w}_{i,j}$, la cual es importante para análisis posteriores.

Lema 3.2. *Los pesos $\tilde{w}_{-i,j}$ definidos en (17) cumplen que*

$$\sum_{i=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_{-i,j} = 1, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la forma como están definidos los pesos $\tilde{w}_{-i,j}$ en (17), realizamos la suma de todos ellos a continuación:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_{-i,j} &= \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) + \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1}^n) \\
&\quad + 1 - c\lambda - \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) - \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + \Delta t w_0 b(\gamma_j^n) \\
&\quad - \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) + \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^n) \\
&= \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1}^n) + 1 + \Delta t w_0 b(\gamma_j^n) \\
&\quad - \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^n) \\
&= \left[\Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1}^n) + \Delta t w_0 b(\gamma_j^n) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^n) \right] + 1 - \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \\
&= \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) + 1 - \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{21}$$

□

Lema 3.3. *El esquema (13) es conservativo. Más precisamente, (13) se puede escribir en la forma*

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \psi_j^n - \psi_{j-1}^n, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \{0, \dots, N-1\}$$

donde

$$\psi_j^n := \mu(A_{j+1}^n - A_j^n) + c\lambda v_{j+1}^n + \Delta t \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k}^n - B_{j-k+1}^n), \tag{22}$$

$$\text{con } \rho_k := \sum_{i=k}^{\eta} w_{-i} \quad \text{para } k = -\eta, \dots, \eta.$$

Demostración. Primero notemos que el último término de (13) puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} [B_{i+j} - B_j^n] = \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k}^n - B_{j-k+1}^n) - \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k-1}^n - B_{j-k}^n). \tag{23}$$

Ahora, reemplazando (23) en (14) obtenemos

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= v_j^n + \mu \left[(A_{j+1}^n - A_j^n) - (A_j^n - A_{j-1}^n) \right] + c\lambda v_{j+1}^n - c\lambda v_j^n \\
&\quad + \Delta t \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k}^n - B_{j-k+1}^n) - \Delta t \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k-1}^n - B_{j-k}^n) \\
&= v_j^n + \left[\mu (A_{j+1}^n - A_j^n) + c\lambda v_{j+1}^n + \Delta t \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k}^n - B_{j-k+1}^n) \right] \\
&\quad - \left[\mu (A_j^n - A_{j-1}^n) + c\lambda v_j^n + \Delta t \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k-1}^n - B_{j-k}^n) \right], \quad (24)
\end{aligned}$$

es decir

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \psi_j^n - \psi_{j-1}^n, \quad (25)$$

con ψ_j^n definido en (22). $\checkmark$

Se mostrarán, en los siguientes dos lemas, otros resultados concernientes a la estabilidad del esquema planteado.

Lema 3.4. *Si la condición CFL (18) se satisface, entonces el esquema (13) es tal que*

$$\|v^n\|_{\infty} \leq \|v_0\|_{\infty}, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Demostración. Recuérdesse que por (16) tenemos

$$v_j^{n+1} = \sum_{i=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_{-i,j} v_{i+j}^n,$$

de este modo, aplicando valor absoluto en ambos miembros de la anterior igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
|v_j^{n+1}| &= \left| \sum_{i=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_{-i,j} v_{i+j}^n \right| \\
&\leq \sum_{i=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_{-i,j} |v_{i+j}^n| \leq \sum_{i=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_{-i,j} \|v^n\|_{\infty} = \|v^n\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

$\checkmark$

Lema 3.5. *El esquema (13) cumple que*

$$\|v^n\|_1 \leq \|v_0\|_1,$$

es decir,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n|, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Demostración. Aplicando valor absoluto en ambos miembros de la igualdad en (15) y sumando sobre todo $j \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1}| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left[\mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^n) \right] |v_{j+1}^n| \right. \\ &\quad + \left[1 - \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) - \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) - c\lambda \right. \\ &\quad \left. + \Delta t \left(w_0 b(\gamma_j^n) - \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right) \right] |v_j^n| \\ &\quad + \left[\mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1}^n) \right] |v_{j-1}^n| \\ &\quad \left. + \left[\Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right] |v_{i+j}^n| \right\} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_j^n) + 1 - \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) \right. \\ &\quad \left. - \mu a(\zeta_{j-1/2}^n) - c\lambda + \Delta t \left[w_0 b(\gamma_j^n) - \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_j^n) + \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right\} |v_j^n| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \Delta t w_{-1} b(\gamma_j^n) + 1 + \Delta t w_0 b(\gamma_j^n) - \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right. \\ &\quad \left. + \Delta t w_1 b(\gamma_j^n) + \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right\} |v_j^n| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 1 - \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) - \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^n) \right] \right\} |v_j^n| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n|. \end{aligned}$$

□

A continuación mostraremos que nuestro esquema cumple la propiedad de variación total decreciente (TVD). Recuerdese que para una función discreta z , se define la variación total de la siguiente forma:

$$T.V.(z) = \sum_i |z_i - z_{i-1}|.$$

Además, la propiedad TVD significa que $T.V.(z^{n+1}) \leq T.V.(z^n)$.

Lema 3.6. *Nuestro esquema numérico (13) tiene la propiedad TVD, esto es:*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^n - v_j^n|, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \quad (26)$$

Demostración. Recordemos que en (14) establecimos la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & v_j^n + \mu \left[(A_{j+1}^n - A_j^n) - (A_j^n - A_{j-1}^n) \right] + c\lambda v_{j+1}^n - \\ & - c\lambda v_j^n - r\Delta t v_j^n + \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} (B_{i+j}^n - B_j^n) \right]. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede escribir v_{j+1}^{n+1} , obteniéndose el siguiente resultado

$$\begin{aligned} v_{j+1}^{n+1} = & v_{j+1}^n + \mu \left[(A_{j+2}^n - A_{j+1}^n) - (A_{j+1}^n - A_j^n) \right] + c\lambda v_{j+2}^n - c\lambda v_{j+1}^n \\ & + \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} (B_{i+j+1}^n - B_{j+1}^n) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

De acuerdo a lo anterior, si restamos miembro a miembro las ecuaciones (27) y (14) y luego reagrupamos términos obtenemos

$$\begin{aligned} v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1} = & \left\{ (1 - c\lambda)(v_{j+1}^n - v_j^n) - 2\mu(A_{j+1}^n - A_j^n) + \right. \\ & \left. + \Delta t(w_0 - 1)[B_{j+1}^n - B_j^n] \right\} + \\ & + \left[\mu(A_{j+2}^n - A_{j+1}^n) + c\lambda(v_{j+2}^n - v_{j+1}^n) + \right. \\ & + \Delta t w_{-1}(B_{j+2}^n - B_{j+1}^n) \left. \right] + \left[\mu(A_j^n - A_{j-1}^n) + \right. \\ & \left. + \Delta t w_1(B_j^n - B_{j-1}^n) \right] + \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} (B_{i+j+1}^n - B_{i+j}^n). \end{aligned} \quad (28)$$

Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio a la ecuación (28) tenemos

$$\begin{aligned} v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1} &= \left[(1 - c\lambda) - 2\mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + \Delta t(w_0 - 1)b(\gamma_{j+1/2}^n) \right] (v_{j+1}^n - v_j^n) \\ &\quad + \left[\mu a(\zeta_j^n) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_j^n) \right] (v_{j+2}^n - v_{j+1}^n) \\ &\quad + \left[\mu a(\zeta_{j-1/2}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1/2}^n) \right] (v_j^n - v_{j-1}^n) \\ &\quad + \left[\Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{j+1/2}^n) \right] (v_{i+j+1}^n - v_{i+j}^n), \end{aligned}$$

y el paso a seguir es aplicar valor absoluto y sumar sobre todo $j \in \mathbb{Z}$ para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left[1 - (c\lambda + 2\mu a(\zeta_{j+1/2}^n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta t(1 - w_0)b(\gamma_{j+1/2}^n) \right] |v_{j+1}^n - v_j^n| \right. \\ &\quad + \left[\mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1/2}^n) \right] |v_{j+1}^n - v_j^n| \\ &\quad + \left[\mu a(\zeta_{j+1/2}^n) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j+1/2}^n) \right] |v_{j+1}^n - v_j^n| \\ &\quad \left. + \left[\Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{j+1/2}^n) \right] |v_{j+1}^n - v_j^n| \right\} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 1 + \left[-\Delta t(1 - w_0) + \Delta t w_{-1} + \Delta t w_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} \right] b(\gamma_{j+1/2}^n) \right\} |v_{j+1}^n - v_j^n| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[1 + \left(-\Delta t + \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} \right) b(\gamma_{j+1/2}^n) \right] |v_{j+1}^n - v_j^n| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^n - v_j^n|. \end{aligned}$$

□

Se muestran ahora dos resultados claves de regularidad para el esquema numérico planteado.

Lema 3.7. *Si la condicion CFL (18) se satisface, entonces existe una constante C_1 independiente de Δt y Δx tal que*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq C_1 \lambda, \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (29)$$

Demostración. Haciendo un procedimiento análogo al realizado inicialmente en el lema 3, podemos escribir v_j^n de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_j^n = & v_j^{n-1} + \mu \left[(A_{j+1}^{n-1} - A_j^{n-1}) - (A_j^{n-1} - A_{j-1}^{n-1}) \right] + c\lambda v_{j+1}^{n-1} - c\lambda v_j^{n-1} \\ & + \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} (B_{i+j}^{n-1} - B_j^{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Ahora restamos miembro a miembro las ecuaciones (14) y (30) con el fin de obtener una expresión para $v_j^{n+1} - v_j^n$

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} - v_j^n = & v_j^n - v_j^{n-1} + \mu \left\{ \left[(A_{j+1}^n - A_j^n) - (A_j^n - A_{j-1}^n) \right] \right. \\ & \left. - \left[(A_{j+1}^{n-1} - A_j^{n-1}) - (A_j^{n-1} - A_{j-1}^{n-1}) \right] \right\} + c\lambda (v_{j+1}^n - v_{j+1}^{n-1}) \\ & - c\lambda (v_j^n - v_j^{n-1}) + \Delta t \left[\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^n - B_j^n \right. \\ & \left. - \left(\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^{n-1} - B_j^{n-1} \right) \right] \\ = & \left\{ (1 - c\lambda) (v_j^n - v_j^{n-1}) - 2\mu (A_j^n - A_j^{n-1}) + \right. \\ & \left. + \Delta t \left[(w_0 - 1) (B_j^n - B_j^{n-1}) \right] \right\} + \left\{ \mu (A_{j+1}^n - A_{j+1}^{n-1}) + \right. \\ & \left. + c\lambda (v_{j+1}^n - v_{j+1}^{n-1}) + \Delta t \left[w_{-1} (B_{j+1}^n - B_{j+1}^{n-1}) \right] \right\} + \\ & + \left\{ \mu (A_{j-1}^n - A_{j-1}^{n-1}) + \Delta t \left[w_1 (B_{j-1}^n - B_{j-1}^{n-1}) \right] + \right. \\ & \left. + \Delta t \left[\sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} (B_{i+j}^n - B_{i+j}^{n-1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Lo siguiente que haremos, es aplicar Teorema del Valor Medio en (31) para obtener

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} - v_j^n &= \left[(1 - c\lambda) - 2\mu a(\zeta_j^{n-1/2}) - \Delta t(w_0 - 1)b(\gamma_j^{n-1/2}) \right] (v_j^n - v_j^{n-1}) \\
&+ \left[\mu a(\zeta_{j+1}^{n-1/2}) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^{n-1/2}) \right] (v_{j+1}^n - v_{j+1}^{n-1}) \\
&+ \left[\mu a(\zeta_{j-1}^{n-1/2}) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1}^{n-1/2}) \right] (v_{j-1}^n - v_{j-1}^{n-1}) \\
&+ \Delta t \left[\sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^{n-1/2}) \right] (v_{i+j}^n - v_{i+j}^{n-1}), \tag{32}
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 1 - [c\lambda + 2\mu a(\zeta_j^{n-1/2}) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta t(1 - w_0)b(\gamma_j^{n-1/2})] \right\} |v_j^n - v_j^{n-1}| + \\
&+ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\mu a(\zeta_{j+1}^{n-1/2}) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_{j+1}^{n-1/2}) \right] |v_{j+1}^n - v_{j+1}^{n-1}| + \\
&+ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\mu a(\zeta_{j-1}^{n-1/2}) + \Delta t w_1 b(\gamma_{j-1}^{n-1/2}) \right] |v_{j-1}^n - v_{j-1}^{n-1}| + \\
&+ \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^{n-1/2}) \right] |v_{i+j}^n - v_{i+j}^{n-1}| \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 1 - [c\lambda + 2\mu a(\zeta_j^{n-1/2}) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta t(1 - w_0)b(\gamma_j^{n-1/2})] \right\} |v_j^n - v_j^{n-1}| + \\
&+ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\mu a(\zeta_j^{n-1/2}) + c\lambda + \Delta t w_{-1} b(\gamma_j^{n-1/2}) \right] |v_j^n - v_j^{n-1}| + \\
&+ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\mu a(\zeta_j^{n-1/2}) + \Delta t w_1 b(\gamma_j^{n-1/2}) \right] |v_j^n - v_j^{n-1}| + \\
&+ \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} b(\gamma_{i+j}^{n-1/2}) \right] |v_j^n - v_j^{n-1}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 1 - \left[c\lambda + 2\mu a\left(\zeta_j^{n-1/2}\right) + \Delta t(1-w_0)b\left(\gamma_j^{n-1/2}\right) \right] + \right. \\
&\quad + \mu a\left(\zeta_j^{n-1/2}\right) + c\lambda + \Delta t w_{-1}b\left(\gamma_j^{n-1/2}\right) + \mu a\left(\zeta_j^{n-1/2}\right) + \\
&\quad \left. + \Delta t w_1b\left(\gamma_j^{n-1/2}\right) + \Delta t \left[\sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i}b\left(\gamma_{i+j}^{n-1/2}\right) \right] \right\} |v_j^n - v_j^{n-1}| \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 1 + \left[-\Delta t(1-w_0) + \Delta t w_{-1} + \Delta t w_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta t \sum_{1 < |i| \leq \eta} w_{-i} \right] b\left(\gamma_{i+j}^{n-1/2}\right) \right\} |v_j^n - v_j^{n-1}|.
\end{aligned}$$

Ahora, si desarrollamos los productos y agrupamos términos nuevamente, se llega a

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\left(-\Delta t + \Delta t \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} \right) b\left(\gamma_{i+j}^{n-1/2}\right) + 1 \right] |v_j^n - v_j^{n-1}|,$$

de donde se obtiene fácilmente la siguiente desigualdad

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n - v_j^{n-1}|, \quad (33)$$

que equivale a tener

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n - v_j^{n-1}|. \quad (34)$$

Haciendo inducción sobre n en (34) logramos obtener que

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^1 - v_j^0|.$$

Por otro lado, si $n = 0$ en (12) tenemos

$$\frac{v_j^1 - v_j^0}{\Delta t} = \frac{A_{j+1}^0 - 2A_j^0 + A_{j-1}^0}{(\Delta x)^2} + c \frac{v_{j+1}^0 - v_j^0}{\Delta x} + \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^0 - B_j^0. \quad (35)$$

Igualdad de la cual se despeja $v_j^1 - v_j^0$ y se multiplica por Δx

$$\begin{aligned}
(v_j^1 - v_j^0) \Delta x &= \Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (A_{j+1}^0 - 2A_j^0 + A_{j-1}^0) + \frac{c}{\Delta x} (v_{j+1}^0 - v_j^0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^0 - B_j^0 \right] \Delta x. \quad (36)
\end{aligned}$$

De (36) el término más complicado de acotar es el último. Para realizar esto, recuerde que por (23)

$$\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^n - B_j^n = \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k}^n - B_{j-k+1}^n) - \left[\sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k-1}^n - B_{j-k}^n) \right];$$

pero note lo siguiente

$$\sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (B_{j+k}^n - B_{j-k+1}^n) = \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n),$$

con

$$Q_k := \sum_{i=k+1}^{\eta} \rho_i \quad y \quad k \in \{0, \dots, \eta-1\}.$$

Así, reemplazando (37) en (23), el último término de (36) se puede escribir como sigue

$$\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^n - B_j^n = \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) - \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k (B_{j+k}^n - B_{j+k-1}^n),$$

lo cual nos conduce a la igualdad siguiente:

$$\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^n - B_j^n = \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k (B_{j+k+1}^n - 2B_{j+k}^n + B_{j+k-1}^n). \quad (37)$$

Si hacemos $n = 0$ en (37) establecemos que

$$\sum_{i=-\eta}^{\eta} w_{-i} B_{i+j}^0 - B_j^0 = \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k (B_{j+k+1}^0 - 2B_{j+k}^0 + B_{j+k-1}^0). \quad (38)$$

Si reemplazamos (38) en (36) obtenemos la siguiente expresión equivalente a la ecuación (36)

$$\begin{aligned} (v_j^1 - v_j^0) \Delta x &= \Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (A_{j+1}^0 - 2A_j^0 + A_{j-1}^0) + \frac{c}{\Delta x} (v_{j+1}^0 - v_j^0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k (B_{j+k+1}^0 - 2B_{j+k}^0 + B_{j+k-1}^0) \right] \Delta x, \end{aligned}$$

aplicando valor absoluto en esta última ecuación nos resulta la desigualdad

$$\begin{aligned} |v_j^1 - v_j^0| \Delta x &\leq \Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} |A_{j+1}^0 - 2A_j^0 + A_{j-1}^0| + \frac{c}{\Delta x} |v_{j+1}^0 - v_j^0| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} |Q_k| |B_{j+k+1}^0 - 2B_{j+k}^0 + B_{j+k-1}^0| \right] \Delta x, \quad (39) \end{aligned}$$

sumando ahora en (39) sobre todo $j \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^1 - v_j^0| \Delta x &\leq \Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |A_{j+1}^0 - 2A_j^0 + A_{j-1}^0| \right. \\ &\quad + \frac{c}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^0 - v_j^0| \\ &\quad \left. + \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k \sum_{j \in \mathbb{Z}} |B_{j+k+1}^0 - 2B_{j+k}^0 + B_{j+k-1}^0| \right] \Delta x. \end{aligned} \quad (40)$$

Ahora bien, utilizando los supuestos iniciales y los resultados obtenidos en (26), la ecuación (40) nos quedaría expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^1 - v_j^0| \Delta x &\leq \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} M_1 \Delta x + cTV(v_j^0) + \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k \frac{M_2}{\Delta x} \Delta x \right] \\ &= \Delta t \left[M_1 + cTV(v_j^0) + \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k M_2 \right], \end{aligned}$$

con lo cual concluimos

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^1 - v_j^0| \Delta x \leq C_1 \Delta t = C_1 \lambda,$$

donde

$$C_1 = M_1 + cTV(v_j^0) + \sum_{k=-\eta+1}^{\eta-1} Q_k M_2. \quad (41)$$

□

Lema 3.8. Si la condicion CFL (18) se satisface, entonces existe una constante C_2 , independiente de Δx y Δt , tal que

$$\left| (A_{j+1}^n - A_j^n) + (\Delta x)^2 \sum_{k=-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) \right| \leq C_2 \Delta x. \quad (42)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, n \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (43)$$

Demostración. Por (37), ψ_j^n en (23) se puede expresar de la siguiente forma

$$\psi_j^n = \lambda \left[\frac{1}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \Delta x \sum_{k=-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) + cv_{j+1}^n \right],$$

obsérvese además que

$$\begin{aligned}
& \lambda \left| \frac{1}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \Delta x \sum_{k=-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) \right| \\
& \leq \lambda \left| \frac{1}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) \right. \\
& \quad \left. + \Delta x \sum_{k=-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) \right. \\
& \quad \left. + cv_{j+1}^n - cv_{j+1}^n \right| \\
& \leq \lambda \left| \frac{1}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) \right. \\
& \quad \left. + \Delta x \sum_{k=-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) + cv_{j+1}^n \right| \\
& \quad + \left| c\lambda v_{j+1}^n \right|.
\end{aligned}$$

Transponiendo el último término al miembro izquierdo de la desigualdad obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \lambda \left| \frac{1}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \Delta x \sum_{k=-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) \right| - \left| c\lambda v_{j+1}^n \right| \\
& \leq \left| \psi_j^n \right| \\
& = \left| \sum_{i=-\infty}^j (\psi_i^n - \psi_{i-1}^n) \right| \\
& = \left| \sum_{i=-\infty}^j (v_i^{n+1} - v_i^n) \right| \\
& \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| v_j^{n+1} - v_j^n \right| \\
& \leq C_1 \lambda. \tag{44}
\end{aligned}$$

Ahora, primero sumando $|c\lambda v_{j+1}^n|$ y luego multiplicando por $\frac{1}{\lambda}$ ambos miembros de (44) obtenemos la desigualdad

$$\left| \frac{1}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \Delta x \sum_{-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) \right| \leq C_1 + c |v_{j+1}^n|. \quad (45)$$

Por Lema 3, se tiene que $|v_{j+1}^n| \leq \|v^0\|_\infty$; reemplazando esto en (45), tenemos

$$\left| \frac{1}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \Delta x \sum_{-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) \right| \leq C_1 + c \|v^0\|_\infty. \quad (46)$$

Por último, multiplicando (46) por Δx se obtiene el resultado deseado

$$\left| (A_{j+1}^n - A_j^n) + (\Delta x)^2 \sum_{-\eta+1}^{\eta+1} Q_k (B_{j+k+1}^n - B_{j+k}^n) \right| \leq C_2 \Delta x, \quad (47)$$

haciendo $C_2 = C_1 + c \|v^0\|_\infty$. $\checkmark$

Las propiedades probadas en los lemas de la sección 3 garantizan analíticamente la convergencia y estabilidad de nuestro esquema numérico, lo cual se pone en evidencia en la siguiente sección a través de diferentes experimentos numéricos.

4. Experimentos Numéricos

A continuación se presentan algunos experimentos numéricos, con los cuales se muestra la eficacia del método numérico propuesto en este artículo.

Ejemplo 1

En este primer ejemplo estudiamos una ecuación lineal no local propuesta en [5]. Se soluciona numéricamente la ecuación (1), con $A(u) = bu$, $B(u) = du$, condición inicial $u_0(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x)$, $J(x) = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \exp(-100x^2)$, $c = 4$, $b = r = d = 1$, un tiempo de $T = 0.1$ y $x \in [-6, 6]$. La ecuación (1), con estos datos tiene como solución exacta

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\theta) \exp(\tilde{q}(\theta)T\Delta t) \tilde{u}_0(\theta) d\theta$$

con

$$\tilde{q}(\theta) = \sqrt{2\pi} \left(-\frac{r}{\sqrt{2\pi}} + d(\tilde{J}(\theta) - \tilde{J}(0)) - \frac{b\theta^2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{ic\theta}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

En la Figura 1 se hace la comparación entre la solución exacta de la ecuación del primer ejemplo y la solución aproximada encontrada a través del método que proponemos en este artículo.

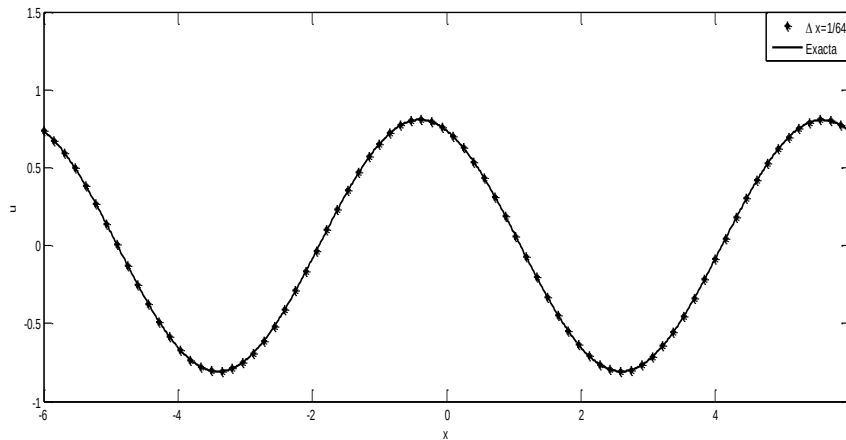


FIGURA 1. Solución exacta vs. Solución numérica del Ejemplo 1

La Tabla 1 muestra errores y órdenes correspondientes a la ecuación tratada en el Ejemplo 4.1.

$1/\Delta x$	L_1 Error	L_1 Orden	L_2 Error	L_2 Orden	L_∞ Error	L_∞ Orden
32	2.1e-3	0	2.1e-3	0	2.1e-3	0
64	1.4e-3	0.5640	1.4e-3	0.5642	1.4e-3	0.5822
128	8e-4	0.7811	8e-4	0.7812	8e-4	0.7837
256	4e-4	0.8946	4e-4	0.8946	4e-4	0.8950

TABLA 1. Errores y órdenes para el Ejemplo 1

Se puede ver en la Tabla 1 que computacionalmente el orden de convergencia del método que proponemos es 1, lo cual coincide con lo descrito en la ecuación (11), además, la solución numérica que aquí proponemos converge a la solución exacta como se puede ver en la Figura 1.

A continuación, se muestran dos ejemplos con ecuaciones no lineales y no locales de las cuales no se tiene la solución exacta. Lo que haremos será programar una solución numérica con muchos puntos y la tomaremos como referencia para comparar nuestras soluciones programadas con pocos puntos en el dominio.

Ejemplo 2

Se soluciona numéricamente la ecuación (1), con los siguientes datos

$$A'(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } |u| \leq 1/4 \\ 1, & \text{si } |u| > 1/4 \end{cases}, \quad b(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq 0.1 \\ 1, & \text{si } u > 0.1 \end{cases}$$

$J(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$, condición inicial $u_0(x) = -\sin(\pi x)$, $T = 0.1$ $x \in [-6, 6]$, $b = d = r = 1$ y $c = 4$.

En la Figura 2, se muestra la solución numérica de la ecuación tratada en este ejemplo, para distintos valores de Δx

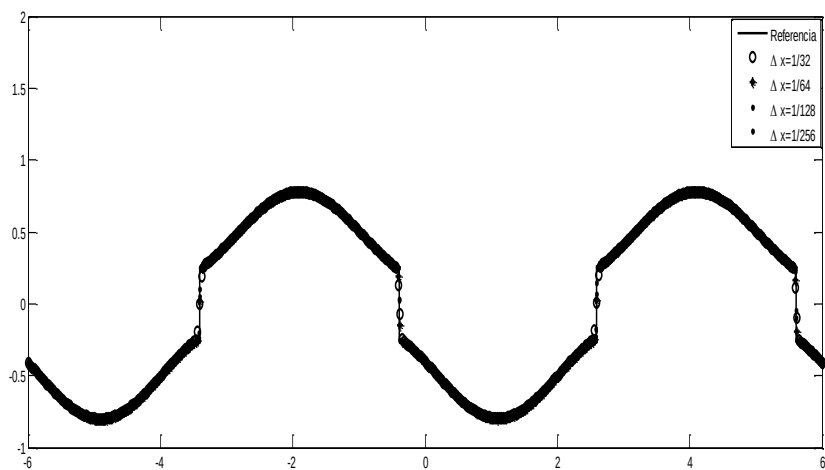


FIGURA 2. Solución numérica del Ejemplo 4.2 para distintos valores de Δx del Ejemplo 4.2

En la Figura 3, se muestra el acercamiento de una porción de la Figura 2.

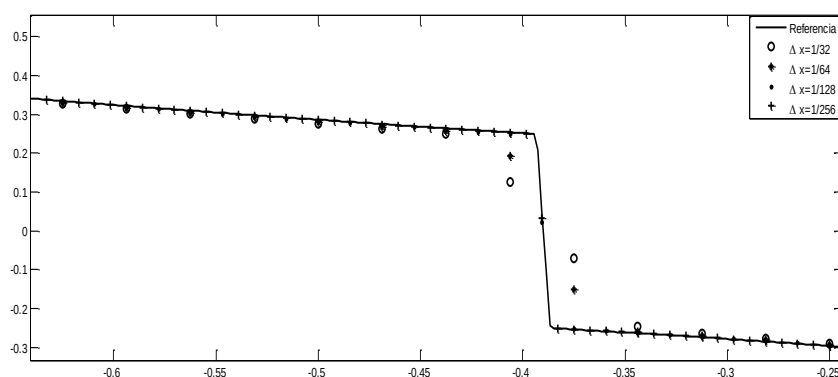


FIGURA 3. Porción ampliada de la Figura 2

En ambas figuras, la línea sólida es la solución de referencia calculada con un valor de $\Delta x = 1/512$.

La Tabla 2 muestra errores y órdenes correspondiente a la ecuación tratada en el Ejemplo 2.

$1/\Delta x$	L_1 Error	L_1 Orden	L_2 Error	L_2 Orden	L_∞ Error	L_∞ Orden
32	1.35e-2	0	4.15e-2	0	3.027e-1	0
64	6.67e-3	1.0290	2.64e-2	0.6557	2.748e-1	0.1396
128	3.12e-3	1.0828	1.79e-2	0.5608	2.282e-1	0.2679
256	7.95e-3	1.3418	7.92e-3	1.1719	1.446e-1	0.6586

TABLA 2. Errores y órdenes para el Ejemplo 2

Según los resultados de la Tabla 2, se puede observar que computacionalmente el orden de convergencia del método en este caso es de 1, aunque se haya tomado $A(u)$ y $B(u)$ con discontinuidades. Obsérvese que dichas funciones también cumplen con las propiedades exigidas al igual que la función J . Además, se puede notar en las Figuras 2 y 3 que nuestras soluciones para distintos valores de Δx convergen a la solución que programada como referencia.

Ejemplo 3

Se soluciona la ecuación (1), con los siguientes datos

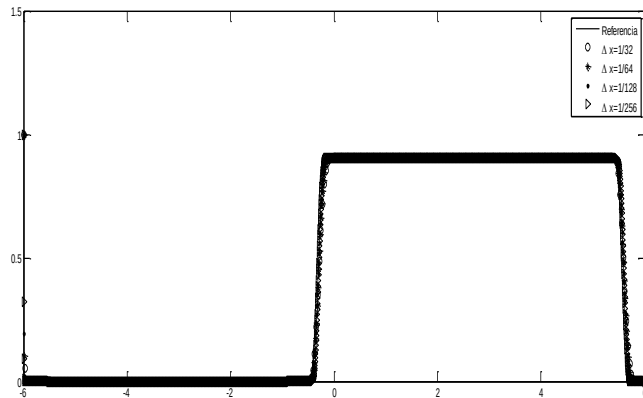
$$a(u) = 4\epsilon u(1-u), \quad b(u) = a(u), \quad J(x) = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \exp(-100x^2),$$

y condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0.1 \\ 1 & \text{si } x > 0.1 \end{cases}$$

con $x \in [-6, 6]$, $T > 0$, $b = d = r = 1$ y $c = 4$.

En la Figura 3, se muestra la solución numérica de la ecuación tratada en este ejemplo, para distintos valores de Δx .

FIGURA 3. Solución numérica de la ecuación (1) para distintos valores de Δx

En la Figura 4, se muestra el acercamiento de una porción de la Figura 3.

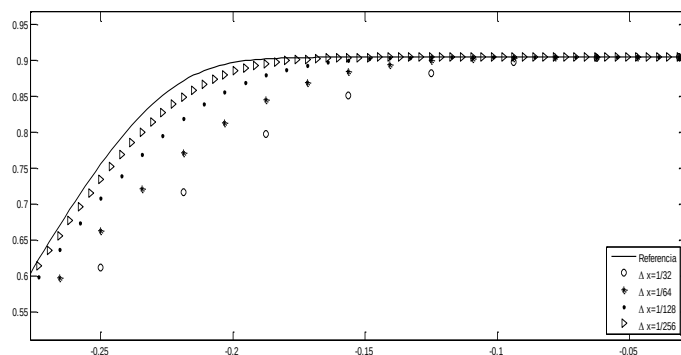


FIGURA 4. Porción ampliada de la Figura 3

En ambas gráficas, la línea sólida es la solución de referencia calculada con un valor de $\Delta x = 1/1024$.

La Tabla 3 muestra los errores y los órdenes correspondientes a la ecuación tratada en el Ejemplo 3.

$1/\Delta x$	L_1 Error	L_1 Orden	L_2 Error	L_2 Orden	L_∞ Error	L_∞ Orden
32	1.143e-2	0	3.423e-2	0	1.707e-1	0
64	8.331e-3	0.4663	2.657e-2	0.3637	1.332e-1	0.3580
128	5.567e-3	0.5958	1.964e-2	0.4401	1.916e-1	0.5246
256	2.882e-3	0.9658	1.141e-2	0.9125	1.236e-2	0.9326

TABLA 3. Tabla de Errores y órdenes para el Ejemplo 3

Nuevamente, se observa que el orden de convergencia de nuestro método es 1, aún cuando la condición inicial es discontinua. Las soluciones programadas para distintos valores de Δx convergen a la solución de referencia que programamos como se observa en las Figuras 3 y 4.

5. Conclusiones

Se desarrolló un procedimiento numérico para la aproximación de soluciones a una ecuación diferencial parcial tipo parabólica con convección-difusión no lineal y no local, usando los métodos de diferencias finitas y molificación discreta, efectuando además el análisis de estabilidad para obtener las condiciones CFL asociadas a la discretización. Se lograron demostrar importantes propiedades

tales como TVD, ley conservativa y lemas de regularidad, las cuales son imprescindibles para garantizar la convergencia de las soluciones del esquema estudiado.

Se realizaron experimentos numéricos, en los cuales se evidencia que el método que se propuso es de orden 1, lo que coincide con lo que se muestra en la ecuación (11). Además, aunque para las ecuaciones trabajadas en los Ejemplos 2 y 3 no se tienen soluciones exactas, en caso de que dichas soluciones se puedan calcular analíticamente, se garantiza que nuestras soluciones programadas para distintos valores de Δx convergerán a la exacta.

Los resultados numéricos obtenidos muestran que la implementación del método de molificación discreta es ventajoso en este tipo de problemas por cuanto regulariza muy bien la integral impropia que en nuestra ecuación aparece.

Para trabajos futuros, se puede realizar la aproximación a la ecuación no lineal, no local y fuertemente degenerada descrita por el modelo:

$$u_t(x, t) = A(u)_{xx}(x, t) + f(u)_x(x, t) - ru(x, t) + \int_{\mathbb{R}} J(s - x)B(u)(s, t)ds - B(u)(x, t),$$

utilizando las mismas estrategias numéricas en este artículo empleadas, o discretizando las derivadas en tiempo y espacio con una misma clase de diferencias finitas (todas con diferencias finitas hacia atrás o centradas). También se podría pensar en extender este mismo modelo a dos o tres variables.

References

- [1] C. D. Acosta, R. Bürger, and C. E. Mejía, *Monotone difference schemes stabilized by discrete mollification for strongly degenerate parabolic equations*, Numerical Methods for Partial Differential Equations **28** (2012), no. 1, 38–62.
- [2] C. D. Acosta and C. E. Mejía, *Stabilization of explicit methods for convection diffusion equations by discrete mollification*, Computers & Mathematics with Applications **55** (2008), no. 3, 368–380.
- [3] ———, *A mollification based operator splitting method for convection diffusion equations*, Computers & mathematics with applications **59** (2010), no. 4, 1397–1408.
- [4] ———, *Stable computations by discrete mollification*, 2014.
- [5] C. D. Acosta and F. Osorio, *Solución numérica del modelo de black-scholes no local por molificación discreta*, Revista Integración (2015).

- [6] S. K. Bhowmik, *Fast and efficient numerical methods for an extended black-scholes model*, Computers & Mathematics with Applications **67** (2014), no. 3, 636–654.
- [7] F. Black and M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, The journal of political economy (1973), 637–654.
- [8] M. Bogoya and C. A. Gómez, *Modelo discreto para una ecuación de difusión no local*, Revista Colombiana de Matemáticas **47** (2013), no. 1, 83–94.
- [9] A.-V. Fuensanta, J. M. Mazón, J. D. Rossi, and J. J. Toledo-Melero, *Non-local diffusion problems*, vol. 165, American Mathematical Society, 2010.
- [10] L. I. Ignat and J. D. Rossi, *A nonlocal convection-diffusion equation*, Journal of Functional Analysis **251** (2007), no. 2, 399–437.
- [11] C. E. Mejía Salazar et al., *Sobre el método de molificación*, (2007).

(Recibido en febrero de 2017. Aceptado en agosto de 2017)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE SUCRE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS
CARRERA 28 No 5 - 267
SINCELEJO, COLOMBIA
e-mail: hdcontrerasc@unal.edu.co

DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
CAMPUS LA NUBIA
MANIZALES, COLOMBIA
e-mail: cdacostam@unal.edu.co, loaguirresa@unal.edu.co